Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1006-1010
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126110

Hans汉斯

一类3度弧正则Cayley图

赖子峰

云南财经大学，统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年5月14日；录用日期：2022年6月21日；发布日期：2022年6月28日

摘　要

称一个图是弧正则的，如果其全自同构群在其弧集上的作用是正则的。Xu引出问题：是否存在一个3度弧正则图，其全自同构群是不可解的。本文我们运用群论的相关知识，构造了一类3度弧正则Cayley图，并决定了此类图的全自同构群，从而得到了满足上述问题的3度弧正则图。

关键词

弧正则图，拟本原置换群，自同构群

A Family of Arc-Regular Cubic Cayley Graphs

Zifeng Lai

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: May 14th, 2022; accepted: Jun. 21st, 2022; published: Jun. 28th, 2022

Abstract

A graph is called arc-regular, if its automorphism group acts regularly on its arc set. Xu introduces a question: whether there is an arc-regular cubic graph with an insolvable automorphism group. In this paper, we apply the related knowledge of group theory to construct a family of arc-regular cubic Cayley graphs and determine its automorphism group, consequently obtaining arc-regular cubic graphs that satisfy the above problems.

Keywords

Arc-Regular Graph, Quasiprimitive Permutation Group, Automorphism Group

文章引用: 赖子峰. 一类 3 度弧正则 Cayley 图[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1006-1010.
DOI: 10.12677/pm.2022.126110

1. 引言

本文讨论的图是有限无向的，无自环和重边。

本文采用标准的符号和术语，可参考[1] [2]。如用 A_n 和 S_n 分别表示 n 次的交错群和对称群，$\mathbb{Z}_n$ 表示 n 阶循环群。对于两个群 N 和 H，我们用 $N\times H$ 表示 N 和 H 的直积，用 $N.H$ 表示 N 被 H 扩张，如果这个扩张是可裂的，则记为 $N:H$。对有限群 G，通过 $Z(G)$ 和 $C_G(H)$ 分别表示 G 的中心和 H 在 G 中的中心化子。对群 T 和集合 D 上的置换群 L，用 $T\wr L$ 表示 T 和 L 的圈积。用 $\mathrm{Aut}(T)$ 表示为群 T 的全自同构群。

对于一个非空图 Γ，我们用 $V\Gamma$，$E\Gamma$，$A\Gamma$ 和 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 分别表示它的顶点集、边集、弧集和全自同构群，记 $|V\Gamma|$ 为图 Γ 的阶。给定顶点 $\alpha\in V\Gamma$，与顶点 α 邻接的点集称为 α 的邻域，记为 $\Gamma(\alpha)$，$|\Gamma(\alpha)|$ 称为点 α 的度数。我们称顶点集的一个 $s+1$ 序列 $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 为 Γ 的一条 s-弧，如果任意相邻两点邻接且 $\alpha_{i+1}\neq\alpha_{i-1}$，其中 $1\leq i\leq s-1$。

设 $X\leq\mathrm{Aut}(\Gamma)$。那我们称图 Γ 为 X-点传递图、X-边传递图、X-弧传递图或 (X,s)-弧传递图，如果 X 分别在 $V\Gamma$、$E\Gamma$、$A\Gamma$ 上传递。类似地称 Γ 为 X-弧正则图，如果 X 在 $A\Gamma$ 上正则。特别地，如果 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 在 $A\Gamma$ 上正则，则称 Γ 为弧正则图。Cayley 图[3]是一类重要的点传递图，对给定的群 G 和它的子集 S，有 $S=S^{-1}=\{g^{-1}\mid g\in S\}$ 且 $1\notin S$。可以定义群 G 上的 Cayley 图如下：顶点集为 G，顶点 g 与 h 是邻接的当且仅当 $hg^{-1}\in S$，将这个图记为 $\mathrm{Cay}(G,S)$。众所周知，一个图 Γ 是群 G 上的 Cayley 图当且仅当 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 中包含一个顶点集上的正则子群 G。

