

非线性奇异系统的相关问题研究

彭思瑶

浙江师范大学, 浙江 金华

收稿日期: 2022 年 4 月 22 日; 录用日期: 2022 年 5 月 24 日; 发布日期: 2022 年 5 月 31 日

摘要

奇异系统, 也称为描述系统, 广义状态空间系统, 隐式系统, 微分代数系统或半状态系统。它在电力系统, 经济系统, 及电子网络等领域有着广泛的应用, 很多问题都可以以奇异系统作为背景进行研究。奇异系统的理论研究经过几十年的发展, 已经取得了一些令人瞩目的成果, 并且应用也十分广泛, 譬如在电气, 机械系统, 无损传输线, 柔性臂控制机器人等实际系统中都有广泛应用。本文主要运用平均脉冲间隔和线性矩阵不等式的方法讨论非线性奇异脉冲切换系统的指数稳定性与 L_2 -增益。

关键词

非线性奇异脉冲系统, L_2 -增益, 线性矩阵不等式, 非线性混合奇异脉冲切换系统

Research on Some Related Problems of Nonlinear Singular Systems

Siyao Peng

Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 22nd, 2022; accepted: May 24th, 2022; published: May 31st, 2022

Abstract

Singular systems, also known as description systems, generalized state space systems,

implicit systems, differential algebraic systems or semistate systems. It has a wide range of applications in power systems, economic systems, and electronic networks. Singular systems can be studied in the background. The theoretical study of singular systems has been developed for several decades. Some remarkable results have been obtained, and the application is also very wide, such as in electrical, mechanical systems, lossless transmission line, flexible arm control robot and other practical systems. In this paper, the sum of average pulse intervals is mainly used. The exponential stability and L_2 -gain of nonlinear singular impulsive switched systems are discussed using linear matrix inequality (LMI) method.

Keywords

Nonlinear Singular Impulse System, L_2 -Gain, LMI, Nonlinear Mixed Singular Impulse Switched System

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1974 年奇异系统 [1] 第一次出现在大众视野中, 之后奇异系统受到了研究者的广泛关注, 并且在 1989 年第一本关于奇异系统理论的专著 [2] 也相继问世。奇异系统, 也称为描述系统, 广义状态空间系统, 隐式系统, 它广泛应用在实际系统中, 比如: 化工, 冶金, 炼油, 航空航天, 机械制造等。奇异系统不仅涉及静态方程, 还涉及动态方程, 奇异系统也可能会存在脉冲效应, 因此我们不能总是保证奇异系统解的存在唯一性。所以当我们研究奇异系统时, 我们还要考虑它的稳定性条件, 系统的正则性以及有无脉冲效应。奇异系统还能够准确地描述物理系统, 因此, 奇异系统的稳定性分析在理论上和实践上都具有重要意义。实践中, 许多重要和有趣的结果已经在文献中提出。比如文献 [3] 研究了具有稳定和不稳定子系统的切换奇异系统的稳定性的充分条件。文献 [4] 针对单输入单输出 (SISO) 切换非严格反馈非线性系统, 提出了一种具有给定性能的输出反馈控制方法。文献 [5] 研究了一类不确定奇异 Markovian 跳跃时滞系统的时滞相关鲁棒指数稳定性问题。奇异系统的 H_∞ 控制问题也受到了许多专家学者的关注, 许多文献对其进行了广泛的研究, 如文献 [6] 提出了一种新的奇异系统无记忆 H_∞ 控制器设计方法。

另外, L_2 增益问题越来越受到众多学者的关注, 作为一种系统性能的衡量, L_2 增益是控制系统的重要输入输出属性, 反映了扰动输入对受控输出的影响。 L_2 增益被广泛应用于控制和信号处

理上。文献 [7] 研究了切换系统的 L_2 增益和 H_∞ 控制问题。在文献 [8] 用 ADT 方法讨论了具有时间变化延迟的切换系统的稳定性和 L_2 增益问题。在文献 [9] 中对受时间变化的传输间隔, 时变传输延迟和通信限制的联网控制系统进行了指数稳定性和诱导 L_2 增益调查。在文献 [10] 中, 对非线性系统指数稳定和 L_2 增益问题做了系统的阐述。许多文献致力于切换系统的 L_2 增益问题这一块的研究, 见文献 [11–13], 文献 [11] 研究了一类具有平均驻留时间 (ADT) 切换的离散时间切换系统的稳定性和 L_2 问题, 文献 [12] 对不稳定模式的切换系统进行了稳定性和增益分析, 文献 [13] 研究了具有快速变化系数的分段连续线性摄动系统的 L_2 增益。但是有关于切换奇异系统的 L_2 增益问题的研究还比较少。

此外, 现有的大部分文章考虑的奇异系统都是线性的 [14–16], 不可避免的是, 现实生活中的物理系统并不完全是线性的, 例如, 当我们考虑电力系统, 生物系统或机械系统时, 它们常表现出强烈的非线性动态。因此, 当我们想要分析或控制这些系统时, 线性奇异系统模型已经不能满足需求, 因此非线性奇异系统慢慢成为近年来研究的热点 [17–19]。如文献 [17] 给出了一类具有任意开关信号的连续时间非线性互联奇异系统的稳定性分析方法, 文献 [18] 研究了一类不确定时滞切换非线性奇异系统的 H_∞ 控制问题。文献 [19] 研究了时滞时变状态切换非线性奇异系统的指数稳定性问题。

近年来脉冲作为一种有效的控制方法, 已广泛应用于卫星轨道转移、药代动力学中的剂量供应、生态系统管理等领域见 [20–22], 脉冲微分系统的基本理论在过去的几年中得到了广泛的研究, 见 [23–25], 它的必要性和重要性在于, 在很多情况下, 一个真实的系统在某些时刻可能会遇到一些突变, 不能连续考虑。脉冲控制的主要思想是在某一时刻瞬间改变状态。因此, 脉冲控制可以大大降低控制成本和传输的信息量。

我们都知道在 [26] 中首次引入了平均脉冲间隔 (AII) 的概念, 它适合于描述较宽的范围的脉冲信号。许多文献 [27–31] 用平均脉冲间隔 (AII) 的方法分析系统的稳定性, 文献 [27] 用模式相关平均停留时间法研究了具有泄漏延迟和时变延迟的耦合开关神经网络的同步问题, 文献 [28] 利用平均脉冲区间法和李雅普诺夫函数法研究一般时滞混合随机泛函微分系统的指数稳定性。所以我们可以想到用平均脉冲间隔的方法来分析奇异脉冲切换系统, 有关此类文献见 [32–36]。本文的主要内容如下:

