Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1783-1793
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210192

Hans汉斯

一道中考题的解法赏析

杨艳萍

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年9月20日；录用日期：2022年10月18日；发布日期：2022年10月26日

摘 要

利用“截长补短”、旋转等方法构造全等三角形、平行四边形以及相似三角形得到了黔东南州2021年一道中考题的九种证明方法。

关键词

知识连接，一题多解，好问题

Appreciation of the Solution of a Question of Senior High School Entrance Examination

Yanping Yang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 20th, 2022; accepted: Oct. 18th, 2022; published: Oct. 26th, 2022

Abstract

The nine proof methods of a question of senior high school entrance examination in Qiandongnan 2021 were obtained by using methods such as “taking from the long to add to the short” and rotation to construct congruent triangles, parallelograms, and similar triangles.

Keywords

Knowledge Connection, Multiple Solutions to One Problem, Good Questions

文章引用: 杨艳萍. 一道中考题的解法赏析[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1783-1793.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210192

1. 引言

“截长补短”法中的“截长”是指在较长的线段上截取一条线段，使之等于已知的较短的线段；“补短”是指延长较短的线段，使之等于较长的线段[1]。在初中的几何题中，“截长补短”法常用于证明三角形全等[2]或证明线段和差问题[3] [4]。在线段和差问题中，常构造全等三角形，用三角形全等的性质，最终求得线段的和差关系[5]。用“截长补短”法解几何题，这其中也会运用到旋转思想[6]以及等边三角形的判定和性质[7]。在具体问题中运用此方法，需要结合已知条件，灵活的运用特殊三角形、特殊四边形的判定和性质以及图形的旋转。

“截长补短”法对学生来说并不陌生，但是学生在遇到线段和差的具体问题中常被如何“截长”，如何“补短”所困扰。贵州省黔东南州 2021 年中考数学试题第 25 题(2) ① 问考查的是线段求和问题，文章运用“截长补短”法与旋转思想，不仅构造了全等三角形，还构造了平行四边形和相似三角形，利用其性质求证该题，最终得到了该题的九种证明方法。不同的证明方法用到了初中“图形与几何”部分的不同知识点，且各种解法步骤相对均衡。该题一题多解，有助于学生在这一个题中更好地复习相应知识点，同时提高学生灵活运用“截长补短”法解决问题的能力，笔者认为该题为一个好的数学问题，值得介绍分享。

2. 试题呈现

题目(2021 年贵州 • 黔东南州卷)在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$。

[探究发现]

(1) 如图 1，若 $\angle BAD = 120^\circ$，$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$。

求证：$AD + AB = AC$；

[拓展迁移]

(2) 如图 2，若 $\angle BAD = 120^\circ$，$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$。

① 猜想 AB、AD、AC 三条线段的数量关系，并说明理由；

② 若 $AC = 10$，求四边形 $ABCD$ 的面积。

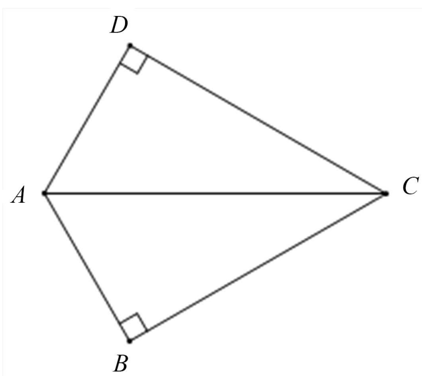

Figure 1. Question (1)
图 1. 问题(1)

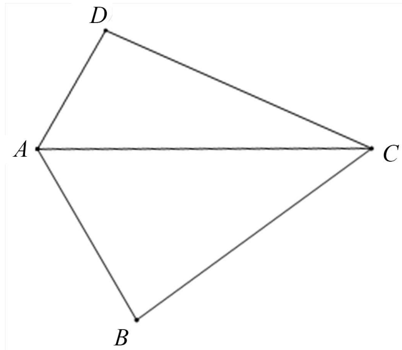

Figure 2. Question (2)
图 2. 问题(2)

