Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1493-1500
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129163

一类含指数项差分方程模型的分析

王 容

重庆师范大学，数学科学学院，重庆

收稿日期：2022年8月17日；录用日期：2022年9月15日；发布日期：2022年9月22日

摘 要

本文我们主要研究一类含有指数项二维差分方程模型的动力学行为。通过计算，我们首先给出了该二维系统不动点的存在性。其次，利用线性部分特征值与稳定性的关系得到了不动点的类型、双曲不动点的稳定性以及相应的参数条件。最后，结合中心流形定理和分岔理论相关知识讨论了非双曲不动点的分岔现象，从而得到产生flip分岔的条件。

关键词

动力学行为，不动点，中心流形定理，分岔理论，Flip分岔

Analysis of a Class of Difference Equation Models with Exponential Term

Rong Wang

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Aug. 17^{th}, 2022; accepted: Sep. 15^{th}, 2022; published: Sep. 22^{nd}, 2022

Abstract

In this paper, we mainly study the dynamic behavior of a class of two-dimensional

文章引用: 王容. 一类含指数项差分方程模型的分析[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1493-1500.
DOI: 10.12677/pm.2022.129163

difference equation models with exponential terms. Through calculation, we firstly give the existence of the fixed point of this two-dimensional system. Secondly, the type of fixed point, the stability of the hyperbolic fixed point and the corresponding parameter conditions are obtained by using the relationship between the eigenvalues of the linear part and the stability. Finally, the bifurcation phenomenon of non-hyperbolic fixed point is discussed by combining the knowledge of center manifold theorem and bifurcation theory, and the conditions for generating flip bifurcation are obtained.

Keywords

Dynamic Behavior, Fixed Point, Center Manifold Theorem, Bifurcation Theory, Flip Bifurcation

1. 引言

差分方程在现实生活中的应用越来越广泛，特别是在生物学、物理学、经济学、工程学等领域。近些年来，含有指数项差分方程的研究更是极大地激起了人们的兴趣，例如文献 [1–5]对含指数项差分方程解的有界性、不变性、全局行为等进行了研究，文献 [6–8]对含指数项差分方程的分岔现象进行了研究。但是，在这些相关文章中，由于差分方程组中含有指数项很可能导致方程组的解没有显示表达，因此，极少有文章研究具有非零平衡解的相关性质。可以想到，如果差分方程组有非零平衡解，其动力学行为是否会更加丰富？于是，本文将考虑一类含指数项的差分方程组

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_{n-1} + bx_n e^{-y_n}, \\ y_{n+1} = cy_{n-1} + dy_n e^{-x_n}, \end{cases} \tag{1.1}$$

的动力学行为，这里，n为非负整数，参数a, b, c, d是正常数，初始值x_0,x_{-1},y_0,y_{-1}是非负实数。我们知道，系统(1.1)定义了一个平面映射$F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$

$$F(x, y) \longrightarrow (ax + bxe^{-y}, cy + dye^{-x})^T, \tag{1.2}$$

这里，$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ 并且$(x, y)^T$ 记为向量(x, y)的转置。

2. 主要结果

首先，我们给出系统(1.2)不动点存在性和所有不动点类型、双曲不动点稳定性以及相应的参数条件。

定理1. 系统(1.2)至多有两个不动点$E_0(0,0)$, $E_1(ln\frac{d}{1-c}, ln\frac{b}{1-a})$，其中$E_1$当且仅当$0<a<1, 0<c<1$ 成立时存在。表 1给出了不动点E_0的定性性质。对于不动点E_1而言，当满足条件$a+b=1$或者$c+d=1$或者$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}=4$时，它是非双曲的；当$0<a+b<1, 0<c+d<1$(or $a+b>1, c+d>1$),且$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}\neq 4$时，它是一个鞍点；当$0<a+b<1, c+d>1$(or $a+b>1, 0<c+d<1$) 时，它是一个不稳定的焦点。

