Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 616-622
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124070

Hans汉斯

($n \times m$, 4,1,2)光正交码的上界

温建福，黄月梅[*]

内蒙古师范大学，内蒙古自治区数学与应用数学中心，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2022年3月14日；录用日期：2022年4月15日；发布日期：2022年4月22日

摘 要

一个光正交码是指具有良好的自相关性和互相关性的序列族。它是为光码分多址(CDMA)系统而设计的一种专用码。本文通过计算每个权重为4的码字所含3-子集轨道代表元的个数，给出汉明权重为4，自相关值为1，互相关值为2的二维光正交码的码字容量的上界。

关键词

光正交码，轨道，3-子集，上界

Bounds of ($n \times m$, 4,1,2)-Optical Orthogonal Oodes

Jianfu Wen, Yuemei Huang[*]

Center of Mathematics and Applied Mathematics, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 15th, 2022; published: Apr. 22nd, 2022

Abstract

An optical orthogonal code is a family of sequences with good auto-correlation and cross-correlation. It is a special code designed for optical code-division multiple access (CDMA) system. In this paper, the upper bound of the capacity of two-dimensional optical orthogonal codes with hamming weight 4, auto-correlation value of 1 and cross-correlation value of 2 is given by calculating the number of 3-subset orbit representations of each code with weight 4.

Keywords

Optical Orthogonal Codes, Orbit, 3-Subset, Bound

[*]通讯作者。

文章引用: 温建福, 黄月梅. (n × m, 4,1,2)光正交码的上界[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 616-622.
DOI: 10.12677/pm.2022.124070

1. 引言

设 $n,m,k,\lambda_a,\lambda_c$ 是正整数，参数为 $(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)$ 的二维光正交码 $\mathcal{C}$（记作 $2-D(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$）是 $n\times m$ 阶的 $(0,1)$ 矩阵 C (码字)的集合，其中 k,λ_a,λ_c 分别表示光正交码的权重，自相关值和互相关值，并且满足下列两个条件：

1) 自相关性：对任意 $C=(c_{ij})_{n\times m}\in\mathcal{C}$ 和任意正整数 $l\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}c_{ij}c_{i,j+l}\le\lambda_a\text{；}$$

2) 互相关性：对任意 $C=(c_{ij})_{n\times m}\in\mathcal{C}$，$D=(d_{ij})_{n\times m}\in\mathcal{C}$，$C\ne D$，以及任意正整数 $l\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，有 $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}c_{ij}d_{i,j+l}\le\lambda_c$。

任意 $C=(c_{ij})_{n\times m}\in\mathcal{C}$，行标 i 取自 I_n，列标 j 取自 Z_m，其中 $I_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，Z_m 是模 m 的剩余类加群，若 $c_{ij}\ne 0$ 则令 $(i,j)\in B_C$，B_C 表示 C 中非零元素的坐标集合，所以 B_C 是 $I_n\times Z_m$ 中一个 k 元组。于是，$2-D(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$ 可视为 $I_n\times Z_m$ 中 k 元组的集合记作 $\mathcal{B}$，满足下列两个条件：

