

具有半马尔可夫跳变时变时滞混沌Lur'e系统的同步控制

秦 娅, 熊良林*, 蔡 丽

云南民族大学数学与计算机科学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2022年4月14日; 录用日期: 2022年5月16日; 发布日期: 2022年5月23日

摘 要

本文研究一类具有半马尔可夫跳变时变时滞混沌Lur'e系统的同步控制问题。基于Lyapunov-Krasovskii泛函和线性矩阵不等式技巧, 充分运用两个零等式, 给出一个保证系统随机稳定的延迟状态反馈控制器存在的充分条件。通过仿真实例说明所提方法的有效性。

关键词

时变时滞, 半马尔可夫跳变, 混沌Lur'e系统, 同步控制

Synchronization Control of Chaotic Lur'e Systems with Semi-Markovian Jump and Time-Varying Delay

Ya Qin, Lianglin Xiong*, Li Cai

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Apr. 14th, 2022; accepted: May 16th, 2022; published: May 23rd, 2022

Abstract

This paper investigates the synchronization control of a class of chaotic Lur'e systems with semi-Markov jump and time-varying delay. Based on Lyapunov-Krasovskii functional and linear matrix inequality techniques, and making full use of two zero equations, a sufficient condition for the existence of a delayed state feedback controller to ensure the stochastic stability of the system is given. Simulation examples show the effectiveness of the proposed method.

*通讯作者。

Keywords

Time-Varying Delay, Semi-Markovian Jump, Chaotic Lur'e System, Synchronous Control

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

混沌系统的同步问题受到了广泛关注[1] [2] [3], 而混沌同步的一种统一方法是将系统表示为 Lur'e 系统, 然后使用绝对稳定性理论研究其误差系统[4]. Lur'e 系统是由一个线性部分和一个满足扇区有界的非线性部分组成. Lur'e 系统被广泛研究, 它将线性项和非线性项结合起来, 并成功地应用于许多动态系统[5] [6] [7]. 例如蔡氏电路、混沌系统、神经网络等. 因此, 混沌 Lur'e 系统的主从同步问题已被广泛研究, 并得到了许多重要结果[8] [9] [10].

由于时滞普遍存在于网络控制系统[11]、电路系统[12]、通信系统[13]等各种实际系统中, 时滞往往会导致系统的退化或者不稳定. 在实际控制系统中, 不可避免的信号传播, 延迟时变时滞也无处不在. 因此, 很多学者对具有时滞的混沌 Lur'e 系统同步问题进行了研究, 文献[14]基于新的积分不等式构造了李雅普诺夫泛函, 对具有时滞的 Lur'e 系统的主从混沌同步进行了研究. 文献[15]利用一组不完全正交的多项式函数, 推导出一个含有更多自由矩阵的新积分不等式, 结合构造的新 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 研究了时变时滞的混沌 Lur'e 系统主从同步问题. 也可以看出这类系统的实际应用比较广泛.

另一方面, 马尔可夫跳变系统是一类特殊的随机动态系统, 在马尔可夫跳变系统中, 逗留时间服从指数分布. 逗留时间的概念是指两个连续跳跃之间的状态持续时间. 然而, 在实践中, 很难保证对逗留时间分布的无记忆特征进行严格限制. 在这种情况下, 逗留时间服从非指数分布的基本连续随机过程通常被描述为半马尔可夫过程[16] [17]. 与马尔可夫跳变系统中的恒定的模态转移概率不同, 半马尔可夫跳变系统中的模态转移概率是时变的. 马尔可夫过程是半马尔可夫随机过程的一种特殊情况. 但显然, 半马尔可夫跳变系统比传统的马尔可夫跳变系统有更广泛的应用领域, 因为它在概率分布上的条件比较宽松. 在文献[18]中, 考虑丢包和采样周期的情况下, 研究了半马尔可夫跳变混沌 Lur'e 系统的随机同步问题. 但文献[18]所研究的内容时滞是常时滞, 而时变时滞的存在更符合实际控制系统. 因此, 研究具有半马尔可夫跳变时变时滞 Lur'e 混沌系统的同步分析具有重要意义.