首先我们介绍了本文的研究背景和预备知识, 包括指数稳定性的概念, Schur 补引理以及柯西矩阵不等式等下文中需要用到相关引理与概念。最后结合具体实例论证了定理结果的可行性。

本文的主要贡献在于: 构造出来一种李雅普诺夫函数来证明非线性奇异系统的指数稳定性并且探讨了 L_2 增益的问题; 本文运用了平均脉冲区间的方法来证明系统的指数稳定性, 并且结合 LMI 的方法来探讨了 L_2 增益的问题。

2. 相关理论概述

定义 1 给定任意初值 $x(t_0)$, 在某些特定的切换信号下 $\sigma(t)$ 下, 假如存在 $\alpha > 0, \beta > 0$ 使得系统的解 $\|x(t)\| \leq \alpha \exp(-\beta(t-t_0)) \|x(t_0)\|, \forall t \geq t_0$, 则称系统的平衡点 $x=0$ 是全局一致指数稳定的。

引理 1 (Schur 补引理) 考虑如下 2 阶分块矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $S_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m} (m < n)$, 则以下 3 个命题是等价的:

- 1) $S < 0$.
- 2) $S_{11} < 0, \quad S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$.
- 3) $S_{22} < 0, \quad S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理 2 (柯西矩阵不等式) 对于任意的正定矩阵 $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 我们有

$$2y^T x \leq x^T N x + y^T N^{-1} y, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

引理 3 (Feng *et al.* [34]) 以下是等价的:

- 1) $\mathbb{A} = \{P \in \mathbb{R}^{n \times n} : E^T P^T = P E \geq 0, P \text{ 是非奇异的}\}$,
- 2) $\mathbb{B} = \{P^T = \Gamma E + U^T \Phi \Upsilon^T : \Gamma = \Gamma^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, E_L^T \Gamma E_L > 0, P \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)} \text{ 是非奇异的}\}$, 这里 $E_R, E_L, U^T \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ 且 $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$.

假设 1 ([37]) 对 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ 非线性函数 $f(\cdot), g(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件:

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| \leq u_1 \|z_1 - z_2\|, \|g(z_1) - g(z_2)\| \leq u_2 \|z_1 - z_2\|, u_1, u_2 > 0 \text{ 为 Lipschitz 常数.}$$

假设 2 ([38]) $f_i(t, x(t))$ 是非线性函数满足:

$$f_i(t, x(t))^T f_i(t, x(t)) \leq x^T(t) Q_i^T Q_i x(t), \text{ 其中 } Q_i \text{ 是已知的常数矩阵.}$$

3. 问题描述和预备知识

考虑如下非线性奇异脉冲切换系统, 其微分表述如下:

$$\begin{cases} E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + H_{\sigma(t)} f_{\sigma(t)}(t, x(t)) + C_{\sigma(t)} \omega(t), t \neq t_k \\ \Delta x(t) = \phi_k x(t), \quad t = t_k \\ z(t) = D_{\sigma(t)} x(t) + F_{\sigma(t)} \omega(t) \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n, w(t) \in \mathbb{R}^q, z(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别为状态变量, 干扰输入和控制输出变量。 $E_{\sigma(t)}, A_{\sigma(t)}, B_{\sigma(t)}, C_{\sigma(t)}, H_{\sigma(t)}, \phi_k$ 分别是合适维数的常数矩阵。 $E_{\sigma(t)}$ 是奇异矩阵且满足 $\det(sE_{\sigma(t)} - A_{\sigma(t)}) \neq 0$ 并且 $\text{rank}(E_{\sigma(t)}) = r < n$, $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$, 并且 $x(t_k) = x(t_k^-)$, 说明奇异切换系统 (2.1) 是左连续的, 函数 $\sigma(t) : [t_0, +\infty) \rightarrow Q = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示切换信号. 我们记 $\sigma(t) = i (i \in Q)$, 表示当 $t \in [t_{k-1}, t_k)$ 时, $k \in N$, 第 i 个子系统被激活, 序列 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 叫做脉冲切换序列, 记为 $\zeta = \{t_1, t_2, \dots\}$. 当 $t = t_k$ 时系统 (2.1) 耦合着脉冲效应从 $\sigma(t_{k-1})$ 子系统切换到 $\sigma(t_k)$ 子系统. 也就是说, 切换和脉冲同步发生在 t_k 时刻. 下面为了方便我们假设初始时刻没有发生切换和脉冲.

下面给出需要用到的一些基本概念。

- 定义 2** ([39]) 对于每一个 $i \in Q$, 奇异系统 (E_i, A_i) 是
- 1) 正则的, 如果 $\det(sE_i - A_i)$ 不等于 0;
 - 2) 无脉冲的, 如果 $\deg(\det(sE_i - A_i)) = \text{rank}(E_i)$ 。

定义 3 ([40]) 系统 (2.1) 被称为有加权的 L_2 增益 γ , 假如在零初始条件下 $x(t_0^+) = 0$, 不等式

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha t) \|z(t)\|^2 dt \leq \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt \tag{3.2}$$

在特定的切换法则 $\sigma(t)$ 和常数 $\alpha > 0$ 下成立, 系统 (2.1) 被称作有普通的 L_2 增益 γ , 当 $\alpha = 0$ 时。

注 1 在定义 2.1.2 中, L_2 增益表征了系统对外部干扰的抑制。 γ 的值越小, 则系统性能较好。

注 2 可以观察到, 如果系统 (2.1) 有 L_2 增益那么它必须有一个加权 L_2 增益。然而, 逆命题不是真的。

定义 4 ([26]) 平均脉冲间隔 (AII): 脉冲序列 $\xi = \{t_1, t_2, \dots\}$ 的平均脉冲间隔等于 T_a 假如存在正整数 N_0 和正数 T_a , 使得

$$\frac{(T-t)}{T_a} - N_0 \leq N_\xi(T, t) \leq \frac{(T-t)}{T_a} + N_0, \forall T \geq t \geq 0 \tag{3.3}$$

这里 $N_\xi(T, t)$ 代表区间 (t, T) 上的脉冲次数。

注 3 很多文献得到的稳定性结果中, 对脉冲区间的上界和下界可能会有严格的要求, 平均脉冲间隔的出现放宽了这种限制, 它是解决非同步脉冲问题的一个很有用的工具。从图 1, 我们可以观察到其中的脉冲序列是不均匀的, 脉冲间隔的上下界区别可以很大也可以很小。所以, 平均脉冲间隔的概念适用于很大范围的脉冲信号。