弧正则图的分类和构造受到了许多学者们的关注，是代数图论方向上一个热门课题。例如：*R. Frucht* [4] 1952 年构造了第一个弧正则图，该图是 432 阶 3 度图。值得一提的是，1997 年 *Marušič* 和 *Xu* [5]证明了 3 度弧正则图的线图同构于一个围长为 3 的 4 度半弧传递图，这为构造半弧传递图提供了新的方法，因此这也是本文研究 3 度弧正则图的动机之一。下面介绍一些小度数弧正则图的例子。例如 1997 年，*Marušič* [6]给出了单群 A_n 上的 4 度弧正则 Cayley 图($n\geq5$ 是奇数)；2000 年 *Marušič* 和 *Pisanski* [7]给出了二面体群上的 3 度弧正则 Cayley 图；2002 年 *Fang*，*Wang* 和 *Xu* [8]研究了 G 为可解群下的 G-弧正则图，并且构造了两类具有不可解自同构群的 3 度弧正则图；2006 年 *Kwak* 和 *Oh* [9]给出了一类二面体群上的 4 度和 6 度弧正则图；2012 年，*Conder* 和 *Feng* [10]给出了一类非交换单群 $PSL(2,p^3)$ 上的 3 度弧正则 Cayley 图(p 为奇素数)。此外，许多学者也对具有特定的阶和度数的弧正则图进行了深入研究。如 2004 年，*Feng* 和 *Kwak* [11]刻画了阶为 $2p$ 或 $2p^2$ 的 3 度弧正则图(p 为素数)；2009 年 *Zhou* 和 *Feng* [12]分类了 $2pq$ 阶的 4 度弧正则图(p 和 q 为素数)；2018 年 *Ding* [13]分类了平方自由阶素数度的 2-弧正则图；2021 年 *Wang* 和 *Gao* [14]分类了平方自由阶 $(G,2)$-弧正则图，其中 G 是几乎单群。更多的研究成果，读者可参见文献[15] [16] [17] [18] [19]。

下面首先介绍本文的主要结论。

定理 1.1 设 T 是一个“*WG*”-单群(见下文**定义 2.1**)，令群 $X\cong T\wr\mathbb{Z}_3$。设群 $G\cong T^3$ 为 X 唯一的极小正规子群，则存在群 G 上的 3 度 Cayley 图 Γ，并且图 Γ 具有以下性质：

1) Γ 为连通的 X-弧正则图。

2) $\mathrm{Aut}(\Gamma)=X$。

注：a) **定理 1.1** 中图 Γ 的存在性见第三节的构造，其构造也进一步回答了[8]：存在无穷多的 3 度弧正则图，其全自同构群是不可解的。

b) 设图 Σ 为 Γ 的线图，由文献[6]可知，Σ 是一个 4 度的半弧传递图并且有 $\mathrm{Aut}(\Gamma)=\mathrm{Aut}(\Sigma)$，于是我们也构造出了一个无穷类的 4 度半弧传递图。

本文结构如下：在第二节，给出一些群论和图论的相关定义和引理。在第三节，给出**定理 1.1** 中图的构造和该图性质的证明，见**构造**，**引理 3.1**，**引理 3.2** 和**引理 3.4**。

2. 预备知识

在本节，我们先介绍主要定理中“*WG*”-单群的概念，其性质直接决定了图 Γ 的性质。此概念是我们新引入的，“*WG*”是“*well-generated*”的简写。

定义 2.1 交换单群 T 是“*WG*”-单群，如果 T 满足下面条件：

1) $T=\langle t_1,t_2,t_3\rangle$，其中 $t_1,t_2,t_3\in T$ 都是 2 阶元。

2) 不存在 $\eta\in\mathrm{Aut}(T)$ 使得 $t_1^\eta=t_2, t_2^\eta=t_3, t_3^\eta=t_1$ 成立。

3) 对任意的 $i=1,2,3$ 都不存在 $\sigma_i\in\mathrm{Aut}(T)$ 使得 $t_i^{\sigma_i}=t_i$ 并且 σ_i 对换剩余的两个 2 阶元。