基于上述讨论, 本文研究具有半马尔可夫跳变的时变时滞混沌 Lur'e 系统的随机同步问题. 首先, 充分考虑时滞信息, 利用两个零等式. 然后, 构造一个新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函. 此外, 设计所需的延迟状态反馈控制器, 利用线性矩阵不等式给出主系统与从系统随机同步的充分条件. 最后, 通过实例验证了该方法的有效性.

本文的其余部分组织如下. 在第 2 节中, 提出了要研究的问题, 并介绍了在第 3 节中所用到的引理. 在第 3 节中, 提出了具有半马尔可夫跳变的时变时滞混沌 Lur'e 系统的随机同步的一般方案. 第 4 节给出了一个仿真算例, 以证明所提结果的有效性. 在第 5 节中得出一些结论.

为了表述方便, 在叙述文章之前, 对如下符号说明: R^n 表示 n 维欧式空间; $R^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 的矩阵集; $X > 0 (X \geq 0)$ 表示矩阵 X 是正定(半正定)的; $*$ 表示对称矩阵中的对称项; $diag(\dots)$ 表示对角矩阵.

2. 预备知识

2.1. 系统描述

本文将考虑具有半马尔可夫跳变的时变时滞混沌Lur'e主从系统:

$$\begin{aligned} \tilde{M}: & \begin{cases} \dot{x}(t) = A(r_t)x(t) + B(r_t)x(t-\tau(t)) + W(r_t)f(Cx(t)) \\ p(t) = H(r_t)x(t) \end{cases} \\ \tilde{N}: & \begin{cases} \dot{y}(t) = A(r_t)y(t) + B(r_t)y(t-\tau(t)) + W(r_t)f(Cy(t)) + u(t) \\ q(t) = H(r_t)y(t) \end{cases} \\ \tilde{U}: & u(t) = K(p(t-\tau(t)) - q(t-\tau(t))) - M(x(t) - y(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 \tilde{M} 是主系统, \tilde{N} 是从系统, \tilde{U} 是延迟状态反馈控制器, $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别是主从系统的状态向量, $p(t), q(t) \in \mathbb{R}^l$ 是系统的输出向量, 矩阵 $A(r_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(r_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W(r_t) \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$, $H(r_t) \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ 是已知的实矩阵. $u(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示控制输入, $K \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是待确定的反馈控制器增益矩阵. $\tau(t)$ 表示时变时滞, 且满足: $0 \leq \tau(t) \leq \tau$, $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \mu$. 非线性项 $f(\cdot)$ 满足扇形条件[14], $f(\cdot) = \text{col}\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_q(\cdot)\} \in \mathbb{R}^{n_k}$, 其中 $f_q(\cdot), q=1, \dots, n_k$ 属于 $[0, k]$, 意味着:

$$0 \leq \frac{f_q(\zeta)}{\zeta} \leq k, \forall \zeta \neq 0, q=1, \dots, n_k \quad (2)$$

$\{(r(t), h), t \geq 0\}$ 是全概率空间 (Ω, F, P) 上右连续轨迹的半马尔可夫过程, 并且在有限集合 $S = \{1, 2, \dots, s\}$ 内取值, Δ 为时间间隔, 其转移概率与转移速率的关系定义如下:

$$\Pr\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}(h)\Delta + o(\Delta), i \neq j, \\ 1 + \lambda_{ij}(h)\Delta + o(\Delta), i = j. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\lambda_{ij}(h)$ 表示当 $i \neq j$ 时, 由 t 时刻模态 i 跳跃到 $t+\Delta$ 时刻模态 j 的转移速率, $\Delta > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} (o(\Delta)/\Delta) = 0$,

同时 $\lambda_{ii}(h) = -\sum_{j=1, j \neq i}^s \lambda_{ij}(h)$ 。

对于每一个 $r_t = i$, $i \in L$, 有 $A(r_t) = A_i$, $B(r_t) = B_i$, $C(r_t) = C_i$, $W(r_t) = W_i$, $H(r_t) = H_i$ 。

在本文中误差信号定义为主从状态的差异 $e(t) = x(t) - y(t)$, 则由(1)得误差动态系统方程如下:

$$\dot{e}(t) = (A(r_t) + M)e(t) + (B(r_t) - KH(r_t))e(t-\tau(t)) + W(r_t)\eta(Ce(t), y(t)) \quad (4)$$