3. 猜想结论

第(1)问根据已知条件比较容易得证 $AC = AD + AB$，这里不做讨论。第(2)问的①是猜想线段 AB、AD、AC 之间的数量关系并证明结论。猜想第(2)题中线段 AB、AD、AC 之间的数量关系时，学生可以借助第(1)问所得结论，猜想 $AC = AD + AB$，然后进行严格证明。该小题解决了，第(2)问的②小题也就随之求出。

4. 解法赏析

4.1. 用“截长补短”法[3] [8] [9]与旋转思想[6]，构造全等三角形，用全等三角形的性质证明

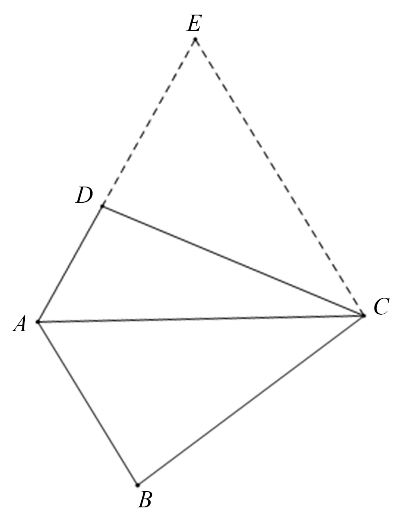

Figure 3. Construction of congruent triangles by method of adding the short
图 3. 补短法构造全等三角形

证法 1：如图 3，要证 $AC = AD + AB$，延长线段 AD 至点 E，使得 $AE = AC$，只需证 $AB = DE$ 即可。连接 EC，要证 $AB = DE$，只需证 ΔABC 与 ΔEDC 全等。

延长 AD 至点 E，使得 $AE = AC$，连接 EC。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 $\angle DAC = \angle BAC = 60^\circ$。

所以 ΔACE 为等边三角形。

所以 $\angle E = 60^\circ$ 。

因为 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$，

所以 $\angle ACD + \angle BCA = 60^\circ$ 。

又因为 $\angle ACD + \angle DCE = 60^\circ$，

所以 $\angle BCA = \angle DCE$ 。

在 ΔABC 和 ΔEDC 中，

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle E \\ AC = EC \\ \angle BCA = \angle DCE \end{cases}$$

所以 $\Delta ABC \cong \Delta EDC$ 。

所以 $AB = DE$ 。

所以 $AC = AD + AB$ 。

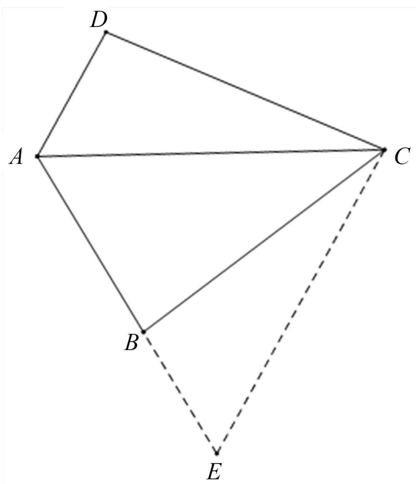

Figure 4. Construction of congruent triangles by the method of adding the short
图 4. 补短法构造全等三角形

证法 2： 如图 4，要证 $AC = AD + AB$ ，延长线段 AB 至点 E，使得 $AC = AE$ ，只需证 $AD = BE$ 即可。连接 EC，要证 $AD = BE$ ，只需证 ΔADC 与 ΔEBC 全等。

延长 AB 至点 E，使 $AE = AC$ ，连接 EC。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 $\angle DAC = \angle BAC = 60^\circ$ 。

所以 ΔAEC 为等边三角形。

所以 $\angle E = 60^\circ$ 。

因为 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$，

所以 $\angle BCA + \angle ACD = 60^\circ$ 。

因为 $\angle BCA + \angle ECB = 60^\circ$，

所以 $\angle ACD = \angle ECB$ 。

在 ΔADC 和 ΔEBC 中，

$$\begin{cases}\angle DAC = \angle E \\ AC = EC \\ \angle ACD = \angle ECB\end{cases}$$