注：存在无穷多的“*WG*”-单群，如 *Nuzhin* [20]构造了单群 $\mathrm{A}_n\ (n\ge 5)$ 可以由三个 2 阶元生成，其中两个 2 阶元可以交换。经过简单的验证可以知道 $\mathrm{A}_n\ (n\ge 5)$ 也满足上述定义的(2)，(3)。故不可解的交错群都是“*WG*”-单群。这类能由 3 个 2 阶元生成的单群已经得到广泛研究，例如对于某些 *Hurwitz* 单群也满足我们“*WG*”-单群的定义，可参考文献[21]。

下面我们先介绍 Cayley 图的全自同构群的两个重要子群。

设图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 为群 G 在集合 S 上的 Cayley 图，令两个群为 $\hat{G}=\{\hat{g}\mid \hat{g}:x\mapsto xg,\forall x,g\in G\}$ 和 $\mathrm{Aut}(G,S)=\{\beta\in\mathrm{Aut}(G)\mid S^\beta=S\}$。容易知道 $\hat{G}$ 和 $\mathrm{Aut}(G,S)$ 都是 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的子群，并且 $\hat{G}$ 在顶点集 G 上作用正则。于是在不引起误会的情况下，可将 $\hat{G}$ 记为 G。

引理 2.2 [3]设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$，则 Γ 是连通图当且仅当 $G=\langle S\rangle$。那么如果 Γ 是连通图，则群 $\mathrm{Aut}(G,S)$ 忠实地作用在 S 上。

正规 Cayley 图的概念，最早由 *Xu* [22]提出，这是一类特殊的 Cayley 图。

定义 2.3 设图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$，其中 $G\le X\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$。我们称 Γ 是 X-正规 Cayley 图，如果满足 $G\lhd X$。特别地，如果 $G\lhd\mathrm{Aut}(\Gamma)$，则称 Γ 为正规 Cayley 图。

正规 Cayley 图的自同构群有较好的刻画，其具有如下性质：

引理 2.4 [1]设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 是连通的，记 $N=N_{\mathrm{Aut}(\Gamma)}(G)$。则 $N=G:\mathrm{Aut}(G,S)$。特别地，如果 Γ 是正规 Cayley 图，则 $\mathrm{Aut}(\Gamma)_1=\mathrm{Aut}(G,S)$，1 是 G 中单位元代表的顶点。

下面介绍连通的 3 度 (G,s)-弧传递图的点稳定子群结构。

引理 2.5 [23]设图 Γ 为一个连通的 3 度 (G,s)-弧传递图，则 $s\le 5$。任意 $\alpha\in V\Gamma$，则 (G_α,s) 为以下情形之一：$(\mathbb{Z}_3,1)$，$(\mathrm{S}_3,2)$，$(\mathrm{S}_3\times\mathbb{Z}_2,3)$，$(\mathrm{S}_4,4)$，$(\mathrm{S}_4\times\mathbb{Z}_2,5)$。

最后我们以有限群论的一个经典结果来结束本节。

引理 2.6 设群 G 有一个指数为 k 的子群 H，令 $C=\bigcap_{g\in G}H^g$ (称为 H 在 G 中的核)。则 C 为含在 H 中 G 的最大正规子群，并且 $G/C\le\mathrm{S}_k$。特别地，$G\le\mathrm{S}_k$，如果 H 在 G 中的核为 1。

3. 构造和证明

在本节，我们首先给出**定理 1.1** 中图的构造。

构造：设 T 是一个“*WG*”-单群。由**定义 2.1** 可知，可记 $T=\langle t_1,t_2,t_3\rangle$，$t_1,t_2,t_3$ 为 2 阶元。下令群 $X\cong T\wr\mathbb{Z}_3$。

设 G 为 X 唯一的极小正规子群，则我们有 $G\cong T^3$ 且 $X\cong G:\langle\tau\rangle$，其中 τ 是 3 阶元使得 $(g_1,g_2,g_3)^\tau=(g_2,g_3,g_1)$，其中元素 $g_1,g_2,g_3\in T$。