Table 1. Qualitative properties of the fixed point E_0

表 1. 不动点E_0的定性性质

条件		类型
$0<a+b<1$	$0<c+d<1$	稳定结点
	$c+d=1$	非双曲
	$c+d>1$	鞍点
$a+b=1$	$c+d>0$	非双曲
$a+b>1$	$0<c+d<1$	鞍点
	$c+d=1$	非双曲
	$c+d>1$	不稳定结点

证明： 根据映射(1.2)，不动点满足以下关系

$$x=ax+bxe^{-y}, y=cy+dye^{-x}.$$

计算可知系统(1.2)至多有两个不动点$E_0(0,0)$, $E_1(ln\frac{d}{1-c}, ln\frac{b}{1-a})$，其中$E_1$当且仅当$0<a<1$, $0<c<1$ 成立时存在。我们用$J(x,y)$表示系统(1.2)在(x,y) 处的雅可比矩阵，则

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} a+be^{-y} & -bxe^{-y} \\ -dye^{-x} & c+de^{-x} \end{pmatrix}.$$

在不动点$E_0(0,0)$处，系统(1.2)的雅可比矩阵为

$$J(0,0)=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix},$$

对应的两个特征值分别为$a+b$,$c+d$，由特征值与稳定性的关系可得到表 1中的结论。

在不动点$E_1(ln\frac{d}{1-c}, ln\frac{b}{1-a})$处，系统(1.2)的雅可比矩阵

$$J(ln\frac{d}{1-c}, ln\frac{b}{1-a}) = \begin{pmatrix} 1 & (a-1)ln\frac{d}{1-c} \\ (c-1)ln\frac{b}{1-a} & 1 \end{pmatrix},$$

对应的两个特征值分别为

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}}, \lambda_2 = 1 + \sqrt{(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}}.$$

由特征值与稳定性的关系可知，当$a+b=1$或者$c+d=1$时，$\lambda_{1,2}=1$, 则不动点E_1是非双曲的；当$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}=4$时，$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$，则不动点E_1 是非双曲的。另一方面，对于双曲的情形：

(1)如果$0<a+b<1, 0<c+d<1$,且$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}\neq 4$, 则$ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}>0$, 即$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}>0$, 可以得到两实特征值

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}}, \lambda_2 = 1 + \sqrt{(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}},$$

于是，$\lambda_1<1$(且$\lambda_1\neq -1$),$\lambda_2>1$ 则E_1是鞍点。

(2)如果$0<a+b<1, c+d>1$,则$ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}<0$, 即$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}<0$, 可以得到两复特征值

$$\lambda_1 = 1 - i\sqrt{-(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}},\ \lambda_2 = 1 + i\sqrt{-(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}},$$

由此可见, $\lambda_{1,2}$的模长均大于1，因此，E_1是一个不稳定的焦点。

(3)如果$a+b>1, 0<c+d<1$,同(2)，E_1是一个不稳定的焦点。

(4)如果$a+b>1, c+d>1$,且$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c}\neq 4$, 同(1)，则$E_1$是鞍点。证毕。

在上面的过程中，我们分析了不动点的存在情况以及双曲不动点的有关性质，下面我们开始讨论非双曲不动点的分岔现象，以及产生分岔的参数条件。考虑$d=d_0+\varepsilon_0$, 且d_0满足$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d_0}{1-c}=4$, 其中，$\varepsilon_0$ 作为分岔参数。记

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2}(a+(1-a)(\frac{-1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c})^2 + \frac{(a-1)^2}{4}\cdot(1+(-\frac{1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c})ln\frac{d_0}{1-c}, \\ \rho_2 &= \frac{1}{d_0 ln\frac{d_0}{1-c}}\cdot\frac{-1-a+c(1-a)ln\frac{d_0}{1-c}}{2}. \end{aligned}$$

定理2. 如果$d=d_0+\varepsilon_0$和$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d_0}{1-c}=4$, ε_0充分小，且$\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$，则系统(1.2)在不动点$E_1(ln\frac{d}{1-c}, ln\frac{b}{1-a})$附近会发生flip 分岔。