1′) 自相关性：对任意 $B\in\mathcal{B}$ 和任意正整数 $l\in Z_m\setminus\{0\}$，有

$$\left|B\cap(B+l)\right|\le\lambda_a\text{；}$$

2′) 互相关性：对任意 $A,B\in\mathcal{B},A\ne B$ 和任意正整数 $l\in Z_m$，有

$$\left|A\cap(B+l)\right|\le\lambda_c\text{，}$$

其中 $B+l=\{(i,j+l):(i,j)\in B\}$，并且所有加法运算在 Z_m 上进行。

对光正交码的研究始于 1989 年文献[1]。实际应用中需要大容量相关性好的光正交码，二维光正交码具有良好的稳定性及所需容量。在文献[2] [3] [4]中研究了 $k=3,4;\lambda_a=1,2;\lambda_c=k-1$ 时，$(n\times m,k,\lambda_a,k-1)$ 光正交码的上界，并确定了 $\Phi(n\times m,k,k-1)$ 的计算公式。文献[5]中计算了汉明权重为 $k;\lambda_a=k-2;\lambda_c=k-1$ 时 $\Phi(n\times m,k,k-2,k-1)$ 的具体表达式并确定了 $(n\times m,5,3,4)$ 光正交码的上界。在文献[6] [7] [8]中具体分析了 $(n\times m,3,2,1)$ 光正交码的部分上界及构造问题。当 $\lambda_a=\lambda_c$ 时，在文献[9]中利用辅助设计建立递归构造的方式得到 $(n\times m,4,2)$ 光正交码的上界及部分无穷类结果。本文研究了当 $k=4,\lambda_a=1,\lambda_c=2$ 时，$(n\times m,4,1,2)$ 光正交码的最大容量 $\Phi(n\times m,4,1,2)$ 的问题。本文的研究丰富了多维光正交码的研究内容。

定理 1.1 设 n 和 m 是正整数，则

$$M\left(n\times m,4,1,2\right)=\begin{cases}\left\lfloor\dfrac{n\left(n^2m^2-3nm-3m+5\right)}{24}\right\rfloor, & (m,12)=1,\\ \left\lfloor\dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+14\right)}{24}\right\rfloor, & (m,12)=2,\\ \left\lfloor\dfrac{n\left(n^2m^2-3nm-3m+9\right)}{24}\right\rfloor, & (m,12)=3,\\ \left\lfloor\dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+20\right)}{24}\right\rfloor, & (m,12)=4,\\ \left\lfloor\dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+18\right)}{24}\right\rfloor, & (m,12)=6,\\ \left\lfloor\dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+24\right)}{24}\right\rfloor, & (m,12)=12.\end{cases}$$

在本文的第二节提出判别 $2-D\left(n\times m,4,1,2\right)-OOC$ 的等价条件；第三节给出了计算 $\Phi\left(n\times m,4,1,2\right)$ 的过程及结果；第四节对本文进行总结和 $\Phi\left(n\times m,4,1,2\right)$ 的不够紧密的原因进行分析。

2. 基础知识

设 B 是 $I_n\times Z_m$ 的 k-子集，根据 B 的第一坐标，定义 B 的 (x,x)-纯差为 B 的差多重集 $\Delta_{xx}(B)=\{b-a:(x,a),(x,b)\in B,a\neq b\}$，其中运算为模 m；令 $supp(\Delta B)$ 表示多重集 $\bigcup_{x\in I_n}\Delta_{xx}(B)$ 中所有不同元素的集合；$\lambda(B)$ 表示多重集 $\bigcup_{x\in I_n}\Delta_{xx}(B)$ 中元素的最大重数。于是，

$$\lambda(B)=\max\left\{\left|B\cap(B+l)\right|:l\in Z_m\setminus\{0\}\right\}。$$

对于 $I_n\times Z_m$ 的任意 k-子集 B 和 $l\in Z_m$，定义 $B+l=\{(i,j+l),(i,j)\in B\}$ 为 B 的轨道记为 $O(B)$，其中加法运算在 Z_m 上进行。若 B 在 Z_m 的作用下，轨道 $O(B)$ 含有 m 个元素，则称其为长轨道，否则为短轨道。

根据任意 $A,B\in\mathcal{B},A\neq B$ 和任意正整数 $l\in Z_m$，有

$$\left|A\cap(B+l)\right|\leq\lambda_c=2，$$

所以 B 包含的 3-子集轨道代表元只出现在 B 中一次；若有一个 3-子集轨道代表元同时包含在 A,B 中，则

$$\left|A\cap(B+l)\right|\geq 3。$$

令 $\mathcal{B}$ 是 $I_n\times Z_m$ 中 4 元组的集合，对于 $B\in\mathcal{B}$，若 $\mathcal{B}$ 满足以下两个条件：

1″) 自相关性：$\lambda_a=\max\{\lambda(B):B\in\mathcal{B}\}$，

2″) 互相关性：B 包含的 3-子集轨道代表元只出现在 B 中一次，

则 $\mathcal{B}$ 构成一个 $2-D\left(n\times m,4,1,2\right)-OOC$。

3. $2-D\left(n\times m,4,1,2\right)$ 的最大容量

在 $2-D\left(n\times m,4,1,2\right)-OOC$ 中，令 $x,y,z,w\in I_n$，$a,b,c\in Z_m$ 对于任意 $B\in\mathcal{B}$，B 是轨道 $O(B)$ 的代表