所以 $\Delta ADC \cong \Delta EBC$ 。

所以 $AD = BE$ 。

所以 $AC = AD + AB$ 。

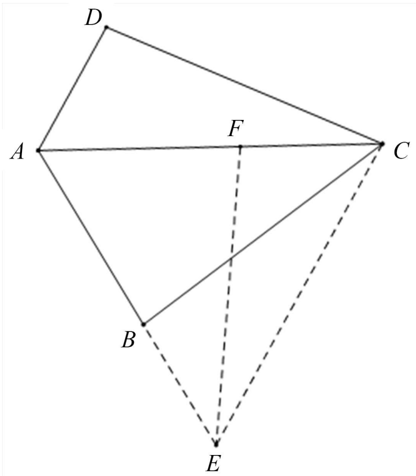

Figure 5. Construction of congruent triangles by method of cutting the long
图 5. 截长法构造全等三角形

证法 3：如图 5，要证 $AC = AD + AB$，在线段 AC 上截取 $AF = AB$，只需证 $AD = FC$ 即可。要证 $AD = FC$，可构造一个 ΔCFE，只需证 ΔADC 与 ΔCFE 全等。

延长 AB 至点 E，使得 $AE = AC$ 。

在 AC 上截取 $AF = AB$，连接 EF、EC。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 $\angle BAC = 60^\circ$ 。

易证 $\Delta AFE \cong \Delta ABC$，

所以 $\angle AFE = \angle ABC$ 。

所以 $\angle EFC = 180^\circ - \angle ABC$ 。

又因为 $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$，

所以 $\angle EFC = \angle ADC$ 。

因为 $AE = AC$，所以 ΔAEC 为等边三角形。

所以 $\angle ACE = 60^\circ$ 。

在 ΔADC 和 ΔCFE 中，

$$\begin{cases}\angle ADC = \angle CFE \\ \angle DAC = \angle FCE \\ AC = CE\end{cases}$$

所以 $\Delta ADC \cong \Delta CFE$。

所以 $AD = CF$。

所以 $AC = AD + AB$。

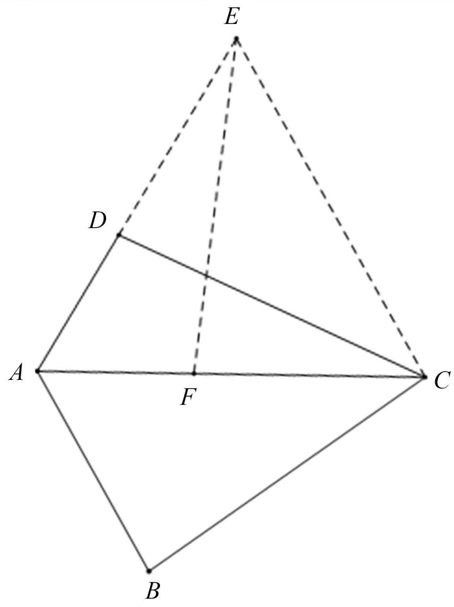

Figure 6. Construction of congruent triangles by method of cutting the long

图 6. 截长法构造全等三角形

证法 4： 如图 6，要证 $AC = AD + AB$，在线段 AC 上截取 $AF = AD$，只需证 $AB = FC$ 即可。要证 $AB = FC$，可构造一个 ΔCEF，只需证 ΔACB 与 ΔCEF 全等。

延长 AD 至点 E，使得 $AE = AC$。

在 AC 上截取 $AF = AD$，连接 EF、EC。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 $\angle DAC = 60^\circ$。

易证 $\Delta AFE \cong \Delta ADC$。

所以 $\angle AFE = \angle ADC$。

所以 $\angle EFC = 180^\circ - \angle ADC$。

又因为 $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$，

所以 $\angle EFC = \angle ABC$。

因为 $AE = AC$，所以 ΔAEC 为等边三角形。

所以 $\angle ACE = 60^\circ$。

在 ΔACB 和 ΔCEF 中，

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle FCE \\ \angle CBA = \angle EFC \\ AC = CE \end{cases}$$

