Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1954-1965
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211211

含有Hardy势和Sobolev临界指数的p-双调和方程解的多重性

侯梦梦*，魏公明#

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2022年10月15日；录用日期：2022年11月15日；发布日期：2022年11月24日

摘 要

本文研究如下带有Hardy势和Sobolev临界指数的p-双调和方程
$\Delta_p^2 u-\mu\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}=\lambda|u|^{q-2}u+|u|^{p^*-2}u,\quad x\in\Omega,\quad u=\frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad x\in\partial\Omega$，其中$\Omega\subset\mathbb{R}^N$是一个包含原点的开的有界集，$N>2p$，$p^*=\frac{Np}{N-2p}$，$p>1$，$\frac{\partial}{\partial n}$为外法向量导数。通过变分法证明了当$\lambda>0$时方程的多解性。

关键词

p-双调和方程，多解性，Hardy势，Sobolev临界指数

Multiplicity of Solutions for p-Biharmonic Equations with Hardy Potential and Sobolev Critical Exponents

Mengmeng Hou*, Gongming Wei#

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Oct. 15th, 2022; accepted: Nov. 15th, 2022; published: Nov. 24th, 2022

Abstract

In this paper, we study the following p-biharmonic equations with Hardy potential and Sobolev

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用：侯梦梦，魏公明．含有 Hardy 势和 Sobolev 临界指数的 p-双调和方程解的多重性[J]．理论数学, 2022, 12(11): 1954-1965. DOI: 10.12677/pm.2022.1211211

critical exponents $\Delta_p^2 u-\mu\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}=\lambda|u|^{q-2}u+|u|^{p^*-2}u$, in Ω, $u=\frac{\partial u}{\partial n}=0$, on $\partial\Omega$, where $\Omega\in\mathbb{R}^N$ is a bounded open set containing the origin, $N>2p$, $p^*=\frac{Np}{N-2p}$, $p>1$, $\frac{\partial}{\partial n}$ is the outward normal derivative. When $\lambda>0$, the multiplicity of solutions to above equation is established by using the variational methods.

Keywords

***p*-Biharmonic Equations, Multiple Solutions, Hardy Potential, Sobolev Critical Exponents**

1. 引言及主要结果

在本文，我们考虑如下带有 Hardy 势和 Sobolev 临界指数的 p-双调和方程

$$\begin{cases}\Delta_p^2 u-\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}=\lambda|u|^{q-2}u+|u|^{p^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\Delta_p^2 u=\Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个包含原点的有界开集，$\frac{\partial}{\partial n}$ 为外法向量导数。$N>2p$，$p>1$，$1<q<p$，$p^*=\frac{Np}{N-2p}$，λ 是一个实数，$0\le\mu<\bar{\mu}=\left(\frac{N(p-1)(N-2p)}{p^2}\right)^p$。

近来，带有奇异点的非线性椭圆型方程成为人们关注的热点。它来源于物理建模，如非牛顿流体、粘性流体、弹性力学、边界层等见[1]。同时具有奇异势的 p-双调和方程基态解、正解和变符号解的存在性和多重性得到了广泛的研究见[2]-[12]。

在[3]中 Dhifli-Alsaedi 研究了下列 p-双调和方程

$$\begin{cases}\Delta_p^2 u-\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}-\Delta_p u=g(x)u^{m-1}+\lambda f(x)u^{q-1}, & x\in\mathbb{R}^N,\\ u(x)>0, & x\in\mathbb{R}^N.\end{cases}\tag{1.2}$$

其中，$0<m<1<p<q<p_*$，$N>2p$，$\lambda>0$。当 f,g 满足适当的条件，作者运用纤维映射和 Nehari 流行证明了方程(1.2)至少有两个正解。本文与(1.2)不同之处在于研究的空间区域不同，并且方程(1.1)是一个临界问题。

在[13]中 Xie 和 Wang 研究了下列含有 Hardy 势的 p-双调和方程

$$\begin{cases}\Delta_p^2 u-\lambda\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}=f(x,u), & x\in\Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1.3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的包含原点的有界开集。$1<p<\frac{N}{2}$，$0\le\lambda<\bar{\lambda}=\left(\frac{N(p-1)(N-2p)}{p^2}\right)^p$，$\lambda>0$，$\frac{\partial}{\partial n}$ 为外法向量导数。非线性 $f(x,u)$ 满足下列条件：

(f_1) $f(x,u)$ 在 $\Omega\times\mathbb{R}$ 是连续的，且满足对 $x\in\Omega$，$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{|u|^{p^*-1}}=0$，$p^*=\frac{Np}{N-2p}$。

(f_2) 对任意的 $x\in\Omega$，$f(x,u)$ 满足 $\lim\limits_{u\to0}\frac{f(x,u)u}{|u|^p}=0$ 和 $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(x,u)u}{|u|^p}=+\infty$。