其中 $\eta(Ce(t), y(t)) = f(Ce(t) + Cy(t)) - f(Cy(t))$, 令 $C = [c_1, \dots, c_{n_k}]$, $c_q \in \mathbb{R}^n$, $q=1, \dots, n_k$, 则由式(2)可知非线性项 $\eta(Ce(t), y(t))$ 在区间 $[0, k]$ 上, 有下列不等式成立:

$$0 \leq \frac{\eta_q(C_q^T e, y)}{C_q^T e} \leq \frac{f_q(C_q^T e + C_q^T y) - f_q(C_q^T y)}{C_q^T e} \leq k, \forall e, y \in \mathbb{R}^n, q=1, \dots, n_k \quad (5)$$

这意味着:

$$\eta_q(C_q^T e, y) (\eta_q(C_q^T e, y) - kC_q^T e) \leq 0, q=1, \dots, n_k \quad (6)$$

为了简便, 接下来用 $\eta(t)$ 来表示 $\eta(Ce(t), y(t))$ 。

2.2. 引理

为了得到有效结果，引入下面的引理和定义：

引理 1. [19]对一正定矩阵 $Q \in R^{n \times n}$ ，连续函数 $\omega: [a, b] \rightarrow R^n$ ，使得下列积分不等式成立：

$$\int_a^b \omega^T(u) R \omega(u) du \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \omega^T(u) du \right) R \left(\int_a^b \omega(u) du \right) \tag{7}$$

定义 1. [18]对任意初始条件 $e(t) = \varphi(t)$ ， $r_0 \in S$ ，使得满足

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T \|e(t)\|^2 dt \mid (\varphi(t), r_0) \right\} < \infty \tag{8}$$

则误差系统(4)是随机稳定的，从而主系统和从系统随机同步。

3. 主要结论及证明

定理 1. 对给定标量 $\varepsilon, \tau \geq 0, \mu \geq 0$ ，若存在矩阵 $P_i > 0, i \in S$ ，正定矩阵 $Q > 0$ ， $\Gamma = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_k}) > 0$ ，适当维数的矩阵 $R_1, R_2, R_4, R_3 = \varepsilon R_1, M_1, M_2$ ，(R_1 可逆)使得(9)成立，

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} P_j + h_{11} & h_{12} & h_{13} & R_1 W_i + k C^T \Gamma & -R_2 \\ * & h_{22} & \varepsilon R_1 B_i - \varepsilon M_2 H_i & \varepsilon R_1 W_i & 0 \\ * & * & -R_4^T - R_4 & 0 & -R_4 \\ * & * & * & -2\Gamma & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1-\mu}{\tau} Q \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

其中

$$h_{11} = R_1 A_i + M_1 + R_2 + (R_1 A_i + M_1 + R_2)^T, \quad h_{12} = P_i - R_1 + \varepsilon A_i^T R_1 + \varepsilon M_1^T,$$

$$h_{13} = R_1 B_i - M_2 H_i - R_2 + R_4^T, \quad h_{22} = -\varepsilon R_1^T - \varepsilon R_1 + \tau Q$$

则误差系统(4)是随机稳定的，并且求得时变时滞反馈增益矩阵 $K = (R_1)^{-1} M_2$ ， $M = (R_1)^{-1} M_1$ 。证构造如下 Lyapunov 泛函：

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) \tag{10}$$

其中

$$V_1(t) = e^T(t) P(r_t) e(t),$$

$$V_2(t) = \int_{-\tau(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s) Q \dot{e}(s) ds d\theta,$$

则 $V(t)$ 沿系统(4)的导数计算如下：

L 作为半马尔可夫过程的弱无穷小算子，则有

$$LV_1(e(t), r(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{E \left[\left\{ V_1(e(t+\Delta), r(t+\Delta)) \mid e(t), r(t) \right\} - V_1(e(t), r(t)) \right]}{\Delta}$$

应用数学期望和条件概率公式可以得到:

$$\begin{aligned} LV_1(e(t), r(t)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E \left[\sum_{j=1, j \neq i}^s \Pr\{r_{t+\Delta} = j \mid r_t = i\} e^T(t+\Delta) P_j e(t+\Delta) \right. \\ &\quad \left. + \Pr\{r_{t+\Delta} = i \mid r_t = i\} e^T(t+\Delta) P_i e(t+\Delta) - e^T(t) P_i e(t) \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^s \frac{q_{ij}(F_i(h+\Delta) - F_i(h))}{1 - F_i(h)} e^T(t+\Delta) P_j e(t+\Delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - F_i(h+\Delta)}{1 - F_i(h)} e^T(t+\Delta) P_i e(t+\Delta) - e^T(t) P_i e(t) \right] \end{aligned}$$