所以 $\Delta ACB \cong \Delta CEF$。

所以 $AB=FC$ 。

所以 $AC=AD+AB$ 。

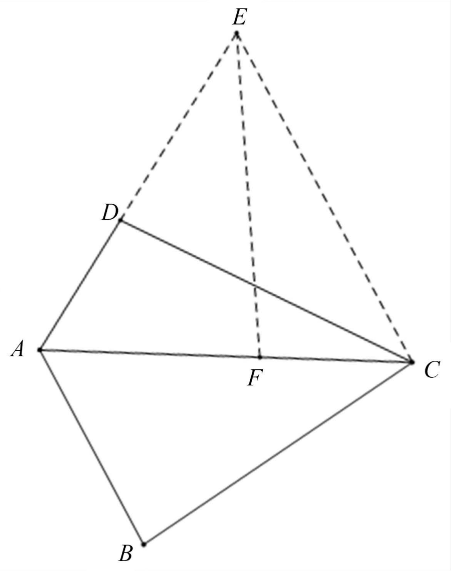

Figure 7. Rotation method for constructing congruent triangles

图 7. 旋转法构造全等三角形

证法 5：如图 7，要证 $AC=AD+AB$，将 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到 ΔAFE，由已知条件及旋转可知，ΔAFE 的边 AF 落在线段 AC 上，只需证 $AD=FC$ 即可。连接 EC，要证 $AD=FC$，只需证 ΔDAC 与 ΔFCE 全等。

将 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到 ΔAFE，连接 EC。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD=120^\circ$，

所以 $\angle BAC=\angle CAD=60^\circ$ 。

所以 ΔAFE 的边 AF 落在线段 AC 上，边 AE 落在线段 AD 的延长线上。

因为 $AC=AE$，

所以 ΔACE 是等边三角形。

所以 $\angle AEF+\angle FEC=60^\circ$， $CE=AC$ 。

因为 $\angle ACB+\angle ACD=60^\circ$，

由旋转可知 $\angle AEF=\angle ACB$，

所以 $\angle CEF=\angle ACD$ 。

在 ΔDAC 和 ΔFCE 中，

$$\begin{cases}\angle DAC=\angle FCE\\ AC=CE\\ \angle ACD=\angle CEF\end{cases}$$

所以 $\Delta DAC\cong\Delta FCE$ 。

所以 $AD=CF$ 。

所以 $AC=AD+AB$ 。

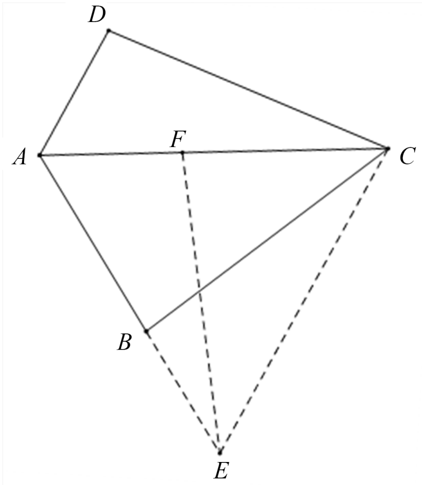

Figure 8. Rotation method for constructing congruent triangles
图 8. 旋转法构造全等三角形

证法 6： 如图 8，要证 $AC = AD + AB$，将 ΔADC 绕点 A 顺时针旋转 60°，得到 ΔAFE，由已知条件及旋转可知，ΔAFE 的边 AF 落在线段 AC 上，只需证 $AB = FC$ 即可。连接 EC，要证 $AB = FC$，只需证 ΔABC 与 ΔCFE 全等。

将 ΔADC 绕点 A 顺时针旋转 60°，得到 ΔAFE，连接 EC。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 $\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$。

所以 ΔAFE 的边 AF 落在线段 AC 上，边 AE 落在线段 AB 的延长线上。

因为 $AE = AC$，

所以 ΔAEC 为等边三角形。

所以 $\angle AEF + \angle FEC = 60^\circ$，$CE = AC$。

因为 $\angle BCA + \angle ACD = 60^\circ$，

由旋转可知：$\angle AEF = \angle ACD$，

所以 $\angle FEC = \angle BCA$。

在 ΔABC 和 ΔCFE 中，

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle FCE \\ \angle BCA = \angle FEC \\ AC = CE \end{cases}$$