(f_3) 记 $G(x,t)=f(x,u)t-p\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$，对所有的 $x\in\Omega$，存在一个常数 $M\ge0$ 使得对任意的 $M\le|t_1|\le|t_2|$ 有 $G(x,t_1)\le G(x,t_2)$。

(f_4) $f(x,u)$ 关于 u 是奇的。

作者运用对称山路引理的方法证明了(1.3)有无穷个弱解且相应的临界值是正的。本文与(1.3)不同之处在于方程中(1.1)的条件与方程(1.3)中 $f(x,u)$ 条件不同，且(1.1)中研究的是有无穷个弱解且相应的临界值是负的。

在[14]中，作者考虑了一个 p-双调和的 Kirchhoff 方程，主要运用 Nehari 流行和纤维映射得到解的多重性。特别的，当 $p=2$ 这类问题的研究可见[15] [16] [17]。本文主要运用 Ljusternik-Schnirelmann 的方法证明方程存在无穷个解。运用此方法的文章有[18]中的非自治椭圆半线性方程，[19]中的非线性边界数据的椭圆问题，[20]中 Kirchhoff 类型问题。

本文主要的结果如下：

定理 1.1 存在 $\lambda_0>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，$\mu\in[0,\bar{\mu})$，方程(1.1)有无穷个解。

本文相关的定义如下：

定义 1.1 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$ 是方程(1.1)的解，是指

$$\int_\Omega|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta v\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega|u|^{q-2}uv\mathrm{d}x-\int_\Omega|u|^{p^*-2}uv\mathrm{d}x=0,\forall v\in W_0^{2,p}(\Omega),$$

它等价于 u 是泛函 $J(u)$ 的临界点，这里

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\frac{1}{p^*}\int_\Omega|u|^{p^*}\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

空间 $W_0^{2,p}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|=\left(\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。

由 Rellich 不等式见[21] [22]，可知

$$\bar{\mu}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u|^p\mathrm{d}x,\quad\forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

注记：由文献[21]，当 Ω 是一个光滑区域，Rellich 不等式对每个 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$ 都成立，但是最佳常数 $\bar{\mu}=\left(\frac{N(p-1)(N-2p)}{p^2}\right)^p$ 不能取到。

本文结构如下，第二节运用集中紧性证明一个局部 *PS* 条件；通过以上结果，我们在第三节给出定理 1.1 的证明。

2. 运用集中紧性证 Palais-Smale 条件

考虑(1.1)的能量泛函

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\Delta u|^{p}\,\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_{\Omega}\frac{|u|^{p}}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_{\Omega}|u|^{q}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p^{*}}\int_{\Omega}|u|^{p^{*}}\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

则 $J\in C^{1}\left(W_{0}^{2,P}(\Omega),\mathbb{R}\right)$ 且对任意的 $\varphi\in W_{0}^{2,P}(\Omega)$，满足

$$\left\langle J'(u),\varphi\right\rangle=\int_{\Omega}|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi\mathrm{d}x-\mu\int_{\Omega}\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}|u|^{q-2}u\varphi\mathrm{d}x-\int_{\Omega}|u|^{p^{*}-2}u\varphi\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

记 $S(\mu)=\inf\limits_{u\in W_{0}^{2,p}(\Omega)\setminus\{0\}}\dfrac{\int_{\Omega}|\Delta u|^{p}\,\mathrm{d}x-\mu\int_{\Omega}\frac{|u|^{p}}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x}{\left(\int_{\Omega}|u|^{p^{*}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^{*}}}}$，$S(0)$ 为 $W_{0}^{2,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^{p^{*}}(\Omega)$ 的最佳常数。因此通过定义有 $\|u\|_{p^{*}}\le S(0)^{-\frac{1}{p}}\|u\|$。

下面运用集中紧性原理[23] [24]去证明 $J(u)$ 在某个常数 c 下，满足 PS 条件。记 $\beta=\dfrac{p^{*}}{p^{*}-q}$。

定理 3.1 存在一个正常数 D，使得对泛函 $J(u)$ 的任意$(PS)_c$序列 $\{u_n\}\subset W_{0}^{2,p}(\Omega)$，当 $c<\dfrac{2}{N}S(0)^{\frac{N}{2p}}+\dfrac{2}{N}S(\mu)^{\frac{N}{2p}}-D\lambda^{\beta}$ 时，有一个强收敛的子列在 $W_{0}^{2,p}(\Omega)$ 中。

证明 假设 $\{u_n\}$ 在 $W_{0}^{2,p}(\Omega)$ 中有界。事实上，由于 $\{u_n\}$ 是$(PS)_c$序列，满足

$$J(u_n)=c+o(1). \tag{2.3}$$

$$J'(u_n)u_n=o(1)\|u_n\|. \tag{2.4}$$

结合(2.1)~(2.4)得，

$$o(1)\left(1+\|u_n\|\right)+c\ge J(u_n)-\frac{1}{p^{*}}J'(u_n)u_n\ge\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{*}}\right)\|u_n\|^{p}-C\|u_n\|^{q}.$$