其中 h 是系统从最后一次跳跃开始保持在模态 i 时经过的时间, q_{ij} 是系统从模态 i 到模态 j 的转移概率强度, 由概率分布函数 $F_i(h)$ 的性质有: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_i(h+\Delta) - F_i(h)}{\Delta} = f_i(h)$ 。

记:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_i(h+\Delta) - F_i(h)}{\Delta(1 - F_i(h))} &= \lambda_i(h), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_i(h+\Delta) - F_i(h)}{1 - F_i(h)} = 0, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - F_i(h+\Delta)}{1 - F_i(h)} = 1, \\ \lambda_{ij}(h) &= q_{ij}(h) \lambda_i(h), \quad \lambda_{ii}(h) = -\lambda_i(h) = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}(h), \quad \lambda_i(h) = \frac{f_{ij}(h)}{1 - F_i(h)} \end{aligned}$$

采用文献[20]同样的技术, 化简为:

$$LV_1(e(t), r(t)) = 2e^T(t) P_i e(t) + \sum_{j=1}^s \lambda_{ij}(h) e^T(t) P_j e(t), \quad (11)$$

对 $V_2(t)$ 求导并运用引理 1 可得:

$$\begin{aligned} LV_2(t) &= \tau(t) \dot{e}^T(t) Q \dot{e}(t) - (1 - \dot{\tau}(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) Q \dot{e}(s) ds \\ &\leq \tau(t) \dot{e}^T(t) Q \dot{e}(t) - \frac{1 - \dot{\tau}(t)}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) ds Q \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds \\ &\leq \tau \dot{e}^T(t) Q \dot{e}(t) - \frac{1 - \mu}{\tau} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) ds Q \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds, \\ &= \zeta^T(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \tau Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1-\mu}{\tau} Q \end{bmatrix} \zeta(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\zeta(t) = \left[e^T(t) \quad \dot{e}^T(t) \quad e^T(t-\tau(t)) \quad \eta^T(t) \quad \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) ds \right]^T$ 。

存在正标量 $\varepsilon_q (q=1, \dots, n_k)$ 由式(6)有:

$$0 \leq -2 \sum_{q=1}^{n_k} \varepsilon_q \eta_q (\eta_q - k C_q^T e), \quad (13)$$

此外, 由误差动态系统方程式(4)得:

$$0 = -\dot{e}(t) + (A(r_t) + M)e(t) + (B(r_t) - KH(r_t))e(t - \tau(t)) + W(r_t)\eta(t), \quad (14)$$

由 $\int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds = e(t) - e(t - \tau(t))$ 得:

$$0 = e(t) - e(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds, \quad (15)$$

引入适当维数的矩阵 R_1, R_2, R_3, R_4 , (R_1 可逆)由以上两个零等式(14)、(15)知:

$$0 = 2e^T(t)R_1[-\dot{e}(t) + (A(r_t) + M)e(t) + (B(r_t) - KH(r_t))e(t - \tau(t)) + W(r_t)\eta(t)], \quad (16)$$

$$0 = 2e^T(t)R_2[e(t) - e(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds], \quad (17)$$

$$0 = 2\dot{e}^T(t)R_3[-\dot{e}(t) + (A(r_t) + M)e(t) + (B(r_t) - KH(r_t))e(t - \tau(t)) + W(r_t)\eta(t)], \quad (18)$$

$$0 = 2e^T(t - \tau(t))R_4[e(t) - e(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds], \quad (19)$$