所以 $\Delta ABC \cong \Delta CFE$。

所以 $AB = FC$。

所以 $AC = AD + AB$。

4.2. 构造平行四边形，用平行四边形的性质证明

证法 7： 如图 9，将 ΔABC 绕点 A 顺时针旋转 60°，得到 $\Delta AB'C'$，由已知条件及旋转可知，$\Delta AB'C'$ 的边 AB' 在线段 DA 的延长线上，要证 $AC = AD + AB$，只需证 $DB' = AC$。连接 CC'，易证 $CC' = AC$，则只需证 $DB' = CC'$。要证 $DB' = CC'$，只需证四边形 $B'C'CD$ 是平行四边形即可。

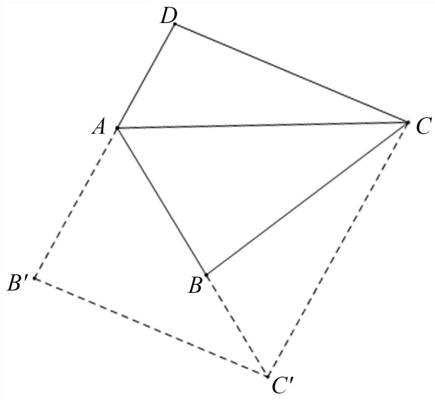

Figure 9. Constructing a parallelogram
图 9. 构造平行四边形

将 ΔABC 绕点 A 顺时针旋转 60°，得到 $\Delta AB'C'$，连接 CC'。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 AB' 在线段 DA 的延长线上。

所以 $\angle CAC' = 60^\circ$。

所以 $\Delta CAC'$ 为等边三角形。

所以 $CC' = AC$， $\angle CC'A = 60^\circ$。

由旋转可知： $\angle C'AB' = \angle CAC' = 60^\circ$，

$\angle AB'C' = \angle ABC$， $AB' = AB$。

所以 $DB' \parallel CC'$。

又因为 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$，

所以 $\angle AB'C' + \angle ADC = 180^\circ$。

所以 $DC \parallel B'C'$。

所以四边形 $B'C'CD$ 是平行四边形。

所以 $DB' = CC'$。

所以 $AC = AD + AB$。

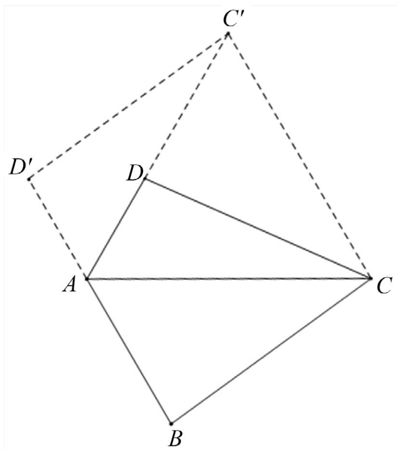

Figure 10. Constructing a parallelogram
图 10. 构造平行四边形

证法 8：如图 10，将 ΔADC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到 $\Delta AD'C'$，由已知条件及旋转可知，$\Delta AD'C'$ 的边 AD' 在线段 BA 的延长线上，要证 $AC = AD + AB$，只需证 $D'B = AC$。连接 CC'，易证 $C'C = AC$，则只需证 $D'B = C'C$。要证 $D'B = C'C$，只需证四边形 $BCC'D'$ 是平行四边形即可。

将 ΔADC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到 $\Delta AD'C'$，连接 CC'。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 AD' 在线段 BA 延长线上。

所以 $\angle CAC' = 60^\circ$。

所以 $\Delta CAC'$ 为等边三角形。

所以 $CC' = AC$，$\angle CC'A = 60^\circ$。

由旋转可知：$\angle C'AD' = \angle CAC' = 60^\circ$，

$\angle AD'C' = \angle ADC$，$AD' = AD$。

所以 $D'B \parallel C'C$。

又因为 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$，

所以 $\angle ABC + \angle AD'C' = 180^\circ$。

所以 $D'C' \parallel BC$。

所以四边形 $BCC'D'$ 是平行四边形。

所以 $D'B = C'C$。

所以 $AC = AD + AB$。

4.3. 构造相似三角形，用相似三角形的性质证明[10]