又 $1<q<p<p^{*}$，若 $\|u_n\|\to\infty$，则 $\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^{*}}\right)\|u_n\|^{p}-C\|u_n\|^{q}\to\infty$，与 c 是一个常数矛盾。

故可得 $\{u_n\}$ 在 $W_{0}^{2,p}(\Omega)$ 中有界。因此存在一个子序列，仍记为 $\{u_n\}$，满足在 $W_{0}^{2,p}(\Omega)$ 中 $u_n\rightharpoonup u$。由文献[23] [24]可得在测度意义下，

$$\begin{cases}|\Delta u_n|^{p}\rightharpoonup\eta\ge|\Delta u|^{p}+\sum\limits_{k\in I}\eta_k\delta_{x_k}+\eta_0\delta_0,\\ |u_n|^{p^{*}}\rightharpoonup\nu=|u|^{p^{*}}+\sum\limits_{k\in I}\nu_k\delta_{x_k}+\nu_0\delta_0,\\ \mu\dfrac{|u_n|^{p-2}u_n}{|x|^{2p}}\rightharpoonup\gamma=\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}+\gamma_0\delta_0.\end{cases} \tag{2.5}$$

其中 η,ν,γ 为有界非负测度，δ_x 是在 x 处的 Dirac 测度，I 是一个可列集且 $\{x_k\}_{k\in I}\subset\bar{\Omega}\setminus\{0\}$ 为一列不同点集，由 Rellich 不等式得，$\eta_0-\mu\gamma_0\ge S(\mu)\nu_k^{\frac{p}{p^{*}}}$ 和 $\eta_k\ge S(0)\nu_k^{\frac{p}{p^{*}}}$。

断言 1 I 是有限的，对任意的 $k\in I$，要么 $\nu_k=0$，要么 $\nu_k\ge S(0)^{\frac{N}{2p}}$。

事实上，对任意足够小的$\varepsilon>0$，使得$0\notin B_{2\varepsilon}(x_k)$且对任意的$i,j\in I, i\neq j$，$B_{2\varepsilon}(x_i)\cap B_{2\varepsilon}(x_j)=\varnothing$。定义$\psi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$使得在$B_\varepsilon(x_k)$中，$\psi_\varepsilon=1$；在$B_{2\varepsilon}(x_k)$外面，$\psi_\varepsilon=0$。并且满足

$$|\nabla\psi_\varepsilon|\le\frac{2}{\varepsilon},|\Delta\psi_\varepsilon|\le\frac{2}{\varepsilon^2}. \tag{2.6}$$

现在考虑$W_0^{2,p}(\Omega)$中的有界序列$\{\phi_\varepsilon u_n\}$，记$\phi_\varepsilon(x)=\psi_\varepsilon(x)\chi_\Omega(x)$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n),\phi_\varepsilon u_n\rangle=0.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\Delta(\phi_\varepsilon u_n)\mathrm{d}x=\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\gamma+\lambda\int_\Omega|u|^q\phi_\varepsilon\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\nu. \tag{2.7}$$

又

$$\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left|\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\gamma\right|=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left|\int_\Omega\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}\phi_\varepsilon\mathrm{d}x\right|\le\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{B_\varepsilon(x_k)}\dfrac{|u|^p}{(|x_k|-\varepsilon)^{2p}}|\phi_\varepsilon|\mathrm{d}x=0,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\nu=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(\int_\Omega|u|^{p^*}\phi_\varepsilon\mathrm{d}x+\nu_k\right)=\nu_k,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\Omega|u|^q\phi_\varepsilon\mathrm{d}x=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

另一方面，由(2.5)弱收敛可得到，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\Delta(\phi_\varepsilon u_n)\mathrm{d}x=\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\eta+\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\left(2\langle\nabla\phi_\varepsilon,\nabla u_n\rangle+u_n\Delta\phi_\varepsilon\right). \tag{2.9}$$

由(2.5)，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\eta\ge\eta_k. \tag{2.10}$$

下面证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\left(2\langle\nabla\phi_\varepsilon,\nabla u_n\rangle+u_n\Delta\phi_\varepsilon\right)\mathrm{d}x\right)=0.$$

事实上，由 Cauchy-Schwarz 和 Hölder 不等式，可得

$$0\le\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n\langle\nabla\phi_\varepsilon,\nabla u_n\rangle\mathrm{d}x\right|\le\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega|\Delta u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla\phi_\varepsilon|^p|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

根据$\{u_n\}$的弱收敛，Hölder 不等式和(2.6)可推出

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega|\Delta u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla\phi_\varepsilon|^p|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla\phi_\varepsilon|^p|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le C\left[\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla\phi_\varepsilon|^N\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{N}}\times\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla u_n|^{\frac{Np}{N-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{N}}\right]^{\frac{1}{p}}\\&\le C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla u_n|^{\frac{Np}{N-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{Np}}\to0,\quad(\text{当}\,\varepsilon\to0).\end{aligned} \tag{2.11}$$