元，因此可将 B 表示为 $\{(x,0),(y,a),(z,b),(w,c)\}$ 的形式，因此根据码字的第一坐标可以分为五种类型：

类型 1：$x=y=z=w$，$B_1=\{(x,0),(x,a),(x,b),(x,c)\}$，其中 $a\neq b\neq c\in Z_m\setminus\{0\}$；

类型 2：$x=y=z\neq w$，$B_2=\{(x,0),(x,a),(x,b),(w,c)\}$，其中 $a\neq b\in Z_m\setminus\{0\},c\in Z_m$；

类型 3：$x=y\neq z=w$，$B_3=\{(x,0),(x,a),(z,b),(z,c)\}$，其中 $a\in Z_m\setminus\{0\},b\neq c\in Z_m$；

类型 4：$x=y\neq z\neq w$，$B_4=\{(x,0),(x,a),(z,b),(w,c)\}$，其中 $a\in Z_m\setminus\{0\},b,c\in Z_m$；

类型 5：$x\neq y\neq z\neq w$，$B_5=\{(x,0),(y,a),(z,b),(w,c)\}$，其中 $a,b,c\in Z_m$。

引理 3.1 [10]令 B 是 Z_m 的任意 4-子集轨道代表元且 $\lambda(B)\leq 3$。B 包含 3 个不同的 3-子集轨道代表元当且仅当 B 形如 $\{0,a,2a,3a\}$，其中 $a\in Z_m$ 且 $a\neq\frac{m}{5},\frac{2m}{5}$；$B$ 包含 2 个不同的 3-子集轨道代表元当且仅当 B 形如 $\{0,a,2a,3a\}$,其中 $a\in\left\{\frac{m}{5},\frac{2m}{5}\right\}$；其余形式的 B 均包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

引理 3.2 令 B 是 Z_m 的任意 4-子集轨道代表元且 $\lambda(B)\leq 1$，B 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

证明：根据引理 3.1 可知，若 B 是形如 $\{0,a,2a,3a\}$，$\lambda(B)\geq 2$，所以，当 $\lambda(B)\leq 1$ 时，B 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

引理 3.3 设 $\mathcal{B}$ 是 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码，任意 $B\in\mathcal{B}$，B 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

证明：下面将根据码字的不同类型分类讨论 B 包含的 3-子集轨道代表元。

若 $B_1=\{(x,0),(x,a),(x,b),(x,c)\}\in\mathcal{B}$，对于任意 $x\in I_n$，$2-D(\{x\}\times m,4,1,2)-OOC$，即为 $1-D(m,4,1,2)-OOC$。考虑 B_1 的派生集 $X=\{0,a,b,c\}$，根据引理 3.2，可得 B_1 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

若 $B_2=\{(x,0),(x,a),(x,b),(w,c)\}\in\mathcal{B}$，$B_2$ 包含的 4 个 3-子集轨道代表元为 $B_{21}=\{(x,0),(x,a),(x,b)\}$，$B_{22}=\{(x,0),(x,a),(w,c)\}$，$B_{23}=\{(x,0),(x,b),(w,c)\}$，$B_{24}=\{(x,a),(x,b),(w,c)\}$。根据第一坐标，$B_{21}$ 与 B_{22},B_{23},B_{24} 不在同一轨道；由于 $\lambda(B_2)=1$ 当且仅当 $|supp(\Delta(B_2))|=6$ 所以 $\Delta_{xx}(B_2)=\{\pm a,\pm b,\pm(b-a)\}$ 中元素互不相等，则 $\Delta_{xx}(B_{22})=\{\pm a\},\Delta_{xx}(B_{23})=\{\pm b\},\Delta_{xx}(B_{24})=\{\pm(b-a)\}$ 三者互不相等。于是 B_2 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

若 $B_3=\{(x,0),(x,a),(z,b),(z,c)\}\in\mathcal{B}$，$B_3$ 包含的 4 个 3-子集轨道代表元为 $B_{31}=\{(x,0),(x,a),(z,b)\}$，$B_{32}=\{(x,0),(x,a),(z,c)\}$，$B_{33}=\{(x,0),(z,b),(z,c)\}$ 和 $B_{34}=\{(x,a),(z,b),(z,c)\}$。根据第一坐标，只有 B_{31} 与 B_{32} 或 B_{33} 与 B_{34} 可能在同一轨道。若 B_{31} 和 B_{32} 在同一轨道，则 $B_{31}+l=B_{32},l\in Z_m\setminus\{0\}$ 可得 $l=a=\frac{m}{2}$，又因为 $\lambda(B_3)=1$，所以 $a\neq\frac{m}{2}$，产生矛盾，则 B_{31} 与 B_{32} 不在同一轨道。同理可得 B_{33} 与 B_{34} 不在同一轨道。于是 B_3 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