下设 $s_1=(t_1,t_2,t_3), s_2=s_1^\tau, s_3=s_1^{\tau^2}$，取集合 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$，记 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$。

后面证明中的符号和术语均与上述构造所一致。

引理 3.1 Γ 是 X-弧正则的 3 度 Cayley 图，$X\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$。

证明 由于 $\tau\in\mathrm{Aut}(G,S)$，将 G 视为 G 我们可得 $X=G:\langle\tau\rangle$ 是 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的子群。由于 $\langle\tau\rangle$ 在 $\Gamma(1)=S$ 上传递，那么 Γ 是 X-弧传递的。又由 $|X|=3|G|=|A\Gamma|$，可得 Γ 是 X-弧正则图的。

引理 3.2 Γ 是连通的。

证明 由**引理 2.2** 可知，只需证明：$G=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$。按照顺序记 G 的 3 个直积因子分别为 T_1,T_2,T_3。设 $R=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$。由于 $T=\langle t_1,t_2,t_3\rangle$，那么 R 在每个直积因子上的投影是满的，于是 R 是单群 T 的次直积(*subdirect product*)，见[24]。如果 $R<G$，则 R 至少在两个分量上的投影是相连的(*linked*)。假设第一个分量和第二个分量相连，则存在自同构 $\sigma\in\mathrm{Aut}(T)$ 使得 $t_1^\sigma=t_2, t_2^\sigma=t_3, t_3^\sigma=t_1$。这与 T 是"WG"-单群矛盾。假设第一个分量和第三个分量相连，则存在 $\sigma_1\in\mathrm{Aut}(T)$ 使得 $t_1^{\sigma_1}=t_3, t_3^{\sigma_1}=t_2, t_2^{\sigma_1}=t_1$，也是矛盾。同理可证第二个分量和第三个分量也不相连，于是 $G=R$。

引理 3.3 $G\lhd\mathrm{Aut}(\Gamma)$。

证明 假设 G 不是 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的正规子群。由 G 是 X 唯一的非平凡正规子群，则由**引理 2.6** 可知，X 在 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 中的核为 1，故 $\mathrm{Aut}(\Gamma)\le\mathrm{S}_k$，其中 $k=|\mathrm{Aut}(\Gamma):X|$。注意到 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 和 X 都在顶点集合上传递，于是可得：$|\mathrm{Aut}(\Gamma):X|=|\mathrm{Aut}(\Gamma)_1:X_1|$。由 $X_1\cong\mathbb{Z}_3$ 和**引理 2.5** 我们可知，正整数 k 整除 16。于是 $\mathrm{Aut}(\Gamma)\le\mathrm{S}_k\le\mathrm{S}_{16}$。假设 $k\le8$，由于 $|\mathrm{S}_8|=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$，故 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 中不可能包含同构于 T^3 的子群，矛盾。故 $k=16$ 并且 $\mathrm{Aut}(\Gamma)_1\cong\mathrm{S}_4\times\mathrm{S}_2$。由于 $G=T^3\le\mathrm{Aut}(\Gamma)\le\mathrm{S}_{16}$ 并且 $|\mathrm{S}_{16}|=2^{15}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$，计算 G 的阶可知非交换单群 T 只可能为 A_5。于是可得图的全自同构群 $\mathrm{Aut}(\Gamma)=G.\mathrm{Aut}(\Gamma)_1\cong\mathrm{A}_5^3.(\mathrm{S}_4\times\mathrm{S}_2)$。根据[25]，可推导出 S_{16} 中不可能含有结构为 $\mathrm{A}_5^3.(\mathrm{S}_4\times\mathrm{S}_2)$ 这样的子群，矛盾。