然而，我们也有

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-2}(\Delta u_n)u_n\Delta\phi_\varepsilon \mathrm{d}x\right| \le \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p-1}|u_n\Delta\phi_\varepsilon|\mathrm{d}x \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\Delta\phi_\varepsilon|^{p}|u_n|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega} |\Delta\phi_\varepsilon|^{p}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\left[\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\Delta\phi_\varepsilon|^{\frac{N}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2p}{N}}\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \to 0,\quad (\text{当}\,\varepsilon\to 0).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

因此，由(2.7)~(2.12)可得

$$\eta_k \le \nu_k.$$

运用 Sobolev 不等式，$S(0)\nu_k^{\frac{p}{p^*}} \le \eta_k$，可以推出

$$\nu_k = 0 \text{ 或者 } \nu_k \ge S(0)^{\frac{N}{2p}},$$

因此 I 是有限的。

断言 2 $\nu_0 = 0$ 或 $\nu_0 \ge S(\mu)^{\frac{N}{2p}}$。

下面考虑集中点在原点。取足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得对所有的 $k \in I, x_k \notin B_\varepsilon(0)$。记 $\phi_{0\varepsilon} \in C_0^\infty(R^N)$ 使得在 $B_\varepsilon(x_k)$ 中，$\psi_{0\varepsilon} = 1$；在 $B_{2\varepsilon}(x_k)$ 外面，$\psi_{0\varepsilon} = 0$。并且满足 $|\nabla\psi_{0\varepsilon}| \le \frac{2}{\varepsilon}$，$|\Delta\psi_{0\varepsilon}| \le \frac{2}{\varepsilon^2}$。

由(2.5)和断言 1，得到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^p\phi_{0\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{0\varepsilon}\mathrm{d}\eta \ge \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^p\phi_{0\varepsilon} + \eta_0\right) = \eta_0, \\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mu\frac{|u_n|^p}{|x|^{2p}}\phi_{0\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{0\varepsilon}\mathrm{d}\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Omega \mu\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\phi_{0\varepsilon} + \gamma_0\right) = \gamma_0, \\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{p^*}\phi_{0\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{0\varepsilon}\mathrm{d}\nu = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\phi_{0\varepsilon} + \nu_0\right) = \nu_0.
\end{aligned}
$$

因此有

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n), u_n\phi_{0\varepsilon}\rangle \ge \eta_0 - \gamma_0 - \nu_0.$$

由 Rellich 不等式，得到

$$S(\mu)\nu_0^{\frac{p}{p^*}} \le \nu_0.$$

因此有

$$\nu_0 = 0 \text{ 或 } \nu_0 \ge S(\mu)^{\frac{N}{2p}}.$$

若 $\nu_0 \ge S(\mu)^{\frac{N}{2P}}$，则

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left\{J(u_n) - \frac{1}{p}\langle J'(u_n), u_n\rangle\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&=\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x+\frac{2}{N}\left(\int_\Omega|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x+\sum_{k\in I}\nu_k+\nu_0\right)\\&\geq\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x+\frac{2}{N}\int_\Omega|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{N}S(0)^{\frac{N}{2p}}+\frac{2}{N}S(\mu)^{\frac{N}{2p}}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

因为$1<q<p$，对(2.13)运用不等式，得到

$$c\geq\frac{2}{N}S(0)^{\frac{N}{2p}}+\frac{2}{N}S(\mu)^{\frac{N}{2p}}+\frac{2}{N}\int_\Omega|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x-\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)|\Omega|^{\frac{1}{\beta}}\left(\int_\Omega|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p^*}}.$$

现在考虑函数$g(x)=k_1x^{p^*}-\lambda k_2x^q$，其中$k_1=\frac{2}{N},k_2=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)|\Omega|^{\frac{1}{\beta}}$。

当$x>0$，$g(x)$在$x_0=\left(\frac{\lambda k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{1}{p^*-q}}$获得极大值，因此

$$\begin{aligned}g(x)\geq g(x_0)&=k_1\left(\frac{\lambda k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}}-\lambda k_2\left(\frac{\lambda k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}}\\&=\lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}k_1\left(\frac{k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}}-\lambda^{1+\frac{q}{p^*-q}}k_2\left(\frac{k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}}\\&=-D\lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}.\end{aligned}$$

其中$D=k_2\left(\frac{k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}}-k_1\left(\frac{k_2q}{p^*k_1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}}$。下面检验$D>0$。

记$|\Omega|^{\frac{1}{\beta}}=C\,(C>0)$，$\frac{k_2q}{p^*k_1}=\frac{C(p-q)(N-2p)}{2p^2}$，

则

$$\begin{aligned}D&=C\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{C(p-q)(N-2p)}{2p^2}\right)^{\frac{q}{p^*-q}}-\frac{2}{N}\left(\frac{C(p-q)(N-2p)}{2p^2}\right)^{\frac{p^*}{p^*-q}}\\&=\left(\frac{C(p-q)(N-2p)}{2p^2}\right)^{\frac{q}{p^*-q}}\left\{C\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{2}{N}\left(\frac{C(p-q)(N-2p)}{2p^2}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*-q}}\right\}\\&=C\left(\frac{C(p-q)(N-2p)}{2p^2}\right)^{\frac{q}{p^*-q}}\frac{(p-q)\left[N(p-q)+2pq\right]}{Np^2q}.\end{aligned}$$