若 $B_4=\{(x,0),(x,a),(z,b),(w,c)\}\in\mathcal{B}$，$B_4$ 包含的 4 个 3-子集轨道代表元为 $B_{41}=\{(x,0),(x,a),(z,b)\}$，$B_{42}=\{(x,0),(x,a),(w,c)\}$，$B_{43}=\{(x,0),(z,b),(w,c)\}$，$B_{44}=\{(x,a),(z,b),(w,c)\}$。根据第一坐标，只有 B_{43} 与 B_{44} 可能在同一轨道；若 B_{43} 和 B_{44} 在同一轨道，则 $a\equiv 0(\bmod m)$ 而 $a\in Z_m\setminus\{0\}$，产生矛盾，所以 B_{43} 与 B_{44} 不在同一轨道。于是 B_4 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

若 $B_5=\{(x,0),(y,a),(z,b),(w,c)\}\in\mathcal{B}$，$B_5$ 包含的 4 个 3-子集轨道代表元为 $B_{51}=\{(x,0),(y,a),(z,b)\}$，$B_{52}=\{(x,0),(y,a),(w,c)\}$，$B_{53}=\{(x,0),(z,b),(w,c)\}$，$B_{54}=\{(y,a),(z,b),(w,c)\}$。根据第一坐标，可得 $B_{51},B_{52},B_{53},B_{54}$ 不在同一轨道。于是 B_5 包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

综上所述，$(n\times m,4,1,2)$ 光正交码的每个码字都包含 4 个不同的 3-子集轨道代表元。

在文献[4]中定理 1 给出了，$2-D(n\times m,3,1,2)-OOC$ 的上界；

引理 3.4 [4]设 n 和 m 是正整数，则 $2-D(n\times m,3,1,2)-OOC$ 的上界

$$\Phi(n\times m,3,1,2)=\begin{cases}\dfrac{n\left(n^2m^2-3nm-3m+5\right)}{6}, & (m,12)=1,\\ \dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+14\right)}{6}, & (m,12)=2,\\ \dfrac{n\left(n^2m^2-3nm-3m+9\right)}{6}, & (m,12)=3,\\ \dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+20\right)}{6}, & (m,12)=4,\\ \dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+18\right)}{6}, & (m,12)=6,\\ \dfrac{n\left(n^2m^2-6nm-3m+24\right)}{6}, & (m,12)=12.\end{cases}$$

下面证明定理 1.1

证明：设 $\mathcal{B}$ 是 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码，$A,B\in\mathcal{B},A\neq B,l\in Z_m$。根据定义，$\left|B\cap(B+l)\right|\leq 1$，$\left|A\cap(B+l)\right|\leq 2$。令 A',B' 分别是 A,B 的一个 3-子集轨道代表元，所以可得 $\left|B'\cap(B'+l)\right|\leq 1$，$\left|A'\cap(B'+l)\right|\leq 2$。于是 $\mathcal{B}$ 中码字的 3-子集轨道代表元属于 $2-D(n\times m,3,1,2)-OOC$，再根据引理 3.3，引理 3.4，可得

$$4\Phi(n\times m,4,1,2)\leq\Phi(n\times m,3,1,2),$$

经进一步计算得定理 1.1 结果成立。通过附录中部分 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码的码字最大容量和表 1 的对比结果，可以更好的验证定理 1.1 的正确性。

Table 1. Partial comparison results
表 1. 部分对比结果

n 的取值	m 的取值	$M(n\times m,4,1,2)$	$\Phi(n\times m,4,1,2)$
2	5	5	4
2	6	6	4
3	3	6	5
3	4	10	8
4	2	4	4
5	2	10	8