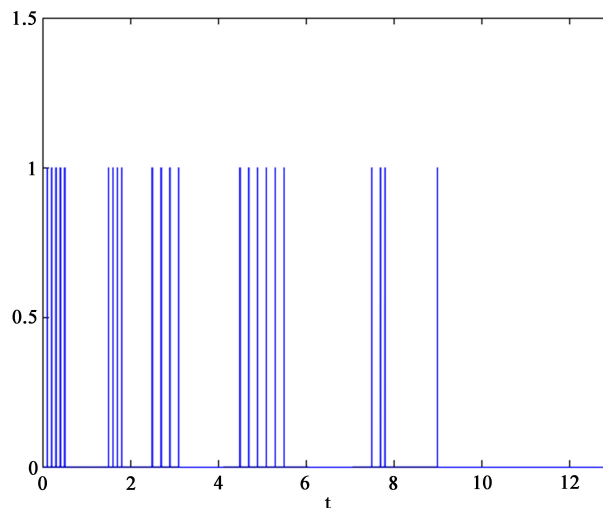


Figure 1. Average impulsive interval

图 1. 平均脉冲区间

假设 3 ([41]) 对每一个 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 奇异系统 (E_i, A_i) 是正则的和无脉冲的。

4. 非线性奇异脉冲切换系统的指数稳定性

在这一部分, 我们将给出系统 (3.1) 关于稳定性的主要结果, 并且用平均脉冲区间的概念对系统 (3.1) 进行 L_2 增益分析, 此时考虑的是系统在 $w = 0$ 下指数稳定性的充分条件。

定理 2.1 假设切换奇异系统 (3.1) 满足假设 1, 2, 3, 并且存在正定矩阵 P 满足 $E_i^\top P_i E_i \geq 0$, Q_1 是合适维数矩阵, 常数 $\gamma_0 > 0, \beta > 0, \alpha, \alpha_i, \beta, \gamma \in R$ 并且对所有的 $i, j \in Q$ 使得下面不等式成立:

$$(I + \phi_k)^\top E_j^\top P_j E_j (I + \phi_k) \leq \beta E_i^\top P_i E_i \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} E_i^\top P_i A_i + A_i^\top P_i E_i + Q_1^\top Q_1 - \alpha_i E_i^\top P_i E_i & E_i^\top P_i H_i \\ H_i^\top P_i E_i & -I \end{pmatrix} \leq 0, \quad (4.2)$$

$$\gamma_0 = \alpha - \frac{\ln \beta}{T_\alpha} > 0, \quad (4.3)$$

这里 $\beta_k \geq \frac{[\lambda_{\max}(I + \phi_k)]^2 [\lambda_{\max}(E_j^\top P_j E_j)]}{[\lambda_{\min}(E_i^\top P_i E_i)]}$, $\beta = \max(\beta_k)$, 并且 α 满足 $\int_{t_0}^t -\alpha_{\sigma(s)} ds \leq -\alpha(t - t_0)$, 其中 $\alpha_{\sigma(t)} = \alpha_i, \sigma(t) = i$, 则称无干扰输入的系统 (3.1) 的零解是全局指数稳定的。

证明 选择如下的李雅普诺夫函数:

$$V_i = e^{-2\alpha_i t} x^\top(t) E_i^\top P_i E_i x(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_k), k \in Z_+,$$

沿着系统 (2.1) 的轨迹对李雅普诺夫函数求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) = & e^{-2\alpha_i t} [-2\alpha_i x^\top(t) E_i^\top P_i E_i x(t) + x^\top(t) A_i^\top P_i E_i x(t) + x^\top(t) E_i^\top P_i A_i x(t) \\ & + f_i^\top(t, x(t)) H_i^\top P_i E_i x(t) + x^\top(t) E_i^\top P_i H_i f_i(t, x(t))] \end{aligned}$$

因此, 我们有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) + \alpha_i V_i(t) & \leq e^{-2\alpha_i t} [x^\top(t) (E_i^\top P_i A_i + A_i^\top P_i E_i - \alpha_i E_i^\top P_i E_i) x(t) \\ & \quad + x^\top(t) E_i^\top P_i H_i f_i(t, x(t)) + f_i^\top(t, x(t)) H_i^\top P_i E_i x(t) \\ & \leq e^{-2\alpha_i t} [x^\top(t) (E_i^\top P_i A_i + A_i^\top P_i E_i + Q_1^\top Q_1 - \alpha_i E_i^\top P_i E_i) x(t) \\ & \quad + x^\top(t) E_i^\top P_i H_i f_i(t, x(t)) + f_i^\top(t, x(t)) H_i^\top P_i E_i x(t) \\ & \quad - f_i^\top(t, x(t)) f_i(t, x(t))] \\ & \leq e^{-2\alpha_i t} \xi^\top(t) \begin{pmatrix} E_i^\top P_i A_i + A_i^\top P_i E_i + Q_1^\top Q_1 - \alpha_i E_i^\top P_i E_i & E_i^\top P_i H_i \\ H_i^\top P_i E_i & -I \end{pmatrix} \xi(t) \\ & = e^{-2\alpha_i t} \xi^\top(t) \pi_i \xi(t) \end{aligned}$$

这里 $\xi(t) = [x^\top(t), f_i(t, x(t))]^\top$, $\pi_i = \begin{pmatrix} E_i^\top P_i A_i + A_i^\top P_i E_i + Q_1^\top Q_1 - \alpha_i E_i^\top P_i E_i & E_i^\top P_i H_i \\ H_i^\top P_i E_i & -I \end{pmatrix}$

由 (4.2) 可以得到:

$$\dot{V}(t) + \alpha_i V_i(t) \leq 0 \tag{4.4}$$

因此, 我们有:

$$V(t) \leq \exp(-\alpha_i(t - t_{k-1})) V(t_{k-1}^+) \tag{4.5}$$

当 $t = t_k$ 时

$$\begin{aligned} V(t_k^+) &= e^{-2\alpha_i t} [(I + \phi_k) x(t_k)]^T E_i^T P_i E_i (I + \phi_k) x(t_k) \\ &= e^{-2\alpha_i t} x^T(t_k) (I + \phi_k)^T E_i^T P_i E_i (I + \phi_k) x(t_k) \\ &= e^{-2\alpha_i t} \left\| (E_i^T P_i E_i)^{\frac{1}{2}} (I + \phi_k) x(t_k) \right\|^2 \\ &\leq e^{-2\alpha_i t} \|I + \phi_k\|^2 \left\| (E_i^T P_i E_i)^{\frac{1}{2}} x(t_k) \right\|^2 \\ &= e^{-2\alpha_i t} \|I + \phi_k\|^2 x^T(t_k) E_i^T P_i E_i x(t_k) \\ &\leq \beta_k V(t_k) \end{aligned} \tag{4.6}$$