由于$1<q<p$，$N>2p$得$D>0$。

因此，得出$c\geq\frac{2}{N}S(0)^{\frac{N}{2p}}+\frac{2}{N}S(\mu)^{\frac{N}{2p}}-D\lambda^{\beta}$，这与定理条件矛盾，因此$\nu_k=0$，$\nu_0=0$。由(2.5)推出

$$\int_\Omega|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\to\int_\Omega|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\ \text{当}n\to\infty.$$

运用文献[25]中 Brezis-Lieb 引理，可得到$u_n\to u$在$L^{p^*}(\Omega)$。

若 $F_n = J'(u_n) + \mu \frac{|u_n|^{p-2} u_n}{|x|^{2p}} + \lambda |u_n|^{q-2} u_n + |u_n|^{p^*-2} u_n$，通过计算可得 $\{F_n\}$ 是一个柯西列，因此

$$\|u_n - u_m\| \le \alpha \begin{cases} \|F_n - F_m\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}, & p \ge 2, \\ M^{2-p} \|F_n - F_m\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}, & 1 < p < 2, \end{cases}$$

其中 $\alpha = \alpha(p)$，$M = \max\{\|u_n\|, \|u_m\|\}$，得到 $\{u_{nk}\}$ 在 $W_0^{2,p}(\Omega)$ 中强收敛。

3. 定理 1.2 的证明

设 $1 < q < p$，

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

运用 Hölder 不等式、Sobolev 不等式和 Rellich 不等式可得到

$$J(u) \ge \frac{C}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}|\Omega|^{\frac{1}{\beta}} S^{-\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} - \frac{1}{p^*} S^{-\frac{p^*}{p}} \left(\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p^*}{p}},$$

其中，$\beta = \frac{p^*}{p^* - q}$。

因此 $J(u) \ge h(\|u\|)$，其中 $h(x) = \frac{C}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}|\Omega|^{\frac{1}{\beta}} S^{-\frac{q}{p}} x^q - \frac{1}{p^*} S^{-\frac{p^*}{p}} x^{p^*}$。

故存在一个 $\lambda_1 > 0$，使得如果 $0 < \lambda < \lambda_1$，那么 h 有一个局部极小值和一个局部极大值。

令 $r < R_0 < R < R_1$，其中 R 是 h 获得极大值点横坐标，r 是 h 获得极小值横坐标，$h(R_1) > h(r)$。

下面对 J 做一个截断，令

$$\tau : R^+ \to [0,1], \text{使得} \begin{cases} \tau(x) = 1, & x \le R_0 - 1, \\ \tau(x) = 0, & x \ge R_0, \end{cases}$$

令 $\varphi(u) = \tau(\|u\|)$，考虑截断泛函

$$\tilde{J}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} \varphi(u) \mathrm{d}x.$$

因此，$\tilde{J}(u) \ge \bar{h}(\|u\|)$，其中 $\bar{h}(x) = \frac{C}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}|\Omega|^{\frac{1}{\beta}} S^{-\frac{q}{p}} x^q - \frac{1}{p^*} S^{-\frac{p^*}{p}} x^{p^*} \tau(x)$.

观察到，当 $x \le R_0$，$h = \bar{h}$；当 $x \ge R_0$，$\bar{h}(x) = \frac{C}{p}x^p - \frac{\lambda}{q}|\Omega|^{\frac{1}{\beta}} S^{-\frac{q}{p}} x^q$。

$\tilde{J}$ 的主要性质如下：

引理 3.1

(i) $\tilde{J} \in C^1(W_0^{2,p}(\Omega), \mathbb{R})$ 且下有界。

(ii) 如果 $\tilde{J}(u) \le 0$，那么 $\|u\| < R_0$ 且 $J(v) = \tilde{J}(v)$ 对所有 $v \in B_{R_0} = \{u \in W_0^{2,p}(\Omega) : \|u\| < R_0\}$。

(iii) 存在一个 $\lambda_2 > 0$，使得 $0 < \lambda < \lambda_2$，$\tilde{J}$ 对任意的 $c < 0$ 满足 PS 条件。

证明 (i)和(ii)是显然的。

为证明(iii)，令 $\{u_n\}\subset W_0^{2,p}(\Omega)$ 是 $\tilde{J}$ 的一个 PS 序列：$\tilde{J}(u_n)\to c$，$\tilde{J}'(u_n)\to 0$。

因为 $c<0$，因此当 n 足够大时，$J(u_n)\le 0$。

由(ii)，$\{u_n\}\subset B_{R_0}$。令 $\lambda_2>0$ 使得，对于 $0<\lambda<\lambda_2$，$\frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}}-K\lambda^{\beta}\ge 0$。

