Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1971-1980
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211213

常见损失函数下逆伽马分布尺度参数的E-Bayes估计

何贵阳，周菊玲

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年10月17日；录用日期：2022年11月16日；发布日期：2022年11月24日

摘 要

为解决逆伽马分布参数的E-Bayes估计问题，本文对逆伽马分布在已知形状参数的情况下，讨论给出了尺度参数在平方损失函数与加权平方损失函数下的估计；同时基于Bayes估计，推导同条件下相应参数的E-Bayes估计，并运用蒙特卡洛方法进行随机模拟，验证E-Bayes估计的合理性并对比分析不同损失函数下E-Bayes估计的稳健性，得出在加权平方损失函数下的E-Bayes估计较为稳健。可以判定加权平方损失函数下逆伽马分布参数的E-Bayes估计是最优估计方法。

关键词

逆伽马分布，平方损失，加权平方损失，E-Bayes估计，蒙特卡洛方法

E-Bayes Estimation of Scale Parameters of Inverse Gamma Distribution under Common Loss Functions

Guiyang He, Juling Zhou

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. 17th, 2022; accepted: Nov. 16th, 2022; published: Nov. 24th, 2022

Abstract

In order to solve the E-Bayes estimation problem of inverse gamma distribution parameters, this paper discusses and gives the estimation of scale parameters under the square loss function and weighted square loss function for the inverse gamma distribution under the condition that the

文章引用：何贵阳，周菊玲．常见损失函数下逆伽马分布尺度参数的 E-Bayes 估计[J]．理论数学，2022，12(11): 1971-1980. DOI: 10.12677/pm.2022.1211213

shape parameters are known. At the same time, based on Bayes estimation, the E-Bayes estimation of the corresponding parameters under the same conditions is derived, and the Monte Carlo method is used to carry out random simulation to verify the rationality of E-Bayes estimation and compare and analyze the robustness of E-Bayes estimation under different loss functions, and it is concluded that the E-Bayes estimation under the weighted squared loss function is relatively robust. The E-Bayes estimation of the inverse gamma distribution parameters under the weighted squared loss function is the optimal estimation method.

Keywords

Inverse Gamma Distribution, Square Loss, Weighted Square Loss, E-Bayes Estimation, Monte Carlo Method

1. 引言

逆伽马分布作为统计学中的一个重要分布，不仅应用于经典统计学，也常被应用于物理学、医学、航空、生物学等领域。例如：在贝叶斯统计学中，逆伽马分布常以正态分布中方差的共轭先验分布出现；文献[1]在以共轭先验分布为逆伽马分布的情况下，求出艾拉姆咖分布中参数 θ 的估计的损失函数的 Bayes 估计及风险函数的 Bayes 估计[1]；文献[2]中提到以选择逆伽马分布作为纹理分量的先验分布，基于贝叶斯方法，给出了一种知识辅助的信号检测算法[2]；文献[3]介绍了选取正态分布和逆伽马分布作为反巡航导弹武器系统命中概率特征参数的先验分布，并通过贝叶斯分析方法得到相应的后验分布函数[3]；文献[4]讨论了逆伽马分布尺度参数的 Bayes 估计及其可容许性[4]。多数文献都以逆伽马分布为条件，讨论其应用，从而导致对逆伽马分布自身参数的研究尚不完善，其性质也有待研究。