将(16)~(19)四个式子相加:

$$\begin{aligned} 0 &= -2e^T(t)R_1\dot{e}(t) + 2e^T(t)R_1(A_i + M)e(t) + 2e^T(t)R_1(B_i - KH_i)e(t - \tau(t)) + 2e^T(t)R_1W_i\eta(t) \\ &\quad + 2e^T(t)R_2e(t) - 2e^T(t)R_2e(t - \tau(t)) - 2e^T(t)R_2\int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds \\ &\quad - 2\dot{e}^T(t)R_3\dot{e}(t) + 2\dot{e}^T(t)R_3(A_i + M)e(t) + 2\dot{e}^T(t)R_3(B_i - KH_i)e(t - \tau(t)) + 2\dot{e}^T(t)R_3W_i\eta(t) \\ &\quad + 2e^T(t - \tau(t))R_4e(t) - 2e^T(t - \tau(t))R_4e(t - \tau(t)) - 2e^T(t - \tau(t))R_4\int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}(s) ds \end{aligned} \quad (20)$$

$$= \zeta^T(t) \begin{bmatrix} h_{11} & -R_1 + (A_i + M)^T R_3^T & R_1(B_i - KH_i) - R_2 + R_4^T & R_1W_i & -R_2 \\ * & -R_3^T - R_3 & R_3(B_i - KH_i) & R_3W_i & 0 \\ * & * & -R_4^T - R_4 & 0 & -R_4 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

其中 $h_{11} = R_1A_i + R_1M + R_2 + (R_1A_i + R_1M + R_2)^T$,

令 $R_3 = \varepsilon R_1$, $M_1 = R_1M$, $M_2 = R_1K$

由以上式(11)~(13)和式(20)相加, 有:

$$\dot{V}(e(t), t) \leq \zeta^T(t)\Omega\zeta(t) \quad (21)$$

$$\text{其中 } \Omega = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} P_j + h_{11} & h_{12} & h_{13} & R_1W_i + kC^T\Gamma & -R_2 \\ * & h_{22} & \varepsilon R_1B_i - \varepsilon M_2H_i & \varepsilon R_1W_i & 0 \\ * & * & -R_4^T - R_4 & 0 & -R_4 \\ * & * & * & -2\Gamma & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1-\mu}{\tau}Q \end{bmatrix},$$

$\Gamma = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_k}) > 0$, $h_{11} = R_1A_i + M_1 + R_2 + (R_1A_i + M_1 + R_2)^T$,

$h_{12} = P_i - R_1 + \varepsilon A_i^T R_1 + \varepsilon M_1^T$, $h_{13} = R_1B_i - M_2H_i - R_2 + R_4^T$, $h_{22} = -\varepsilon R_1^T - \varepsilon R_1 + \tau Q$,

因此,根据式(9),对于任意的 $i \in S$, 可得到 $LV(e(t), r(t), t) \leq \zeta^T(t) \Omega \zeta(t) < 0$, 则存在一个常数 $c > 0$, 可以得到:

$$LV(e(t), r(t), t) < -c \|e(t)\|^2,$$

根据 Dynkin 公式, 有:

$$E\{V(e(t), i, t)\} - E\{V(\varphi(t), r_0, t_0)\} < -cE\left\{\int_0^t \|e(s)\|^2 ds\right\},$$

因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时有:

$$E\left\{\int_0^\infty \|e(s)\|^2 ds\right\} \leq \frac{1}{c} V(\varphi(t), r_0, t) < \infty,$$

根据定理 1, 可得系统(4)是随机稳定的, 并且控制器增益矩阵为 $K = (R_1)^{-1} M_2$, $M = (R_1)^{-1} M_1$, 即证明完成。

注释: 由式(20)里可知, 与 K 右乘矩阵为 R_1 或 R_3 , 当 $R_3 = \varepsilon R_1$ 时, 即与 K 右乘矩阵为 R_1 , 则令 $M_2 = R_1 K$, 同理, 令 $M_1 = R_1 M$ 。这样便可得到满足同步控制条件的控制器增益矩阵 $K = (R_1)^{-1} M_2$, $M = (R_1)^{-1} M_1$ 。

4. 仿真算例

在本节中, 我们将通过一个例子来展示本文中提出的方法的优点和有效性。

例: 考虑两种模态 ($r_t \in S\{1, 2\}$) 的具有时变时滞的蔡氏电路如下所示:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(r_t)(x_2(t) - m_1(r_t)x_1(t) + \varphi(x_1(t))) - c(r_t)x_1(t - \tau(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - c(r_t)x_1(t - \tau(t)) \\ \dot{x}_3(t) = -b(r_t)x_2(t) + c(r_t)(2x_1(t - \tau(t)) - x_3(t - \tau(t))) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x_1(t)) = 0.5(m_1(r_t) - m_0(r_t))(r_t)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|)$ 。