由定义，在 B_{R_0} 中，$J=\tilde{J}$，因此 $\{u_n\}$ 满足 $J(u_n)\to c<0\le\frac{2}{N}S^{\frac{N}{2p}}-D\lambda^{\beta}$ 且 $J'(u_n)\to 0$。

因此由定理 3.1，序列 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{2,p}(\Omega)$ 中有一个强收敛的子列。 □

注记：若找到 $\tilde{J}$ 的一些负临界值，通过(ii)，我们可以得到 J 的负临界值。

令 Σ 是 $W_0^{2,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ 的一类闭的，关于原点对称的子集。对于 $A\in\Sigma$，定义亏格

$$\gamma(A)=\min\left\{k\in N:存在\phi\in C\left(A,R^k\setminus\{0\}\right),\phi(x)=-\phi(-x)\right\}.$$

如果极小值不能取到，定义 $\gamma(A)=+\infty$，亏格主要的性质如下，具体看文献[26]。

命题 3.2 取 $A,B\in\Sigma$，则

(i) 若存在一个奇函数 $f\in C(A,B)$，则 $\gamma(A)\le\gamma(B)$。

(ii) 若 $A\subset B$，那么 $\gamma(A)\le\gamma(B)$。

(iii) 若在 A 和 B 之间存在一个奇同态，那么 $\gamma(A)=\gamma(B)$。

(iv) 若 S^{N-1} 是 R^N 中的球面，那么 $\gamma\left(S^{N-1}\right)=N$。

(v) $\gamma(A\cup B)\le\gamma(A)+\gamma(B)$。

(vi) 若 $\gamma(B)<+\infty$，那么 $\gamma\left(\overline{A\setminus B}\right)\ge\gamma(A)-\gamma(B)$。

(vii) 若 A 是紧的，那么 $\gamma(A)<+\infty$，且存在一个 $\delta>0$ 使得 $\gamma(A)=\gamma\left(N_\delta(A)\right)$，其中 $N_\delta(A)=\left\{x\in W_0^{2,p}(\Omega):d(x,A)\le\delta\right\}$。

(viii) 若 X 是 $W_0^{2,p}(\Omega)$ 的一个子空间且维数为 k 且 $\gamma(A)>k$，那么 $A\cap X\ne\varnothing$。

(ix) 对任意的连续奇映射 $\phi:X\to X$，集合 $a\in A$，满足 $\gamma(a)\le\overline{\gamma(\phi(a))}$。

下面建立泛函 $\tilde{J}$ 负的临界值的极小极大序列，证明思想方法来源于文献[27]。

引理 3.3 给定 $n\in N$，有 $\varepsilon=\varepsilon(n)>0$ 使得 $\gamma\left(\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega):\tilde{J}(u)\le-\varepsilon\right\}\right)\ge n$.

证明 固定 $n\in N$，令 E_n 是 $W_0^{2,p}(\Omega)$ 的一个 n 维子空间。

取 $u_n\in E_n$ 且有 $\|u_n\|=1$，对于 $0<\rho<R_0$，有

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\rho u_n)=J(\rho u_n)&=\frac{1}{p}\rho^p-\frac{\mu}{p}\rho^p\int_\Omega\frac{|u_n|^p}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\rho^q\int_\Omega|u_n|^q\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p^*}\rho^{p^*}\int_\Omega|u_n|^{p^*}\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{p}\rho^p-\frac{\lambda}{q}\rho^q\int_\Omega|u_n|^q\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p^*}\rho^{p^*}\int_\Omega|u_n|^{p^*}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定义

$$\alpha=\inf\left\{\int_\Omega|u|^{p^*}\mathrm{d}x:u\in W_0^{2,p}(\Omega),\|u\|=1\right\}>0,$$

$$\beta=\inf\left\{\int_\Omega|u|^{q}\mathrm{d}x:u\in W_0^{2,p}(\Omega),\|u\|=1\right\}>0.$$

因此，

$$\tilde{J}(\rho u_n)\le\frac{1}{p}\rho^p-\frac{\lambda\beta}{q}\rho^q-\frac{\alpha}{p^*}\rho^{p^*}.$$

选取 $\varepsilon>0$（只取决于 n），$0<\eta<R_0$，使得如果 $u\in W_0^{2,p}(\Omega)$，$\|u\|=1$，则 $\tilde{J}(\eta u)\le-\varepsilon$。

令 $S_\eta=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega),\|u\|=\eta\right\}$ 使得 $S_\eta\cap W_0^{2,p}(\Omega)\subset\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega):\tilde{J}(u)\le-\varepsilon\right\}$。

因此，由命题 3.2，得到

$$\gamma\left(\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega):\tilde{J}(u)\le-\varepsilon\right\}\right)\ge\gamma\left(S_\eta\cap W_0^{2,p}(\Omega)\right)=n.$$