近年来，利用贝叶斯方法讨论某一特定分布的研究与应用已经取得了一系列的成果，文献[5]利用贝叶斯统计方法，研究了定数截尾情形下，两参数拉普拉斯 BS 疲劳寿命分布参数的 Bayes 估计问题[5]；文献[6]利用线性贝叶斯方法去同时估计线性模型中回归系数和误差方差，并在不知道先验分布具体形式的情况下，得到了线性贝叶斯估计的表达式，在均方误差矩阵准则下，证明了其优于最小二乘估计和极大似然估计[6]。除此之外，对多层贝叶斯方法的研究也未停止，文献[7]在充分利用产品研制过程可靠性信息的基础上，利用多层贝叶斯方法给出了制定指数型产品可靠性验收试验的方法[7]；文献[8]基于共轭先验分布，分别在刻度平方误差损失函数和 Linex 损失函数下，给出参数的贝叶斯估计和多层贝叶斯估计，运用随机模拟方法对各种估计结果的优良性进行了分析比较[8]。但大量研究表明在利用多层贝叶斯方法得到结果时，常常要涉及一系列复杂的积分计算，尤其是在处理实际问题上极其不方便。文献[9]推广了参数估计中的 Bayes 估计方法，提出了产品可靠度的一种新估计方法——E-Bayes 估计法[9]。在已有的研究中我们已经发现，对参数的 E-Bayes 估计相比多层 Bayes 估计有着“捷径”之处，文献[10]综述了先验分布的研究进展情况，给出了构造多层先验分布的方法——增减函数法，并给出了它们在无失效数据可靠性中的应用[10]。

预备知识：

1) 伽马分布的基本情况：

若随机变量 X 满足逆伽马分布，其密度函数与分布函数表达式为：

$$f(x,a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{-(a-1)}\mathrm{e}^{-b/x},x>0,a>0,b>0\text{；} \tag{1}$$

$$F(x,a,b)=\frac{\Gamma(a,b/x)}{\Gamma(a)},x>0,a>0,b>0 \tag{2}$$

其中 a,b 分别表示逆伽马分布的形状参数与尺度参数，记为 $I\Upsilon(a,b)$。

2) 平方损失函数与加权平方损失函数的表达式分别为：

$$L_1(\theta,a)=(\theta-a)^2,a>0 \tag{3}$$

$$L_2(\theta,a)=\frac{(\theta-a)^2}{a^2},a>0 \tag{4}$$

本文在形状参数已知的条件下，研究了逆伽马分布尺度参数在平方损失函数与加权平方损失函数下的 E-Bayes 估计；文章第一、二节介绍了在以 Bayes 估计法为基础上，推导同条件下相应参数 E-Bayes 估计；在第三节运用蒙特卡洛方法进行随机模拟，从而验证 E-Bayes 估计的合理性，同时对比数据，分析估计值的稳健性，最后给出最优估计。

2. 平方损失函数下的 E-Bayes 估计

定义 1 对于 $(a,b)\in D$，若 $\hat{\lambda}_B(a,b)$ 是连续的，则称

$$\hat{\lambda}_{EB}=\iint_D \hat{\lambda}_B(a,b)f(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\text{，}$$

是参数 λ 的 E-Bayes 估计，其中 $\iint_D \hat{\lambda}_B(a,b)f(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ 是存在的，D 是超参数 a 和 b 的取值集合，$f(a,b)$ 是 a 和 b 在集合 D 上的密度函数，$\hat{\lambda}_B(a,b)$ 为 λ 的 Bayes 估计[11]。

由定义可得：要求逆伽马分布尺度参数 b 在平方损失函数(3)下的 E-Bayes 估计，首先需要找到尺度参数 b 的 Bayes 估计。所以下面在 Bayes 估计的理论下，讨论尺度参数 b 的 Bayes 估计，进而求出尺度参数 b 的 E-Bayes 估计[12]。

定理 1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $I\Upsilon(\alpha,\theta)$ 分布的简单随机样本，其中 α 与 θ 分别为形状参数与尺度参数。令 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，并且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应随机样本下的观察值，则在平方损失函数(3)下，对于任意的先验分布 $\pi(\theta)$，在形状参数 α 已知的情况下，尺度参数 θ 的唯一 Bayes 估计的一般形式为：

$$\hat{\theta}_B(X)=E(\theta\mid X).$$

证明 设 $\hat{\theta}(X)$ 为尺度参数 θ 的任一估计，用 $\hat{\theta}(X)$ 代替损失函数中的 θ，则在平方损失函数(3)下，$\hat{\theta}(X)$ 相应的风险函数为：

$$R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)=E\left\{\left(\hat{\theta}_B(X)-\theta\right)^2\right\}.$$