证明： 为了将系统(1.2)的不动点E_1移到原点，我们作变换

$$\begin{cases} x = ln\frac{d}{1-c} + \xi, \\ y = ln\frac{b}{1-a} + \eta, \end{cases}$$

系统(1.2)变为：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a\xi + (1-a)(\xi + ln\frac{d}{1-c})e^{-\eta} + (a-1)ln\frac{d}{1-c} \\ c\eta + (1-c)(\eta + ln\frac{b}{1-a})e^{-\xi} + (c-1)ln\frac{b}{1-a} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

为了方便，我们将(2.1)右边按泰勒公式展开

$$\begin{aligned} & a\xi + (1-a)(\xi + ln\frac{d}{1-c})e^{-\eta} + (a-1)ln\frac{d}{1-c} \\ = & \ a\xi + (1-a)\xi + (a-1)\xi\eta + (a-1)ln\frac{d}{1-c}\eta + \frac{1-a}{2}ln\frac{d}{1-c}\eta^2 + \mathcal{O}(3). \end{aligned}$$

这里，$\mathcal{O}(3)$表示阶数大于2的项。同理，

$$\begin{aligned} & c\eta + (1-c)(\eta + ln\frac{b}{1-a})e^{-\xi} + (c-1)ln\frac{b}{1-a} \\ = & \ c\eta + (1-c)\eta + (c-1)\xi\eta + (c-1)ln\frac{b}{1-a}\xi + \frac{1-c}{2}ln\frac{b}{1-a}\xi^2 + \mathcal{O}(3). \end{aligned}$$

即系统(2.1)等价于

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi + (a-1)\xi\eta + (a-1)ln\frac{d}{1-c}\eta + \frac{1-a}{2}ln\frac{d}{1-c}\eta^2 \\ \eta + (c-1)\xi\eta + (c-1)ln\frac{b}{1-a}\xi + \frac{1-c}{2}ln\frac{b}{1-a}\xi^2 \end{pmatrix} + h.o.t., \tag{2.2}$$

现在考虑$d = d_0 + \varepsilon_0$,且$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d_0}{1-c} = 4$, 其中，$\varepsilon_0$ 作为分岔参数，$\varepsilon_0 = 0$ 为分岔值。此时，映射(2.2)成为

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & (a-1)ln\frac{d_0}{1-c} \\ (c-1)ln\frac{b}{1-a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\xi,\eta,\varepsilon_0) \\ g(\xi,\eta,\varepsilon_0) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

这里，

$$f(\xi,\eta,\varepsilon_0) = (a-1)\xi\eta + (a-1)ln\frac{d_0+\varepsilon_0}{d_0}\eta + \frac{1-a}{2}ln\frac{d_0+\varepsilon_0}{1-c}\eta^2 + \mathcal{O}(3),$$

$$g(\xi,\eta,\varepsilon_0) = (c-1)\xi\eta + \frac{1-c}{2}ln\frac{b}{1-a}\xi^2 + \mathcal{O}(3).$$

特征值$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, 对应的特征向量为$(\frac{1-a}{2}ln\frac{d_0}{1-c}, 1)^T$, $(\frac{a-1}{2}ln\frac{d_0}{1-c}, 1)^T$, 作线性变换

$$(\xi,\eta)^T = H(u,v)^T,$$

则系统(2.3)变为：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + H^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{f}(u,v,\varepsilon_0) \\ \widetilde{g}(u,v,\varepsilon_0) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

这里，

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{2} ln \frac{d_0}{1-c} & \frac{a-1}{2} ln \frac{d_0}{1-c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-a) ln \frac{d_0}{1-c}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{(1-a) ln \frac{d_0}{1-c}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(u,v,\varepsilon_0) = {} & (a-1) ln \frac{d_0+\varepsilon_0}{d_0}(u+v) + (\frac{1-a}{2} ln \frac{d_0+\varepsilon_0}{1-c} - \frac{(1-a)^2}{2} ln \frac{d_0}{1-c}) u^2 \\ & + (\frac{1-a}{2} ln \frac{d_0+\varepsilon_0}{1-c} + \frac{(1-a)^2}{2} ln \frac{d_0}{1-c}) v^2 + (1-a) ln \frac{d_0+\varepsilon_0}{1-c} uv, \end{aligned}$$

$$\widetilde{g}(u,v,\varepsilon_0) = (1-a)(-\frac{1}{2}+c) ln \frac{d_0}{1-c} u^2 + (1-a)(\frac{3}{2}-c) ln \frac{d_0}{1-c} v^2 + (a-1) ln \frac{d_0}{1-c} uv,$$