定义

$$\Sigma_k=\left\{A\subset W_0^{2,p}(\Omega)\setminus\{0\}:A\text{是闭的},A=-A,\gamma(A)\ge k\right\},$$

$$c_k=\inf_{A\in\Sigma_k}\sup_{u\in A}\tilde{J}(u),\ K_c=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega):\tilde{J}'(u)=0,\tilde{J}(u)=c\right\}.$$

引理 3.4 c_k 都是负的。

证明 事实上，令

$$\tilde{J}^{-\varepsilon}=\left\{u\in W_0^{2,p}(\Omega):\tilde{J}(u)\le-\varepsilon\right\}.$$

由引理 3.3，对所有的 $k\in N$，存在 $\varepsilon=\varepsilon(k)>0$ 使得 $\gamma\left(\tilde{J}^{-\varepsilon}\right)\ge k$。

因为 $\tilde{J}$ 是连续且是偶的，$\tilde{J}^{-\varepsilon}\in\Sigma_k$；故对所有的 $k\in N$，$c_k\le-\varepsilon(k)<0$。又 $\tilde{J}$ 是下有界的，因此 $c_k>-\infty$。

下面结果证明临界点存在。

引理 3.5 令 $\lambda_0=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$（$\lambda_1,\lambda_2$ 前之所述）。设 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，若 $c=c_k=c_{k+1}=\cdots=c_{k+r}$，那么 $\gamma(K_c)\ge r+1$。

证明 运用形变引理(见参考文献[26])。

设 $c=c_k=c_{k+1}=\cdots=c_{k+r}$，因为 $c<0$，因此 $\tilde{J}$ 在 K_c 中满足 PS 条件，可得 K_c 是紧的。

反证，假设 $\gamma(K_c)\le r$，因此存在一个对称的闭集 U，$K_c\subset U$ 使得 $\gamma(U)=\gamma(K_c)\le r$。

由形变引理，有一个奇同胚

$$\eta:W_0^{2,p}(\Omega)\to W_0^{2,p}(\Omega),$$

使得 $\eta\left(\tilde{J}^{c+\delta}\setminus U\right)\subset\tilde{J}^{c-\delta}$，$0<\delta<-c.$

由定义，$c=c_{k+r}=\inf\limits_{A\in\Sigma_{k+r}}\sup\limits_{u\in A}\tilde{J}(u).$

那么存在一个 $A'\in\Sigma_{k+r}$ 使得 $\max\limits_{u\in A'}\tilde{J}(u)<c+\delta$，也即 $A'\subset\tilde{J}^{c+\delta}$ 且

$$\eta(A'\setminus U)\subset\eta\left(\tilde{J}^{c+\delta}\setminus U\right)\subset\tilde{J}^{c-\delta}.\tag{3.1}$$

然而由命题 3.2 可得

$$\gamma\left(\overline{A'\setminus U}\right)\ge\gamma(A')-\gamma(U)\ge k\text{ 和 }\gamma\left(\eta\left(\overline{A'\setminus U}\right)\right)\ge\gamma\left(\overline{A'\setminus U}\right)\ge k.$$

因此，

$$\eta\left(\overline{A'\setminus U}\right)\in\Sigma_k.$$

这与(3.1)矛盾，因为 $\eta\left(\overline{A'\setminus U}\right)\in\Sigma_k$ 推出 $\sup\limits_{u\in\eta\left(\overline{A'\setminus U}\right)}\tilde{J}(u)\ge c_k=c$。

下面证明定理 1.1。

事实上，定义 $\lambda_0=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$，设 $\lambda\in(0,\lambda_0)$。通过定义，有

$$c_k\le c_{k+1}\le\cdots\le c_{k+r}\le\cdots<0.\tag{3.2}$$

下面考虑两种情况：

情况(I) 设(3.2)所有的不等式是严格的。由引理 3.5 证得对任意的 $k\in N$， $\gamma\left(K_{c_k}\right)\geq 1$， K_{c_k} 有至少一个元。由于 c_k 之间是互不相等的，我们得到对于 $\tilde{J}$ 不同临界点的序列。由引理 3.4 推出 c_k 都是负的，又引理 3.1 的(ii)得到， $\tilde{J}$ 的临界点就是 J 的临界点。

情况(II) 设存在 $k,r\in N$，使得

$$c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}.$$

由引理 3.5 得到 $\gamma\left(K_{c_k}\right)\geq 2$。也即可得到 K_{c_k} 是连通，闭的且关于原点是对称的。事实上，如果 K_{c_k} 不是连通的，那么有 $\gamma\left(K_{c_k}\right)=1$。因为我们可以定义一个奇函数 $f\in C\left(K_{c_k},R\setminus\{0\}\right)$，其中在一个连通分支上，$f$ 取 1，在另外一个对称的连通区域上，f 取−1。因此我们得到 $\tilde{J}$ 无穷个不同的临界点。与情况(I)类似，得到无穷个解。

参考文献

[1] Ruzicka, M. (2000) Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1748, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0104030