在上述引理的基础上，最后我们证明本文最后一个关键性结论。

引理 3.4 $\mathrm{Aut}(\Gamma)=X$。

证明 记 $A=\mathrm{Aut}(\Gamma)$。由**引理 3.3** 和**引理 2.4** 知 $A_1=\mathrm{Aut}(G,S)$，并且由**引理 3.2** 和**引理 2.2** 知 A_1 忠实作用在 S 上。故 $A_1\cong\mathbb{Z}_3$ 或 S_3。假设 $A_1\cong\mathrm{S}_3$。更进一步假设 $C_A(G)\ne1$。由于 $Z(G)=1$，则有 $G\cap C_A(G)=1$。设 $L=G\times C_A(G)$。则 $L\lhd A$ 并且 $L=GL_1$。于是 $C_A(G)\cong L/G\cong L_1\lhd A_1$，于是可得 $C_A(G)\cong\mathbb{Z}_3$。因此 $|L|=|X|=3|G|$。假设 $L\ne X$，则由 $|A:X|=2$，我们有 $LX=A$。故可得 $|X:X\cap L|=2$，这与 X 只有唯一的非平凡正规子群 G 矛盾。于是 $C_A(G)=1$。此时可得：$A_1\le\mathrm{Aut}(G)=\mathrm{Aut}(T)\wr\mathrm{S}_3$。注意到 $X_1=\langle\tau\rangle\lhd A_1$，我们设 $A_1=\langle\tau\rangle:\langle\xi\rangle$，$\tau^\xi=\tau^{-1}$，$\xi$ 为 2 阶元。由 τ 的定义(见构造)，可记 $\tau=(123)\in\mathrm{S}_3$ 和 $\xi=\sigma(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，其中 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathrm{Aut}(T)$ 且 $\sigma\in S_3$。由 $\xi^2=\sigma^2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\sigma(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=1$ (记等式为 E_1)，于是 σ 是 2 阶元，$\tau^\sigma=\tau^{-1}$。又由 $\tau^\xi=\tau^{-1}$，所以 $\tau^{-1}=\tau^\xi=\tau^{\sigma(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}=(\tau^{-1})^{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}$。因此 τ^{-1} 与 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 交换，我们可推导出 $\xi_1=\xi_2=\xi_3$。再结合等式 E_1，我们可得 ξ_1 是 2 阶元。由 $A_1=\langle\tau\rangle:\langle\xi\rangle$ 和 $\langle\tau,\sigma\rangle=\mathrm{S}_3$，则 A_1 中所有的 2 阶元为：$(12)(\xi_1,\xi_1,\xi_1),(13)(\xi_1,\xi_1,\xi_1),(23)(\xi_1,\xi_1,\xi_1)$。由于 $A_1\cong\mathrm{S}_3$ 中稳定 $s=(t_1,t_2,t_3)$ 的点是 2 阶元，于是有 $(t_1,t_2,t_3)^{(12)(\xi_1,\xi_1,\xi_1)}=(t_2^{\xi_1},t_1^{\xi_1},t_3^{\xi_1})=(t_1,t_2,t_3)$，则 $t_3^{\xi_1}=t_3, t_1^{\xi_1}=t_2, t_2^{\xi_1}=t_1$，这与 T 是"WG"-群矛盾。同样的原理可说明 $(13)(\xi_1,\xi_1,\xi_1)$ 和 $(23)(\xi_1,\xi_1,\xi_1)$ 都不能稳定 s，矛盾。

于是这就证明了 $A_1\cong\mathbb{Z}_3$，从而 $\mathrm{Aut}(\Gamma)=X$。

基金项目

云南省科技厅应用基础研究项目(2019FD116)资助。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[2] 徐明曜. 有限群导引(下) [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[3] Pan, J.M. (2009) Locally Primitive Normal Cayley Graphs of Metacyclic Groups. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, Article No. R96. https://doi.org/10.37236/185

[4] Frucht, R. (1952) A One-Regular Graph of Degree Three. *Canadian Journal of Mathematics*, **4**, 240-247. https://doi.org/10.4153/CJM-1952-022-9

[5] Marušič, D. and Xu, M.Y. (1997) A 1/2-Transitive Graph of Valency 4 with a Nonsolvable Group of Automorphisms. *Journal of Graph Theory*, **25**, 133-138. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199706)25:2%3C133::AID-JGT5%3E3.0.CO;2-N

[6] Marušič, D. (1997) A Family of One-Regular Graphs of Valency 4. *European Journal of Combinatorics*, **18**, 59-64. https://doi.org/10.1006/eujc.1995.0076

[7] Marušič, D. and Pisanski, T. (2000) Symmetries of Hexagonal Molecular Graphs on the Torus. *Croatica Chemica Acta*, **73**, 969-981.