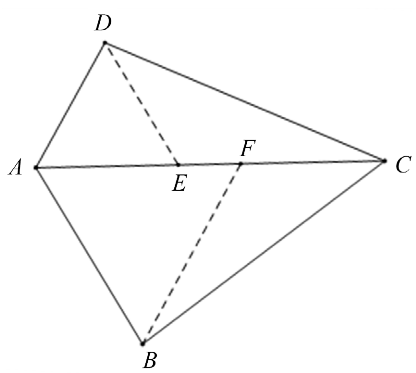

Figure 11. Constructing similar triangles
图 11. 构造相似三角形

证法 9：如图 11，在线段 AC 上分别截取 $AE = AD$、$AF = AB$，连接 DE、BF。易证 $\Delta DEC \backsim \Delta CFB$，由相似三角形的性质可知 $\dfrac{DE}{CF} = \dfrac{EC}{FB}$，分别用 AD、$AC - AB$、$AC - AD$ 及 AB 代换 DE、CF、EC 及 FB，就能证明 $AC = AB + AD$。

在线段 AC 上分别截取 $AE = AD$、$AF = AB$。连接 DE、BF。

因为 AC 平分 $\angle BAD$ 且 $\angle BAD = 120^\circ$，

所以 $\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$。

所以 ΔADE、ΔABF 均为等边三角形。

所以 $DE = AE = AD$，$BF = AF = AB$。

所以 $\angle DEC = \angle CFB = 120^\circ$。

因为 $\angle ECD + \angle FCB = 60^\circ$，

又因为 $\angle ECD + \angle EDC = 60^\circ$,

所以 $\angle EDC = \angle FCB$。

所以 $\Delta DEC \backsim \Delta CFB$。

所以 $\frac{DE}{CF} = \frac{EC}{FB}$。

因为 $CF = AC - AF = AC - AB$，

因为 $EC = AC - AE = AC - AD$，

所以 $\frac{AD}{AC - AB} = \frac{AC - AD}{AB}$。

所以 $AD \cdot AB = (AC - AD) \cdot (AC - AB)$。

$AC^2 = AC \cdot AB + AC \cdot AD$，

$AC = AB + AD$。

5. 小结

上述的几种证法用到了等边三角形的判定及性质、全等三角形的判定及性质、平行四边形的判定及性质以及相似三角形的判定及性质；还使用了“截长补短”、添加辅助线、图形旋转等技巧。这种问题，不仅能将学生所学的这些知识联系起来，同时还能培养学生的发散思维，提高分析问题和解决问题的能力。这也为用“截长补短”法去证明线段和差问题提供了另一个思路，根据题目的已知条件，除了能用该方法构造全等三角形外，能否构造特殊几何图形去证明线段的和差呢？例如特殊四边形、相似三角形。

一个好的数学问题应该在知识内容上具有广泛的关联性，在解法上拥有多维度的探索性，在情感态度上能激发学生兴趣和形成对数学灵活性的观念。

致　谢

非常感谢审稿人对本文提出宝贵的意见。

参考文献

[1] 沈善珍. 构造全等, 柳暗花明——例谈与全等三角形有关的辅助线作法[J]. 数学教学通讯, 2018(35): 40-41+80.

[2] 杨勇. “截长补短”法在全等三角形中的应用[J]. 数学教学通讯, 2016(14): 63-64.

[3] 史良. 一道期末统考题的解法探索[J]. 中学数学教学参考, 2021(32): 74-76.

[4] 徐策. 平面几何常见添加辅助线的方法[J]. 中学教学参考, 2020(2): 23-24.

[5] 吴梨娟. 论《截长补短法构造三角形全等》教学探讨[J]. 福建中学数学, 2020(9): 23-25.

[6] 陈柳. “截长补短”法应用中所蕴含的“旋转”思想[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2017(10): 42-43.

[7] 谭安利. P = M + N 型几何题证明思路探究[J]. 中小学数学(初中版), 2022(4): 39-40.

[8] 晏水兵. 浅谈“截长补短法”——一道全国联赛试题解法探讨[J]. 中小学数学(初中版), 2022(Z1): 60-61.

[9] 王松. 用“截长补短法”证明线段的和差关系[J]. 中学生数学, 2017(12): 10-11.

[10] 王玉瑞. 例析相似三角形在几何证明题中的妙用[J]. 中学数学教学参考, 2022(9): 41-43.