从 (4.5) 和 (4.6) 可以得到

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \exp(-\alpha_i(t - t_{k-1})) \beta V(t_{k-1}) \\ &\leq \beta \exp(-\alpha_i(t - t_{k-1})) \beta \exp(-\alpha_{i-1}(t_{k-1} - t_{k-2})) V(t_{k-2}) \\ &\leq \beta^2 \exp(-\alpha_i(t - t_{k-1}) - \alpha_{i-1}(t_{k-1} - t_{k-2})) V(t_{k-2}) \\ &\dots \\ &\leq \beta^k \exp(-\alpha_i(t - t_{k-1}) - \alpha_{i-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) - \dots - \alpha_1(t_1 - t_0)) V(0) \end{aligned} \tag{4.7}$$

因为 $\int_{t_0}^t -\alpha_{\sigma(s)} ds \leq -\alpha(t - t_0)$, 我们可以得到:

$$V(t) \leq \exp(-\alpha t) \exp(N_\xi(t, 0) \ln \beta) V(0) \tag{4.8}$$

结合 (2.3), 我们可以得到

$$\frac{(t - 0)}{T_\alpha} - N_0 \leq N_\xi(t, 0) \leq \frac{(t - 0)}{T_\alpha} + N_0, \forall t \geq 0 \tag{4.9}$$

首先, 若 $\beta > 1$, 我们可以获得:

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \exp(-\alpha t) \exp\left(\left(\frac{t - 0}{T_\alpha} + N_0\right) \ln \beta\right) V(0) \\ &= \beta^{N_0} \exp\left(\left(-\alpha + \frac{\ln \beta}{T_\alpha}\right) t\right) V(0) \\ &= \beta^{N_0} \exp(-\gamma_0 t) V(0) \end{aligned} \tag{4.10}$$

其次, 当 $\beta = 1, \beta^{N_0} = 1$, 我们有

$$V(t) \leq 1 \cdot \exp(-\alpha t) V(0) \tag{4.11}$$

最后, 若 $0 < \beta < 1$, 同样地, 我们会得到

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \exp(-\alpha t) \exp\left(\left(\frac{t-0}{T_\alpha} - N_0\right) \ln \beta\right) V(0) \\ &= \beta^{-N_0} \exp\left(\left(-\alpha + \frac{\ln \beta}{T_\alpha}\right) t\right) V(0) \\ &= \beta^{-N_0} \exp(-\gamma_0 t) V(0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

若 $\theta = \max\{\beta^{N_0}, 1, \beta^{-N_0}\}$, 对任意的 $\beta > 0$, 易得 $V(t) \leq \theta \exp(-\gamma_0 t) V(0)$, 则无干扰输入的系统 (3.1) 在平均脉冲间隔切换下是指数稳定的。

注 2.4 在文献 [40] 中, 我们需要满足脉冲区间 $t_k - t_{k-1}$ 有关上界和下界的条件, 在这里我们用到了平均脉冲区间的条件, 使定理的保守性更弱。

注 2.5 在文献 [42] 中, 作者研究的是线性奇异脉冲切换系统的指数稳定性问题, 本文中, 在平均脉冲间隔的条件下我们得到了非线性奇异脉冲切换系统的指数稳定性问题, 我们通过构造适合的 Lyapunov 函数并采 AII 的方法, 得出了基于 LMI 的充分条件以保证所研究非线性奇异脉冲系统的指数稳定性。

注 2.6 本文中构造的 Lyapunov 函数与文献 [42] 中的函数有所不同, 这里构造的 Lyapunov 函数为了更好地证明非线性奇异脉冲切换系统的指数稳定性与 L_2 增益问题。

注 2.7 与文献 [43] 相比较, 此处研究的指数稳定性的方法主要是用到了文献 [42] 中平均脉冲区间的方法, 并且这里的李雅普诺夫函数也与文献 [43] 有所不同, 并且定理 2.1 里面要求是存在正定矩阵 P 满足 $E_i^\top P_i E_i \geq 0$ 。

5. 非线性奇异脉冲切换系统的 L_2 增益

我们现在研究非线性奇异切换脉冲系统的 L_2 增益条件, 并且用平均脉冲区间的概念对系统 (3.1) 进行 L_2 增益分析。

定理 2.2 若切换奇异脉冲系统 (2.1) 满足假设 1, 2, 3, 假设存在正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 满足 $E_i^\top P_i E_i \geq 0$, Q_1 是合适维数矩阵, 常数 $\gamma_0 > 0, \beta > 0, \alpha, \alpha_i, \beta, \gamma \in R$ 那么切换奇异脉冲系统 (2.1) 在满足 (2.3) 的平均脉冲间隔下是指数稳定的, 且具有 L_2 增益

$\gamma = \max\{\gamma_1 \exp(-N_0 \ln \beta), \gamma_1 \exp(N_0 \ln \beta)\}$, 使得对 $\forall i, j \in Q$, 下面的不等式成立:

$$(I + \phi_k)^\top E_j^\top P_j E_j (I + \phi_k) \leq \beta E_i^\top P_i E_i \quad (5.1)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi & e^{-2\alpha_i t} E_i^\top P_i H_i & e^{-2\alpha_i t} E_i^\top P_i C_i + D_i^\top F_i \\ e^{-2\alpha_i t} H_i^\top P_i E_i & -e^{-2\alpha_i t} I & 0 \\ e^{-2\alpha_i t} C_i^\top P_i E_i + F_i^\top D_i & 0 & F_i^\top F_i - \gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (5.2)$$

$$\gamma_0 = \alpha - \frac{\ln \beta}{T_\alpha} > 0, \quad (5.3)$$

这里 $\varphi = e^{-2\alpha_i t} E_i^\top P_i A_i + e^{-2\alpha_i t} A_i^\top P_i E_i + D_i^\top D_i + e^{-2\alpha_i t} Q_1^\top Q_1 - e^{-2\alpha_i t} \alpha_i E_i^\top P_i E_i$,