4. 结论

本文根据每个码字中包含的 3-子集轨道代表元的个数确定了 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码的最大容量 $\Phi(n\times m,4,1,2)$，但并不是每个属于 $(n\times m,3,1,2)$ 光正交码的码字都能构成 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码中满足自相关的码字，也不是 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码中满足自相关的码字构成最大容量的码字时每个属于 $(n\times m,3,1,2)$ 光正交码的码字都能出现一次；所以，定理 1.1 中 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码的最大容量

$\Phi(n\times m,4,1,2)$ 不够紧密，下一步为确定 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码精确的码字容量的上界，就要寻找 $(n\times m,3,1,2)$ 光正交码的码字和 $(n\times m,4,1,2)$ 光正交码的码字间更紧密的关系。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11401326)；内蒙古教育厅项目(NJZY22599, NJZY22600)；内蒙古师范大学研究生科研创新基金项目(CXJJS21122)。

参考文献

[1] Chung, F.R.K., Salehi, J.A. and Wei, V.K. (1989) Optical Orthogonal Codes: Design, Analysis and Applications. *IEEE Transactions on Information Theory*, **35**, 595-604. https://doi.org/10.1109/18.30982

[2] 黄月梅, 周君灵. 一类权重为 4 的二维光正交码[J]. 北京交通大学学报, 2012, 36(6): 144-146+149.

[3] Huang, Y.M. and Chang, Y.X. (2013) Maximum Two-Dimensional (u × v, 4,1,3). *Applied Mathematics*: *A Journal of Chinese Universities* (*Series B*), **28**, 279-289. https://doi.org/10.1007/s11766-013-3064-3

[4] 黄月梅, 张桂芝. 两类权重为 3 的二维光正交码的容量及构造[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 174-181.

[5] 董百卉. 一类最优二维光正交码[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2015.

[6] Wang, X.M., Chang, Y.X. and Feng, T. (2013) Optimal 2-D (n × m, 3,2,1)-Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **59**, 710-725. https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2214025

[7] Feng, T., Wang, L.D., Wang, X.M., *et al.* (2017) Optimal Two-Dimensional Optical Orthogonal Codes with the Best Cross-Correlation Constraint. *Journal of Combinatorial Designs*, **25**, 349-380. https://doi.org/10.1002/jcd.21554

[8] Feng, T., Wang, L.D. and Wang, X.M. (2019) Optimal 2-D (n × m, 3,2,1)-Optical Orthogonal Codes and Related Equi-Difference Conflict Avoiding Codes. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **87**, 1499-1520. https://doi.org/10.1007/s10623-018-0549-3

[9] Feng, T. and Chang, Y.X. (2011) Combinatorial Constructions for Optimal Two-Dimensional Optical Orthogonal Codes with $\lambda = 2$. *IEEE Transactions on Information Theory*, **57**, 6796-6819. https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2165805

[10] Wang, L.D. and Chang, Y.X. (2014) Bounds and Constructions on (v,4,3,2) Optical Orthogonal Codes. *Journal of Combinatorial Designs*, **22**, 453-472. https://doi.org/10.1002/jcd.21362

附　录

n=2, m=5

{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2)}, {(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 4)}, {(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 1)}, {(0, 0), (0, 2), (1, 3), (1, 4)}.

n = 2, m = 6

{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2)}, {(0, 0), (0 ,1), (1, 3), (1, 5)}, {(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 1)}, {(0, 0), (0, 2), (1, 3), (1, 4)}.

n = 3, m = 3

{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)}, {(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2)}, {(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 2)}, {(0, 0), (1, 0), (1, 2), (2, 1)}, {(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0)}.

n = 3, m = 4

{(0, 0), (0, 1), (1 ,0), (2, 0)}, {(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)}, {(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)}, {(0, 0), (0, 1), (1, 3), (2, 3)},

{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 3)}, {(0, 0), (1, 0), (1, 3), (2, 2)}, {(0, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 3)}, {(0, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 1)}.

n = 4, m = 2

{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)}, {(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1)}, {(0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1)}, {(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 0)}.

n = 5, m = 2

{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)}, {(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1)}, {(0, 0), (1, 1), (2, 0), (4, 0)}, {(0, 0), (1, 1), (3, 0), (4, 1)} {(0, 0), (2, 0), (3, 1), (4, 1)}, {(0, 0), (2, 1), (3, 0), (4, 0)}, {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (4 ,0)}, {(1, 0), (2, 1), (3, 0), (4, 1)}.