[2] Nachman, A. and Callegari, A. (1980) A Nonlinear Singular Boundary Value Problem in the Theory of Pseudoplastic Fluids. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **38**, 275-281. https://doi.org/10.1137/0138024

[3] Dhifli, A. and Alsaedi, R. (2021) Existence and Multiplicity of Solution for a Singular Problem Involving the p-Biharmonic Operator in R-N. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **499**, Article ID: 125049. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125049

[4] Huang, Y.S. and Liu, X.Q. (2014) Sign-Changing Solutions for p-biharmonic Equations with Hardy Potential. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **412**, 142-154. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.044

[5] Candito, P. and Bisci, G.M. (2012) Multiple Solutions for a Navier Boundary Value Problem Involving the p-Biharmonic Operator. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series S*, **5**, 741-751. https://doi.org/10.3934/dcdss.2012.5.741

[6] Liu, X.N., Chen, H.B. and Almuaalemi, B. (2017) Ground State Solutions for p-Biharmonic Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **45**, 1-9.

[7] Sun, J.T., Chu, J.F. and Wu, T.F. (2017) Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Some Biharmonic Equations with p-Laplacian. *Journal of Differential Equations*, **262**, 945-977. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.001

[8] Sun, J.T. and Wu, T.F. (2018) The Nehari Manifold of Biharmonic Equations with p-Laplacian and Singular Potential. *Applied Mathematics Letters*, **88**, 156-163. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.08.025

[9] Sang, Y.B. and Ren, Y. (2020) A Critical p-Biharmonic System with Negative Exponents. *Computers and Mathematics with Applications*, **79**, 1335-1361. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.08.032

[10] Su, Y., Liu, B.Y. and Feng, Z.S. (2021) Ground State Solution of the Thin Film Epitaxy Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **503**, Article ID: 125357. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125357

[11] Luan, T.N., Khieu, T.T. and Khanh, T.Q. (2020) Regularized Solution of the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 757-782. https://doi.org/10.1007/s40840-018-00711-7

[12] Aghalary, R., Mohammadian, A. and Jahangiri, J. (2019) Landau-Bloch Theorems for Bounded Biharmonic Mappings. *Filomat*, **33**, 4593-4601. https://doi.org/10.2298/FIL1914593A

[13] Xie, H.Z. and Wang, J.P. (2013) Infinitely Many Solutions for p-Harmonic Equation with Singular Term. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**, Article No. 9. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-9

[14] Alsaedi, R. (2020) Multiplicity Results Involving p-Biharmonic Kirchhoff-Type Problems. *Boundary Value Problems*, **2020**, Article No. 118. https://doi.org/10.1186/s13661-020-01416-2

[15] Zhang, J.G. and Hsu, S.S. (2019) Multiplicity Results for Biharmonic Equations Involving Multiple Rellich-Type Potentials and Critical Exponents. *Boundary Value Problems*, **2019**, Article No. 103. https://doi.org/10.1186/s13661-019-1216-y

[16] Tang, X.D. and Zhang, J.H. (2014) Multiple Results to Some Biharmonic Problems. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 267052. https://doi.org/10.1155/2014/267052

[17] Zhang, H.S., Li, T.X. and Wu, T.F. (2020) Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Biharmonic Equations with Singular Weight Functions. *Applied Mathematics Letters*, **105**, Article ID: 106335.

https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106335

[18] Ning, Q. and Wang, Z.Q. (1999) Multiplicity Results for Positive Solutions to Non-Autonomous Elliptic Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **1999**, 1-28.

[19] Wu, T.F. (2012) Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems. *Journal of Differential Equations*, **252**, 3403-3435. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.12.006

[20] He, Y., Li, G.B. and Peng, S.J. (2014) Concentrating Bound States for Kirchhoff Type Problems in R3 Involving Critical Sobolev Exponents. *Advanced Nonlinear Studies*, **14**, 483-510. https://doi.org/10.1515/ans-2014-0214

[21] Davies, E.B. and Hinz, A.M. (1998) Explicit Constants for Rellich Inequalities in Lp (Ω). *Mathematische Zeitschrift*, **227**, 511-523. https://doi.org/10.1007/PL00004389

[22] Enzo, M. (2000) A Simple Approach to Hardy Inequalities. *Mathematical Notes*, **67**, 479-486. https://doi.org/10.1007/BF02676404

[23] Lions, P.L. (1985) The Concentration Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 1. *Revista Matemática Iberoamericana*, **1**, 145-201. https://doi.org/10.4171/RMI/6

[24] Lions, P.L. (1985) The Concentration Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 2. *Revista Matemática Iberoamericana*, **1**, 45-121. https://doi.org/10.4171/RMI/12

[25] Brezis, H. and Lieb, E.H. (1983) A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **88**, 486-490. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1983-0699419-3

[26] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[27] Garcia, A.J. and Alonso, I.P. (1994) Some Results about the Existence of a Second Positive Solutions in a Quasilinear Critical Problem. *Indiana University Mathematics Journal*, **43**, 941-957. https://doi.org/10.1512/iumj.1994.43.43041