$$\gamma_1 = \lambda_{\max} \{E_i^T P_i E_i\}, \alpha < \alpha_i.$$

证明 选择如下的李雅普诺夫函数:

$$V_i = e^{-2\alpha_i t} x^T(t) E_i^T P_i E_i x(t)$$

沿着系统 (2.1) 的轨迹对 $V(t)$ 进行求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + \alpha_i V_i(t) &\leq e^{-2\alpha_i t} [x^T(t) (E_i^T P_i A_i + A_i^T P_i E_i - \alpha_i E_i^T P_i E_i) x(t) \\ &\quad + x^T(t) E_i^T P_i H_i f_i(t, x(t)) + f_i^T(t, x(t)) H_i^T P_i E_i x(t) \\ &\quad + x^T(t) E_i^T P_i C_i w(t) + w^T(t) C_i^T P_i E_i x(t)] \\ &\leq e^{-2\alpha_i t} [x^T(t) (E_i^T P_i A_i + A_i^T P_i E_i + Q_1^T Q_1 - \alpha_i E_i^T P_i E_i) x(t) \\ &\quad + x^T(t) E_i^T P_i H_i f_i(t, x(t)) + f_i^T(t, x(t)) H_i^T P_i E_i x(t) \\ &\quad - f_i^T(t, x(t)) f_i(t, x(t)) + x^T(t) E_i^T P_i C_i w(t) + w^T(t) C_i^T P_i E_i x(t)] \end{aligned}$$

结合 (5.2) 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) + \alpha_i V(t) &\leq -\eta^T(t) \begin{bmatrix} D_i^T D_i & 0 & D_i^T F_i \\ 0 & 0 & 0 \\ F_i^T D_i & 0 & F_i F_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} \eta(t) \\ &= \gamma^2 w^T(t) w(t) - z^T(t) z(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

这里 $\eta(t) = (x(t)^T, f_i^T(t), w(t)^T)^T$ 。

为了简便, 令 $\varphi(t) = \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2$

从 $t \in [t_{k-1}, t_k)$ 对式 (5.4) 进行积分, 我们可以得到:

$$V(t) \leq \exp(-\alpha(t - t_{k-1})) V(t_{k-1}^+) - \int_{t_{k-1}}^t \exp(-\alpha(t - s)) \varphi(s) ds.$$

根据 (5.4), 并且结合不等式, 我们可以获得

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \exp(-\alpha(t - t_{k-1})) \beta V(t_{k-1}) \\ &\quad - \int_{t_{k-1}}^t \exp(-\alpha(t - s)) \varphi(s) ds \\ &\leq \exp(\alpha(t - t_0)) \beta^{k-1} V(t_0^+) \\ &\quad - \sum_{i=k-1}^1 \beta^i \int_{t_{k-i-1}}^{t_{k-i}} \exp(-\alpha(t - s)) \varphi(s) ds \\ &\quad - \int_{t_{k-1}}^t \exp(-\alpha(t - s)) \varphi(s) ds \\ &= \exp(-\alpha(t - t_0) + N_\xi(t, t_0) \ln \beta) V(t_0^+) \\ &\quad - \int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t - s) + N_\xi(t, s) \ln \beta) \varphi(s) ds \end{aligned}$$

我们在初始条件 $x(t_0^+) = 0$ 下, 我们可以得到:

$$0 \leq - \int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-s) + N_\xi(t,s) \ln \beta) \varphi(s) ds \quad (5.5)$$

即

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-s) + N_\xi(t,s) \ln \beta) \|z(s)\|^2 ds \\ & \leq \gamma_1^2 \int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-s) + N_\xi(t,s) \ln \beta) \|w(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (5.6)$$

由定义 2.1.3, 我们可以得到:

$$\frac{(T-t)}{T_a} - N_0 \leq N_\xi(T,t) \leq \frac{(T-t)}{T_a} + N_0, \forall T \geq t \geq 0 \quad (5.7)$$

若 $\beta \geq 1$, 不等式 (5.7) 变成 $\left(\frac{t-s}{T_a} - N_0\right) \ln \beta \leq N_\xi(t,s) \ln \beta \leq \left(\frac{t-s}{T_a} + N_0\right) \ln \beta$, 这里我们假设 $\alpha_0 = \frac{\ln \beta}{T_a}$, 然后我们得到 $\alpha_0(t-s) - N_0 \ln \beta \leq N_\xi(t,s) \ln \beta \leq \alpha_0(t-s) + N_0 \ln \beta$. 由 (5.6), 我们可以获得

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \exp[(\alpha_0 - \alpha)(t-s) - N_0 \ln \beta] \|z(s)\|^2 ds \\ & \leq \gamma_1^2 \int_{t_0}^t \exp[(\alpha_0 - \alpha)(t-s) + N_0 \ln \beta] \|\omega(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (5.8)$$

接下来, 对 (5.8) 式从 t_0 到 $+\infty$ 求积分,

$$\frac{-1}{\alpha_0 - \alpha} \int_{t_0}^{+\infty} \exp(-N_0 \ln \beta) \|z(s)\|^2 ds \leq \frac{-1}{\alpha_0 - \alpha} \gamma_1^2 \int_{t_0}^{+\infty} \exp(N_0 \ln \beta) \|\omega(s)\|^2 ds \quad (5.9)$$

由 (2.7) 得 $\frac{-1}{\alpha_0 - \alpha} > 0$, 接下来我们可以得到

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|z(s)\|^2 ds \leq [\gamma_1 \exp(N_0 \ln \beta)]^2 \int_{t_0}^{+\infty} \|\omega(s)\|^2 ds \quad (5.10)$$

若 $0 < \beta < 1$, (5.7) 变成 $\left(\frac{t-s}{T_a} + N_0\right) \ln \beta \leq N_\xi(t,s) \ln \beta \leq \left(\frac{t-s}{T_a} - N_0\right) \ln \beta$. 然后我们可以得到 $\alpha_0(t-s) + N_0 \ln \beta \leq N_\xi(t,s) \ln \beta \leq \alpha_0(t-s) - N_0 \ln \beta$

由 (5.7) 得到

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \exp[(\alpha_0 - \alpha)(t-s) + N_0 \ln \beta] \|z(s)\|^2 ds \\ & \leq \gamma_1^2 \int_{t_0}^t \exp[(\alpha_0 - \alpha)(t-s) - N_0 \ln \beta] \|w(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (5.11)$$

类似的, 对 (5.11) 从 t_0 到 $+\infty$ 进行积分可以得到

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|z(s)\|^2 ds \leq [\gamma_1 \exp(-N_0 \ln \beta)]^2 \int_{t_0}^{+\infty} \|w(s)\|^2 ds$$