将该蔡氏电路用 lur'e 形式表示:

$$A(\tau_t) = \begin{bmatrix} -a(r_t)m_1(r_t) & a(r_t) & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b(r_t) & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\tau_t) = \begin{bmatrix} -c(r_t) & 0 & 0 \\ -c(r_t) & 0 & 0 \\ 2c(r_t) & 0 & -c(r_t) \end{bmatrix},$$

$$W(\tau_t) = \begin{bmatrix} -a(r_t)(m_0(r_t) - m_1(r_t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \text{参数 } m_0(1) = -\frac{1}{7}, \quad m_1(1) = \frac{2}{7}, \quad a(1) = 7, \quad b(1) = 12.26,$$

$$c(1) = 0.1, \quad m_0(2) = -\frac{2}{7}, \quad m_1(2) = \frac{1}{7}, \quad a(2) = 9, \quad b(2) = 14.28, \quad c(2) = 0.1,$$

$f(x_1(t)) = \frac{1}{2}(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|)$ 属于区间 $[0, 1]$, 初值 $x(0) = [-0.6 \quad -0.5 \quad 0.4]^T$, $y(0) = [1.5 \quad -1.1 \quad 1.2]^T$ 。

这里有两种模态, 假设半马尔可夫链的逗留时间服从每种模态的 Weibull 分布, 具体来说, 有 $\lambda_i(h) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} h^{\beta-1}$, 其中 α 是 Weibull 分布的尺度参数, β 是形状参数, 注意到系统只有两种模态, 对于 $i \neq j$ 时, 转移概率强度 $q_{ij} = 1$, 而 $q_{ii} = 0$ 。特别地, 当 $i = 1$ 时, 用 $\alpha = 1$, $\beta = 2$ 的 Weibull 分布来表示; 当 $i = 2$ 时, 用 $\alpha = 1$, $\beta = 3$ 的 Weibull 分布来表示。因此, 我们可以得到转移速率矩阵

$$\lambda_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -2h & 2h \\ 3h^2 & -3h^2 \end{bmatrix},$$

从而进一步，推导出它的数学期望

$$E\{\lambda_{ij}(h)\} = \begin{bmatrix} -1.7725 & 1.7725 \\ 2.7082 & -2.7082 \end{bmatrix},$$

取 $\varepsilon = 0.1$, $H_1 = H_2 = [1 \ 0 \ 0]$, 时变时滞 $\tau(t) = |0.2 + 0.5 \sin t|$, 利用 Matlab 工具箱进行对其仿真, 得到控制增益矩阵:

$$K = \begin{bmatrix} -0.3840 \\ -0.5172 \\ 1.9057 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -3.9288 & -9.1427 & 0.8364 \\ -1.8215 & -0.8835 & -0.3857 \\ 1.8813 & 13.7446 & -9.4068 \end{bmatrix}$$