但在贝叶斯观点下，$R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)$ 是尺度参数 θ 的函数，而 θ 还是随机变量，它也有先验分布 $\pi(\theta)$，于是 $\hat{\theta}(X)$ 的损失函数应由 $\int R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$ 判断；同时考虑贝叶斯观点下的最优估计，所以引入尺度参数 θ 对 x 的“后验风险”，即

$$R\left(\hat{\theta}(X)\mid X\right)=\int\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2 p(X\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta\text{；}$$

其中 $p(X\mid\theta)\pi(\theta)$ 表示参数 θ 与样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合密度函数。

结合贝叶斯观点下 $\hat{\theta}(X)$ 的损失函数，则有

$$\begin{aligned}\int R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int E\left\{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2\right\}\pi(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \underbrace{\int\cdots\int}_{n+1\text{次}}\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2 p(X\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}X\mathrm{d}\theta, \\ &= \underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{次}} R\left(\hat{\theta}(X)\mid X\right)\mathrm{d}X\end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta}(X)$ 相应的风险函数为：

$$\int R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta = E\left\{E\left\{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2 \mid X\right\}\right\},$$

其中 $E\left\{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2 \mid X\right\}$ 表示参数 θ 与样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布下的数学期望。

由损失函数定义可知，在对特定分布的参数进行估计问题时，考虑到给定相应损失函数后，需要使风险函数尽可能的小，以保证参数估计时的准确性[13]。为此需要风险函数中的 $E\left\{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2 \mid X\right\}$ 极小化即可。

因为

$$E\left\{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2 \mid X\right\} = E\left(\theta^2 \mid X\right) - 2\hat{\theta}(X)E(\theta\mid X) + \hat{\theta}^2(X).$$

设

$$f\left(\hat{\theta}(X)\right) = E\left(\theta^2 \mid X\right) - 2\hat{\theta}(X)E(\theta\mid X) + \hat{\theta}^2(X),$$

将 $f\left(\hat{\theta}(X)\right)$ 关于 $\hat{\theta}(X)$ 求微分并令其等于零，便可解得：$\hat{\theta}(X)=E(\theta\mid X)$。

由于 $f\left(\hat{\theta}(X)\right)$ 是凸函数，所以 $\hat{\theta}(X)$ 是 $f\left(\hat{\theta}(X)\right)$ 的唯一最小值点，同时若存在 θ' 使得 $R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)<\infty$，则对于参数 θ 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}(X)$ 是唯一存在的且是可容许的，故 $\hat{\theta}(X)$ 在平方损失函数(3)下的唯一 Bayes 估计的一般形式是：

$$\hat{\theta}_B(X) = E(\theta\mid X).$$

推论 1 同定理 1 条件。设定 $I\Upsilon(\alpha,\theta)$ 分布中尺度参数的先验分布为 $\Gamma(\beta,\gamma)$，其中参数 β,γ 为超参数，且 $\beta>0,\gamma>0$，则在平方损失函数(3)下，且形状参数 α 已知的情况下，尺度参数 θ 的 Bayes 估计的精确表达式为：

$$\hat{\theta}_B(X) = \frac{n\alpha+\beta}{\gamma+t}.$$

证明 因为选定尺度参数 θ 的先验分布为 $\Gamma(\beta,\gamma)$，

则有

$$\pi(\theta) = \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\gamma\theta};$$

又因为 $I\Upsilon(\alpha,\theta)$ 分布的密度函数由(1)式给出

$$f(x,\alpha,\theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-(\alpha-1)}\mathrm{e}^{-\theta/x}, x>0,\alpha>0,\theta>0,$$