令 $\gamma = \max \{ \gamma_1 \exp(-N_0 \ln \beta), \gamma_1 \exp(N_0 \ln \beta) \}$, 在平均脉冲间隔 (3.3) 下, 对于任意的切换信号, 我们可以得到系统 (3.1) 的干扰衰减水平 γ , 定理证毕。

注 2.8 本文定理 2.2 主要研究了非线性奇异脉冲切换系统的 L_2 增益问题, 并且得到了具体的 L_2 增益的值。

6. 例子

例 1 考虑以下非线性奇异脉冲切换系统有给定的切换律和两个子系统:

$$\begin{cases} E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + H_{\sigma(t)} f_{\sigma(t)}(t, x(t)), t \neq t_k \\ \Delta x(t) = \phi_k x(t), t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ z(t) = D_{\sigma(t)} x(t) + F_{\sigma(t)} w(t) \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \quad (5.12)$$

这里 $x \in R^3, \sigma : N \rightarrow \{1, 2\}$, 切换律设为 $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \in [k-1, k) \\ 2, & t \in [k, k+1) \end{cases}$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

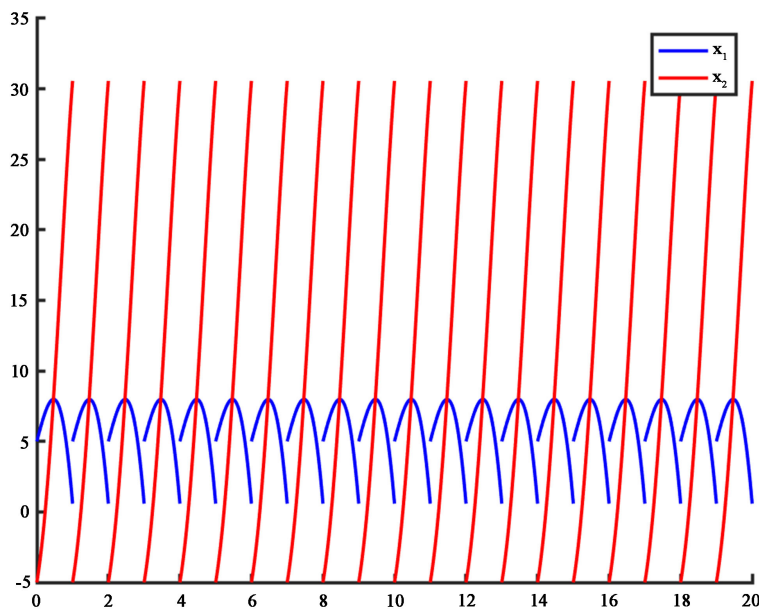


Figure 2. State trajectory diagram without impulse in Example 1

图 2. 例 1 中无脉冲的状态轨迹图

$$f_1(t, x(t)) = \begin{pmatrix} 0.2\sin(x_1(t)) \\ 0.2\sin(x_2(t)) \\ 0.2\sin(x_3(t)) \end{pmatrix}, f_2(t, x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_k = \begin{pmatrix} -0.18 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

首先我们考虑无脉冲的非线性奇异切换系统，即在切换点不存在脉冲效应，此时的非线性奇异切换系统是不稳定的，通过图 2 可以观察到系统的轨迹变化图。

这里我们选择 $\alpha_i = 0.9$ ，求解线性矩阵不等式 (4.2) 我们可以得到以下矩阵，

$$P_1 = \begin{pmatrix} 11.8262 & 2.1552 & -21.4997 \\ 2.1552 & 2.4065 & -1.9045 \\ -21.4997 & -1.9045 & 480.3693 \end{pmatrix}, E_1^\top P_1 E_1 = \begin{pmatrix} 11.8262 & 2.1552 & 0 \\ 2.1552 & 2.4065 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.0395 & -0.0304 & -0.2155 \\ -0.0304 & 0.5246 & 0.4662 \\ -0.2155 & 0.4662 & 2.1149 \end{pmatrix}, E_2^\top P_2 E_2 = \begin{pmatrix} 0.0395 & -0.0304 & 0 \\ -0.0304 & 0.5246 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

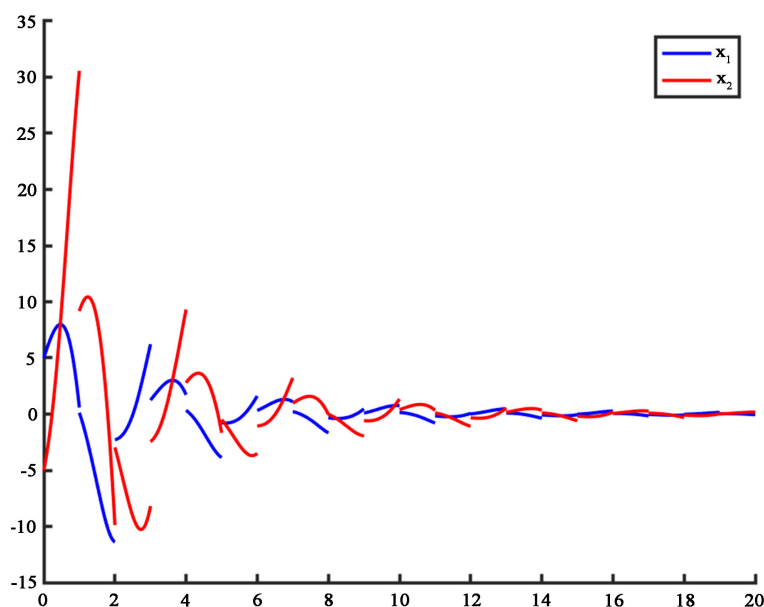


Figure 3. System state trajectory diagram for Example 1

图 3. 例 1 中的状态轨迹图

根据定理 1 我们可以得到 $\beta_k \geq \frac{[\lambda_{\max}(I+\phi_k)]^2 |\lambda_{\max}(E_j^\top P_j E_j)|}{|\lambda_{\min}(E_i^\top P_i E_i)|} = 0.179$, 且 $\beta = 0.82 < 1, \gamma_0 = 1.098 > 0$, 所以由定理 2.1 可知, 系统 (2.1) 是指数稳定的, 见图 3, 在文献 [44] 中, 没有考虑到脉冲效应, 在本例中我们考虑到了脉冲效应, 并且在脉冲序列 $\zeta = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 下, 系统 (3.1) 是指数稳定的。因为 $\lambda_{\max}(E_1^\top P_1 E_1) = 11.3174, \lambda_{\max}(E_2^\top P_2 E_2) = 0.5265$, 由定理 2.2, 可以计算出 $\gamma_1 = \lambda_{\max}\{E_i^\top P_i E_i\} = 11.3174, i, j \in 1, 2$, L_2 增益为 $\gamma = \max\{\gamma_1 \exp(-N_0 \ln \beta), \gamma_1 \exp(N_0 \ln \beta)\} = 14.14675$ 。