对应的悬挂系统

$$\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon_0 \\ v \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -u \\ \varepsilon_0 \\ 3v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{f}(u,v,\varepsilon_0) \\ 0 \\ \widehat{g}(u,v,\varepsilon_0) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

这里，

$$\widehat{f}(u,v,\varepsilon_0) = \frac{1}{(1-a) ln \frac{d_0}{1-c}} \widetilde{f}(u,v,\varepsilon_0) + \frac{1}{2} \widetilde{g}(u,v,\varepsilon_0),$$

$$\widehat{g}(u,v,\varepsilon_0) = \frac{-1}{(1-a) ln \frac{d_0}{1-c}} \widetilde{f}(u,v,\varepsilon_0) + \frac{1}{2} \widetilde{g}(u,v,\varepsilon_0).$$

设映射(2.5)在原点附近有一个二维中心流形

$$v = h(u,\varepsilon_0) = h_1 u^2 + h_2 u \varepsilon_0 + h_3 \varepsilon_0^2 + \mathcal{O}(3),$$

根据文献 [9] 可知，这些系数h_1, h_2, h_3取决于方程

$$\aleph(h(u,\varepsilon_0)) = h(-u + \widehat{f}(u, h(u,\varepsilon_0), \varepsilon_0), \varepsilon_0) - 3h(u,\varepsilon_0) - \widehat{g}(u, h(u,\varepsilon_0), \varepsilon_0) = 0,$$

比较$u^2, u\varepsilon_0, \varepsilon_0^2$的系数，我们可以得到

$$h_1 = \frac{1}{4}(a-1)(1+(-\frac{1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c}), h_2 = \frac{-1}{4d_0 ln\frac{d_0}{1-c}}, h_3 = 0.$$

于是，

$$v = h(u,\varepsilon_0) = \frac{1}{4}(a-1)(1+(-\frac{1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c})\cdot u^2 - \frac{1}{4d_0 ln\frac{d_0}{1-c}}\cdot u\varepsilon_0 + \mathcal{O}(3), \tag{2.6}$$

记$p = \frac{ln(d_0+\varepsilon_0)-lnd_0}{lnd_0 - ln(1-c)}$, 将式子(2.6)代入系统(2.5)第一二个方程，得到

$$\begin{pmatrix} u \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -u \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^*(u,\varepsilon_0) \\ 0 \end{pmatrix} + h.o.t., \tag{2.7}$$

这里，

$$\begin{aligned} f^*(u,\varepsilon_0) \quad &= \quad -pu + (-ph_1 + \frac{1}{2}p + \frac{a-1}{2} + \frac{1-a}{8d_0}\varepsilon_0 + \frac{(1-a)(\frac{-1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c}}{2})u^2 \\ &\quad + \frac{p}{4d_0 ln\frac{d_0}{1-c}}u\varepsilon_0 + \frac{a-1}{2}ln\frac{d_0}{1-c}h_1 u^3, \end{aligned}$$