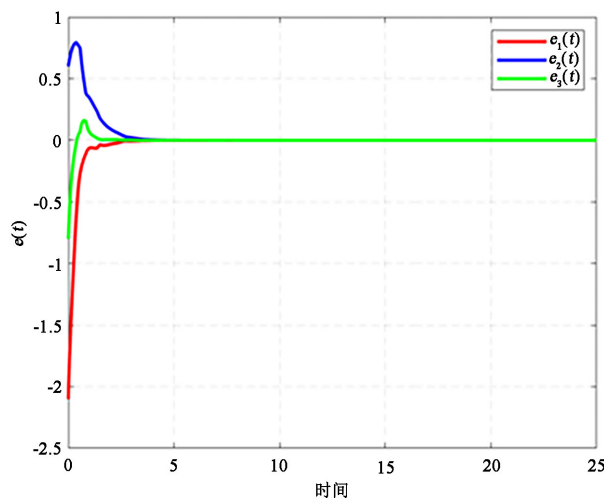


Figure 1. Error system trajectory

图 1. 误差系统轨迹

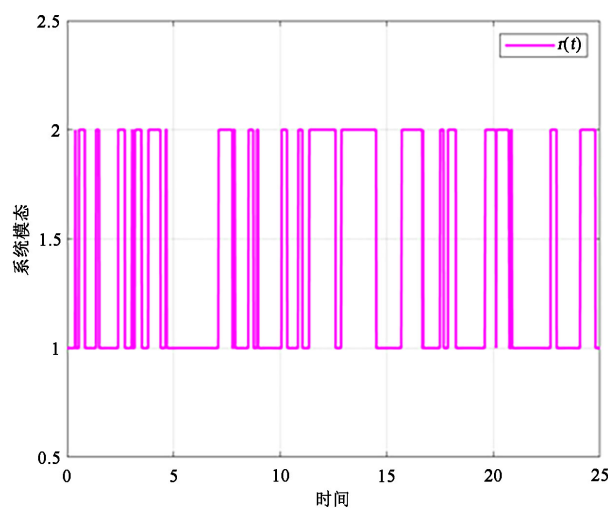


Figure 2. Switching signal with two modes

图 2. 两种模式的切换信号

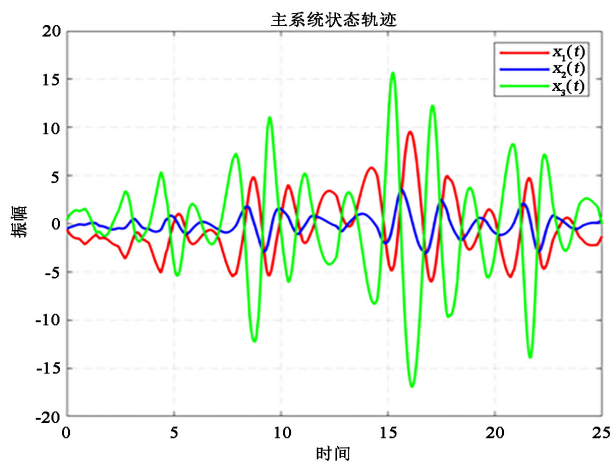


Figure 3. State trajectories of master system

图 3. 主系统的状态轨迹

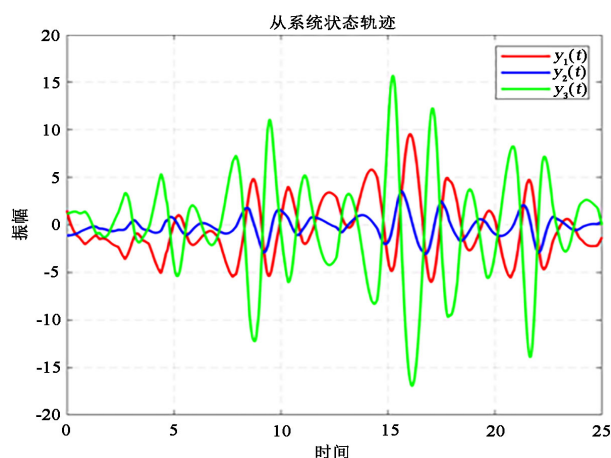


Figure 4. State trajectories of slave system

图 4. 从系统的状态轨迹

由以上可知，对于上述增益矩阵，误差系统、模态、主系统和从系统的响应曲线如图所示，分别为图 1~4。运用本文所提出的方法能够获得一个大范围的时滞阈值 $\tau_2 = 0.7$ ，图 1 显示同步误差趋于零。因此，我们可以通过所提出的控制器使得混沌 Lur'e 系统的主系统和从系统达到同步。

5. 结论

针对具有半马尔可夫跳跃的时变时滞混沌 Lur'e 系统的随机同步问题。充分考虑时滞信息，利用零等式技术，导出了保证误差系统随机稳定性的线性矩阵不等式的充分条件，同时设计了使得主从系统同步的控制器。最后，通过一个数值算例验证了该方法的有效性。

基金项目

国家自然科学基金(12061088)。

参考文献

- [1] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **64**, 821-824. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>