例 2 进一步考虑非线性奇异脉冲切换系统 (5.12) 有以下参数:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1(t, x(t)) = \begin{pmatrix} 0.2 \sin(x_1(t)) \\ 0.2 \sin(x_2(t)) \\ 0.2 \sin(x_3(t)) \end{pmatrix}, f_2(t, x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_k = \begin{pmatrix} 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

类似于上述的讨论, 这里我选择 $\alpha_i = 0.9$, 脉冲序列 $\xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, 经过计算可得 $\beta > 0.784, \beta = 1.2$, 由 (4.3) 计算得到 $\gamma_0 = 0.7176$, 由定理 2.1 可知, 即使系统存在干扰脉冲, 系统 (3.1) 依然是指数稳定的。如图 4 所示。

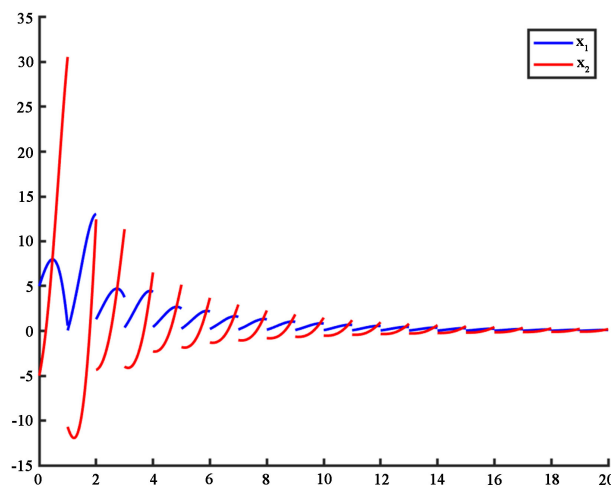


Figure 4. State trajectory diagram in Example 2

图 4. 例 2 中的状态轨迹图

7. 结论

本文主要通过平均脉冲区间的方法证明了非线性奇异系统的指数稳定性问题,并结合具体的例子证明了定理结论的可行性,本文结合 LMI 的方法探讨了 L_2 增益的问题,本文考虑的李雅普诺夫函数是为了更好地证明系统的指数稳定性的问题,在后面的证明过程中也发挥了作用。

致 谢

本文的研究工作得到了研究生同门硕士夏子聪与魏金飞的热情的支持与帮助,在此向他们表示真诚的谢意,没有他们的付出与帮助,我的论文研究就谈不上顺利完成,再次真心感谢和祝福他们。

参考文献

- [1] Rosenbrock, H.H. (1974) Structural Properties of Linear Dynamical Systems. *International Journal of Control*, **20**, 191-202. <https://doi.org/10.1080/00207177408932729>
- [2] Dai, L. (1989) Singular Control Systems. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [3] Xia, Y., Boukas, E.K., Shi, P., *et al.* (2009) Stability and Stabilization of Continuous-Time Singular Hybrid Systems. *Automatica*, **45**, 1504-1509. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.02.008>
- [4] Li, Y., Tong, S., Liu, L., *et al.* (2017) Adaptive Output-Feedback Control Design with Prescribed Performance for Switched Nonlinear Systems. *Automatica*, **80**, 225-231. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.02.005>
- [5] Wu, Z.-G., Su, H.-Y. and Chu, J. (2010) Robust Exponential Stability of Uncertain Singular Markovian Jump Time-Delay Systems. *Acta Automatica Sinica*, **36**, 558-563. <https://doi.org/10.3724/SP.J.1004.2010.00558>
- [6] Kim, J.H. (2005) New Design Method on Memoryless H_∞ Control for Singular Systems with Delayed State and Control Using LMI. *Journal of the Franklin Institute*, **342**, 321-327. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2004.11.006>
- [7] Zhao, J. and Hill, D.J. (2008) On Stability, H_∞ -Gain and H_∞ Control for Switched Systems. *Automatica*, **44**, 1220-1232. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.10.011>
- [8] Sun, X.M., Zhao, J. and Hill, D.J. (2006) Stability and H_∞ -Gain Analysis for Switched Delay Systems: A Delay-Dependent Method. *Automatica*, **42**, 1769-1774. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.05.007>
- [9] Liu, K., Fridman, E. and Hetel, L. (2012) Stability and H_∞ -Gain Analysis of Networked Control Systems under Round-Robin Scheduling: A Time-Delay Approach. *Systems Control Letters*, **61**, 666-675. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2012.03.002>

- [10] Liu, Y., Lu, J. and Wu, B. (2015) Stability and H_∞ -Gain Performance for Non-Linear Switched Impulsive Systems. *IET Control Theory Applications*, **9**, 300-307. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2014.0015>
- [11] Zhang, L. and Shi, P. (2009) Stability, H_∞ -Gain and Asynchronous H_∞ Control of Discrete-Time Switched Systems with Average Dwell Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54**, 2192-2199. <https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2026841>
- [12] Xiang, W. and Xiao, J. (2012) Discussion on “Stability, L_2 -Gain and Asynchronous H_∞ Control of Discrete-Time Switched Systems with Average Dwell Time” . *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 3259-3261. <https://doi.org/10.1109/TAC.2012.2200384>
- [13] Zhang, J. and Fridman, E. (2022) L_2 -Gain Analysis via Time-Delay Approach to Periodic Averaging with Stochastic Extension. *Automatica*, **137**, Article ID: 110126. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.110126>
- [14] Wang, Y.E., Zhao, J. and Jiang, B. (2013) Stabilization of a Class of Switched Linear Neutral Systems under Asynchronous Switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**, 2114-2119. <https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2250076>
- [15] Zhao, X., Zhang, L., Shi, P., *et al.* (2012) Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching. *Automatica*, **48**, 1132-1137. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.03.008>
- [16] Golden, R.M. and Golden, R. (1996) *Mathematical Methods for Neural Network Analysis and Design*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [17] Zamani, I., Shafiee, M. and Ibeas, A. (2015) Switched Nonlinear Singular Systems with Time-Delay: Stability Analysis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **25**, 1497-1513. <https://doi.org/10.1002/rnc.3154>
- [18] Zhao, Y., Yang, J. and Wen, G. (2013) H_∞ Control for Uncertain Switched Nonlinear Singular Systems with Time Delay. *Nonlinear Dynamics*, **74**, 649-665. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-0995-4>
- [19] Zamani, I., Shafiee, M. and Ibeas, A. (2013) Exponential Stability of Hybrid Switched Nonlinear Singular Systems with Time-Varying Delay. *Journal of the Franklin Institute*, **350**, 171-193. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.10.002>
- [20] Prussing, J.E., Wellnitz, L.J. and Heckathorn, W.G. (1989) Optimal Impulsive Time-Fixed Direct-Ascent Interception. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **12**, 487-494. <https://doi.org/10.2514/3.20436>
- [21] Haddad, W.M., Chellaboina, V.S. and Nersesov, S.G. (2014) *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [22] Stamova, I., Stamov, T. and Li, X. (2014) Global Exponential Stability of a Class of Impulsive Cellular Neural Networks with Supremums. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **28**, 1227-1239. <https://doi.org/10.1002/acs.2440>