所以样本的似然函数为 $L(X_1,X_2,\cdots,X_n\mid\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x_i^{-(\alpha-1)}\mathrm{e}^{-\theta/x_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{-(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\right)\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-t\theta}$，

其中 $t=\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}$， $x>0,\alpha>0,\theta>0$。

DOI: 10.12677/pm.2022.1211213

因此，尺度参数θ的后验分布密度为：

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta\mid X)&=\frac{L(X_1,X_2,\cdots,X_n\mid\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{\infty}L(X_1,X_2,\cdots,X_n\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}\\
&=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{-(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\right)\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-t\theta}\frac{\gamma^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\gamma\theta}}{\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{-(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\right)\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-t\theta}\frac{\gamma^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\gamma\theta}\mathrm{d}\theta}\\
&=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{-(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\right)\frac{\gamma^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{-(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\right)\frac{\gamma^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\mathrm{d}\theta}\\
&=\frac{\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}}{\int_0^{\infty}\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\mathrm{d}\theta}=\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

上式结果可以看出，尺度参数θ的后验分布服从伽马分布$\Gamma(n\alpha+\beta,\gamma+t)$。

于是有

$$
\begin{aligned}
E(\theta\mid X)&=\int_0^{\infty}\theta\pi(\theta\mid X)\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\infty}\theta\cdot\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\infty}\theta^{n\alpha+\beta}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(n\alpha+\beta+1)}{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta+1}}\\
&=\frac{n\alpha+\beta}{\gamma+t}
\end{aligned}
$$

因此，由定理 1 可知，θ的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_B(X)=E(\theta\mid X)=\frac{n\alpha+\beta}{\gamma+t}.$$

有上述定理及推论，已经确定了参数在先验分布为$\Gamma(\beta,\gamma)$下的 Bayes 估计，结合定义 1 的原理，下面将进一步给出同条件下尺度参数θ的 E-Bayes 估计。在讨论前限定尺度参数先验分布$\Gamma(\beta,\gamma)$中参数的取值，根据文献[11]，为了使估计的效果较好，参数β和γ的取值应使先验分布密度函数为参数θ的减函数。再根据文献[12]，考虑估计的稳健性，最终确定$0<\beta<\gamma<c$，其中c为常数。

定理 2 同定理 1 条件。设定$I\Upsilon(\alpha,\theta)$分布中尺度参数的先验分布为$\Gamma(\beta,\gamma)$，其中参数β,γ为超参数，且$\beta>0,\gamma>0$，则在平方损失函数(3)下，且形状参数α已知的情况下，尺度参数θ的 E-Bayes 估计的精确表达为：

$$\hat{\theta}_{EB}(X)=\frac{2n\alpha+1}{2c}\ln\frac{c+t}{t},$$

其中$t=\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}$，且β和γ的先验分布分别为$U(0,1)$和$U(0,c)$。

证明 首先由推论 1 可知，尺度参数θ在平方损失函数(3)下的 Bayes 估计的精确表达为：

$$\hat{\theta}_B(X)=E(\theta\mid X)=\frac{n\alpha+\beta}{\gamma+t},$$

其中$t=\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}$；其次，给定尺度参数的先验分布为$\Gamma(\beta,\gamma)$且β,γ均为超参数，$\beta>0,\gamma>0$，假设β,γ独立，则有β和γ的先验分布分别为$U(0,1)$和$U(0,m)$上的均匀分布，所以得到先验分布密度函数$f(\beta,\gamma)=\frac{1}{c}$，最后由定义 1，尺度参数$\theta$在平方损失函数(3)下的 E-Bayes 估计的精确表达式为：

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB}(X)=E(\theta\mid X)&=\int_0^c\int_0^1\frac{n\alpha+\beta}{\gamma+t}f(\beta,\gamma)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\\&=\int_0^c\int_0^1\frac{n\alpha+\beta}{\gamma+t}\frac{1}{c}\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\\&=\frac{1}{c}\int_0^c\frac{1}{\gamma+t}\mathrm{d}\gamma\int_0^1(n\alpha+\beta)\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\cdot\frac{2n\alpha+1}{2}\cdot\ln\frac{c+t}{t}=\frac{2n\alpha+1}{2c}\ln\frac{c+t}{t}\end{aligned}$$