系统(2.7)定义了一个一维映射$u \mapsto \phi_{\varepsilon_0}(u)$, 这里

$$\phi_{\varepsilon_0}(u) = -u + f^*(u,\varepsilon_0) + h.o.t.. \tag{2.8}$$

计算可得

$$\begin{aligned} \rho_1 \quad &= \quad [\frac{1}{2}(\frac{\partial^2\phi_{\varepsilon_0}}{\partial u^2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{\partial^3\phi_{\varepsilon_0}}{\partial u^3})]|_{(0,0)} \\ &= \quad \frac{1}{2}(a+(1-a)(\frac{-1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c})^2 + \frac{(a-1)^2}{4}\cdot(1+(-\frac{1}{2}+c)ln\frac{d_0}{1-c})ln\frac{d_0}{1-c}, \\ \rho_2 \quad &= \quad [\frac{\partial\phi_{\varepsilon_0}}{\partial\varepsilon_0}\frac{\partial^2\phi_{\varepsilon_0}}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\phi_{\varepsilon_0}}{\partial u\partial\varepsilon_0}]|_{(0,0)} = \frac{1}{d_0 ln\frac{d_0}{1-c}}\cdot\frac{-1-a+c(1-a)ln\frac{d_0}{1-c}}{2}. \end{aligned}$$

只要$\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$，则文献 [10]中定理3.5.1 的非退化条件和横截条件(F_1),(F_2) 成立，这意味着此时系统(1.2) 在不动点$E_1(ln\frac{d}{1-c}, ln\frac{b}{1-a})$ 附近会发生flip 分岔。证毕。

3. 结论

本文通过线性部分特征值与稳定性的关系讨论了双曲不动点的类型及稳定性，利用中心流形定理和分岔理论得到了非双曲不动点产生flip 分岔的条件。但是，在这篇文章中，其实我们仅仅只研究了不动点E_1在条件$(1-a)(1-c)ln\frac{b}{1-a}ln\frac{d}{1-c} = 4$下的flip分岔情形，然而在定理1中，我们可以看出不动点E_0, E_1还有几类其他非双曲的情形，由于它们的余维较高，在这里我们暂时没有继续讨论。例如，对于E_0而言，当$a+b=1$,$c+d \neq 1$时，我们可以利用定理2中的方法可知系统(1.2)限制

在中心流形上映射的非退化条件不满足，分岔是高余维的。因此，在后面的工作中，我们可以尝试继续考虑高余维的情形，或许会有更加丰富有趣的动力学行为。

参考文献

[1] Elettreby, M.F. and El-Metwally, H. (2013) On a System of Difference Equations of an Economic Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**, Article ID: 405628. https://doi.org/10.1155/2013/405628

[2] Khan, A.Q. and Qureshi, M.N. (2016) Stability Analysis of a Discrete Biological Model. *International Journal of Biomathematics*, **9**, Article ID: 1650021. https://doi.org/10.1142/S1793524516500212

[3] Psarros, N., Papaschinopoulos, G. and Schinas, C.J. (2018) On the Stability of Some Systems of Exponential Difference Equations. *Opuscula Mathematica*, **38**, 95-115. https://doi.org/10.7494/OpMath.2018.38.1.95

[4] Psarros, N., Papaschinopoulos, G. and Schinas, C.J. (2017) Study of the Stability of a 3×3 System of Difference Equations Using Centre Manifold Theory. *Applied Mathematics Letters*, **64**, 185-192. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.09.002

[5] Dilip, D.S. and Mathew, S.M. (2021) Dynamics of a Second-Order Nonlinear Difference System with Exponents. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **29**, Article No. 10. https://doi.org/10.1186/s42787-021-00119-6

[6] Din, Q., Elabbasy, E.M., Elsadany, A.A., *et al.* (2019) Bifurcation Analysis and Chaos Control of a Second-Order Exponential Difference Equation. *Filomat*, **33**, 5003-5022. https://doi.org/10.2298/FIL1915003D

[7] Mylona, C., Papaschinopoulos, G. and Schinas, C.J. (2021) Neimark-Sacker, Flip, and Transcritical Bifurcation in a Close to Symmetric System of Difference Equations with Exponential Terms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 10210-10224. https://doi.org/10.1002/mma.7400

[8] Mylona, C., Papaschinopoulos, G. and Schinas, C.J. (2021) Stability and Flip Bifurcation of a Three Dimensional Exponential System of Difference Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 4316-4329. https://doi.org/10.1002/mma.7031

[9] Carr, J. (1981) Applications of Center Manifold Theory. Springer, New York.

[10] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2