- [23] Li, X. and Wu, J. (2016) Stability of Nonlinear Differential Systems with State-Dependent Delayed Impulses. *Automatica*, **64**, 63-69. <https://doi.org/10.1016/j.automata.2015.10.002>
- [24] Bainov, D. and Simeonov, P. (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. CRC Press, Boca Raton, FL.
- [25] Chandrasekar, A., Rakkiyappan, R. and Cao, J. (2015) Impulsive Synchronization of Markovian Jumping Randomly Coupled Neural Networks with Partly Unknown Transition Probabilities via Multiple Integral Approach. *Neural Networks*, **70**, 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2015.07.002>
- [26] Lu, J., Ho, D.W.C. and Cao, J. (2010) A Unified Synchronization Criterion for Impulsive Dynamical Networks. *Automatica*, **46**, 1215-1221. <https://doi.org/10.1016/j.automata.2010.04.005>
- [27] Xie, X., Liu, X. and Xu, H. (2019) Synchronization of Delayed Coupled Switched Neural Networks: Mode-Dependent Average Impulsive Interval. *Neurocomputing*, **365**, 261-272. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.07.045>
- [28] Li, D., Cheng, P. and He, S. (2017) Exponential Stability of Hybrid Stochastic Functional Differential Systems with Delayed Impulsive Effects: Average Impulsive Interval Approach. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 4197-4210. <https://doi.org/10.1002/mma.4297>
- [29] Yao, F., Cao, J., Qiu, L., *et al.* (2017) Exponential Stability Analysis for Stochastic Delayed Differential Systems with Impulsive Effects: Average Impulsive Interval Approach. *Asian Journal of Control*, **19**, 74-86. <https://doi.org/10.1002/asjc.1320>
- [30] Rakkiyappan, R., Gayathri, D., Velmurugan, G., *et al.* (2019) Exponential Synchronization of Inertial Memristor-Based Neural Networks with Time Delay Using Average Impulsive Interval Approach. *Neural Processing Letters*, **50**, 2053-2071. <https://doi.org/10.1007/s11063-019-09982-y>
- [31] Li, Y. (2017) Impulsive Synchronization of Stochastic Neural Networks via Controlling Partial States. *Neural Processing Letters*, **46**, 59-69. <https://doi.org/10.1007/s11063-016-9568-0>
- [32] Yu, Q. and Li, Y. (2021) Stabilization and Control of Switched Singular Systems with Impulse under a New Average Dwell Time Strategy. *Asian Journal of Control*. <https://doi.org/10.1002/asjc.2671>
- [33] Wang, Y., Zou, Y., Liu, Y., *et al.* (2015) Average Dwell Time Approach to Finite-Time Stabilization of Switched Singular Linear Systems. *Journal of the Franklin Institute*, **352**, 2920-2933. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.05.022>
- [34] Xiong, W., Zhang, D. and Cao, J. (2017) Impulsive Synchronisation of Singular Hybrid Coupled Networks with Time-Varying Nonlinear Perturbation. *International Journal of Systems Science*, **48**, 417-424. <https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1186241>

- [35] Zhan, T., Ma, S. and Chen, H. (2019) Impulsive Stabilization of Nonlinear Singular Switched Systems with All Unstable-Mode Subsystems. *Applied Mathematics and Computation*, **344**, 57-67. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.10.009>
- [36] Feng, N., Wu, B., Liu, L., *et al.* (2020) Exponential Stability of Output-Based Event-Triggered Control for Switched Singular Systems. *Asian Journal of Control*, **22**, 1513-1521. <https://doi.org/10.1002/asjc.2035>
- [37] Tang, Z., Park, J.H. and Feng, J. (2017) Impulsive Effects on Quasi-Synchronization of Neural Networks with Parameter Mismatches and Time-Varying Delay. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **29**, 908-919. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2017.2651024>
- [38] Dong, Y., Li, T. and Mei, S. (2016) Exponential Stabilization and L_2 -Gain for Uncertain Switched Nonlinear Systems with Interval Time-Varying Delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 3836-3854. <https://doi.org/10.1002/mma.3828>
- [39] Xu, S. and Lam, J. (2006) Robust Control and Filtering of Singular Systems. Springer, Berlin.
- [40] Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K., *et al.* (2001) Disturbance Attenuation Properties of Time-Controlled Switched Systems. *Journal of the Franklin Institute*, **338**, 765-779. [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(01\)00030-8](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(01)00030-8)
- [41] Zhou, L., Ho, D.W.C. and Zhai, G. (2013) Stability Analysis of Switched Linear Singular Systems. *Automatica*, **49**, 1481-1487. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.02.002>
- [42] Tao, W., Liu, Y. and Lu, J. (2017) Stability and L_2 -Gain Analysis for Switched Singular Linear Systems with Jumps. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 589-599. <https://doi.org/10.1002/mma.3996>
- [43] 杨冬梅, 李祉含. 广义非线性脉冲切换系统的指数稳定和 L_2 增益控制 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 2021, 42(6): 908-912.
- [44] Dong, Y., Li, T. and Mei, S. (2016) Exponential Stabilization and L_2 -Gain for Uncertain Switched Nonlinear Systems with Interval Time-Varying Delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 3836-3854. <https://doi.org/10.1002/mma.3828>