- [2] Mkaouar, H. and Boubaker, O. (2012) Chaos Synchronization for Master Slave Piecewise Linear Systems: Application to Chua's Circuit. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **17**, 1292-1302. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.07.027>
- [3] Li, X. and Bohner, M. (2010) Exponential Synchronization of Chaotic Neural Networks with Mixed Delays and Impulsive Effects via Output Coupling with Delay Feedback. *Mathematical and Computer Modelling*, **52**, 643-653. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.04.011>
- [4] Barreira, L., Pesin, Y. and Schmeling, J. (1997) On a General Concept of Multifractality: Multifractal Spectra for Dimensions, Entropies, and Lyapunov Exponents. *Multifractal Rigidity. Chaos*, **7**, 27-38. <https://doi.org/10.1063/1.166232>
- [5] Li, C., Chen, L. and Aihara, K. (2006) Stability of Genetic Networks with SUM Regulatory Logic: Lur'e System and LMI Approach. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers*, **53**, 2451-2458. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2006.883882>
- [6] Duan, W., Du, B., Li, Y., Shen, C., Zhu, X., Li, X. and Chen, J. (2018) Improved Sufficient LMI Conditions for the Robust Stability of Time-Delayed Neutral-Type Lur'e Systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **16**, 2343-2353. <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0138-2>
- [7] Zhu, Y., Zheng, W.X. and Zhou, D. (2020) Quasi-Synchronization of Discrete-Time Lur'e-Type Switched Systems with Parameter Mismatches and Relaxed PDT Constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**, 2026-2037. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2019.2930945>
- [8] Zeng, H., Park, J.H., Xiao, S. and Liu, Y. (2015) Further Results on Sampled-Data Control for Master-Slave Synchronization of Chaotic Lur'e Systems with Time Delay. *Nonlinear Dynamics*, **82**, 851-863. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2199-6>
- [9] Wu, Z.G., Peng, S., Su, H., et al. (2013) Sampled-Data Synchronization of Chaotic Lur'e Systems with Time Delays. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, **24**, 410-421. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2236356>
- [10] Shi, K., Liu, X., Zhu, H., Zhong, S., Liu, Y. and Yin, C. (2016) Novel Integral Inequality Approach on Master-Slave Synchronization of Chaotic Delayed Lur'e Systems with Sampled-Data Feedback Control. *Nonlinear Dynamics*, **83**, 1259-1274. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2401-x>
- [11] Zhao, T., Huang, M. and Dian, S. (2019) Robust Stability and Stabilization Conditions for Nonlinear Networked Control Systems with Network-Induced Delay via TS Fuzzy Model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **29**, 486-499.
- [12] Sengupta, A. and Das, D.K. (2021) Mitigating Inter-Area Oscillation of an Interconnected Power System Considering Time-Varying Delay and Actuator Saturation. *Sustainable Energy, Grids and Networks*, **27**, Article ID: 100484. <https://doi.org/10.1016/j.segan.2021.100484>
- [13] Qu, Y., Xu, H.P., Song, C., et al. (2020) Coverage Control for Mobile Sensor Networks with Time-Varying Communication Delays on a Closed Curve. *Journal of the Franklin Institute*, **357**, 12109-12124. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.08.005>
- [14] Xiang, J., Li, Y.J. and Wei, W. (2007) An Improved Condition for Master-Slave Synchronization of Lur'e Systems with Time Delay. *Physics Letters A*, **362**, 154-158. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.06.068>
- [15] Wu, Y., Xiong, L., Zhai, G., et al. (2021) Improved Synchronization Analysis for Delayed Lur'e Systems Using Improved Technique. *International Journal of Control Automation and Systems*, **19**, 1480-1490. <https://doi.org/10.1007/s12555-020-0111-8>
- [16] Li, F., Wu, L. and Peng, S. (2015) Stochastic Stability of Semi-Markovian Jump Systems with Mode-Dependent Delays. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, **24**, 3317-3330. <https://doi.org/10.1002/rnc.3057>
- [17] Wei, Y., Park, J.H., Qiu, J., et al. (2017) Sliding Mode Control for Semi-Markovian Jump Systems via Output Feedback. *Automatica*, **81**, 133-141. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.03.032>
- [18] Li, Q., Liu, X.Z., Zhu, Q.X., et al. (2019) Stochastic Synchronization of Semi-Markovian Jump Chaotic Lur'e Systems with Packet Dropouts Subject to Multiple Sampling Periods. *Journal of the Franklin Institute*, **356**, 6899-6925. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.06.005>
- [19] Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013) Wirtinger-Based Integral Inequality: Application to Time-Delay Systems. *Automatica*, **49**, 2860-2866. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.05.030>
- [20] Xu, Z., Su, H., Shi, P., et al. (2019) Asynchronous H_∞ Control of Semi-Markov Jump Linear Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **349**, 270-280. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.12.010>