[8] Fang, X.G., Wang, J. and Xu, M.Y. (2002) On 1-Arc-Regular Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 785-791. https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0579

[9] Kwak, J.H. and Oh, J.M. (2006) One-Regular Normal Cayley Graphs on Dihedral Groups of Valency 4 or 6 with Cyclic Vertex Stabilizer. *Acta Mathematica Sinica* (*English Series*), **22**, 1305-1320. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0752-9

[10] Conder, M. and Feng, Y.Q. (2012) Arc-Regular Cubic Graphs of Order Four Times an Odd Integer. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **36**, 21-31. https://doi.org/10.1007/s10801-011-0321-5

[11] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2004) One-Regular Cubic Graphs of Order a Small Number Times a Prime or Prime Square. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **76**, 345-356. https://doi.org/10.1017/S1446788700009903

[12] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2009) Tetravalent One-Regular Graphs of Order 2pq. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **29**, Article No. 457. https://doi.org/10.1007/s10801-008-0146-z

[13] 丁梦琳. 平方自由阶素数度 2-弧正则图[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 369-373. https://doi.org/10.12677/aam.2018.74046

[14] Wang, G. and Gao, B. (2021) Finite Two-Arc-Regular Graphs Admitting an almost Simple Group. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **41**, 7-13. https://doi.org/10.3770/j.issn:2095-2651.2021.01.002

[15] Feng, Y.Q. and Li, Y.T. (2011) One-Regular Graphs of Square-Free Order of Prime Valency. *European Journal of Combinatorics*, **32**, 261-275. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.002

[16] Kwak, J.H., Kwon, Y.S. and Oh, J. (2008) Infinitely Many One-Regular Cayley Graphs on Dihedral Groups of Any Prescribed Valency. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **98**, 585-598. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2007.09.005

[17] Kwak, J.H. and Oh, J.M. (2004) Infinitely Many Finite One-Regular Graphs of Any Even Valency. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **90**, 185-191. https://doi.org/10.1016/S0095-8956(03)00084-4

[18] Pan, J.M., Huang, Z.H. and Peng, S.Q. (2016) On Arc-Regular Frobenius Metacirculants. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **94**, 20-29. https://doi.org/10.1017/S0004972715001811

[19] Wang, C.Q. and Xu, M.Y. (2006) Non-Normal One-Regular and 4-Valent Cayley Graphs of Dihedral Groups D_{2n}. *European Journal of Combinatorics*, **27**, 750-766. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.12.007

[20] Nuzhin, Y.N. (1992) Generating Triples of Involutions of Alternating Groups. *Mathematical Notes*, **51**, 389-392. https://doi.org/10.1007/BF01250552

[21] Lucchini, A. and Tamburini, M.C. (1999) Classical Groups of Large Rank as Hurwitz Groups. *Journal of Algebra*, **219**, 531-546. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.7911

[22] Xu, M.Y. (1998) Automorphism Groups and Isomorphisms of Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **182**, 309-319. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00152-0

[23] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/S0305004100023720

[24] Scott, L.L. (1980) Representations in Characteristic *p*. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **37**, 319-331. https://doi.org/10.1090/pspum/037/604599

[25] Liebeck, M.W., Praeger, C.E. and Saxl, J. (1987) A Classification of the Maximal Subgroups of the Finite Alternating and Symmetric Groups. *Journal of Algebra*, **111**, 365-383. https://doi.org/10.1016/0021-8693(87)90223-7