3. 加权平方损失函数下的 E-Bayes 估计

仿照第一节中定理的证明，可以得出：

定理 3 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$I\Upsilon(\alpha,\theta)$分布的简单随机样本，其中α与θ分别为形状参数与尺度参数。令$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，并且$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应随机样本下的观察值，则在加权平方损失函数(4)下，对于任意的先验分布$\pi(\theta)$，且形状参数α已知的情况下，尺度参数θ的唯一 E-Bayes 估计的一般形式为：

$$\hat{\theta}_{B^*}(X)=\frac{E(\theta^{-1}\mid X)}{E(\theta^{-2}\mid X)}.$$

证明 在加权平方损失函数(4)下，$\hat{\theta}(X)$相应的风险函数为：

$$R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)=E\left\{\frac{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2}{\theta^2}\right\},$$

同定理 1，结合贝叶斯观点下$\hat{\theta}(X)$的损失函数，可得$\hat{\theta}(X)$相应的风险函数为：

$$\int R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta=E\left\{E\left\{\frac{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2}{\theta^2}\mid X\right\}\right\},$$

其中$E\left\{\frac{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2}{\theta^2}\mid X\right\}$表示参数$\theta$与样本$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布下的数学期望。

利用相同方法，需要将风险函数中的$E\left\{\frac{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2}{\theta^2}\mid X\right\}$极小化即可。

因为

$$E\left\{\frac{\left(\hat{\theta}(X)-\theta\right)^2}{\theta^2}\mid X\right\}=\hat{\theta}^2(X)E\left(\theta^{-2}\mid X\right)-2\hat{\theta}(X)E\left(\theta^{-1}\mid X\right)+1，$$

设

$$f\left(\hat{\theta}(X)\right)=\hat{\theta}^2(X)E\left(\theta^{-2}\mid X\right)-2\hat{\theta}(X)E\left(\theta^{-1}\mid X\right)+1，$$

将 $f\left(\hat{\theta}(X)\right)$ 关于 $\hat{\theta}(X)$ 求微分并令其等于零，便可解得：$\hat{\theta}(X)=\dfrac{E\left(\theta^{-1}\mid X\right)}{E\left(\theta^{-2}\mid X\right)}$。

由于 $f\left(\hat{\theta}(X)\right)$ 是凸函数，所以 $\hat{\theta}(X)$ 是 $f\left(\hat{\theta}(X)\right)$ 的唯一最小值点，同时若存在 θ' 使得 $R_{\hat{\theta}(X)}(\theta)<\infty$，则对于参数 θ 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}(X)$ 是唯一存在的且是可容许的，故 $\hat{\theta}(X)$ 在加权平方损失函数(4)下的唯一 Bayes 估计的一般形式是：

$$\hat{\theta}_{B^*}(X)=\frac{E\left(\theta^{-1}\mid X\right)}{E\left(\theta^{-2}\mid X\right)}.$$

推论 2 同定理 3 条件。设定 $I\Upsilon(\alpha,\theta)$ 分布中尺度参数的先验分布为 $\Gamma(\beta,\gamma)$，其中参数 β,γ 为超参数且 $\beta>0,\gamma>0$，则在加权平方损失函数(4)下，对于任意的先验分布 $\pi(\theta)$，在形状参数 α 已知的情况下，尺度参数 θ 的 Bayes 估计的精确表达为：

$$\hat{\theta}_{B^*}(X)=\frac{n\alpha+\beta-2}{\gamma+t}.$$

证明 由推论 1 的证明可知，尺度参数 θ 的后验分布服从 $\Gamma(n\alpha+\beta,\gamma+t)$ 分布。

于是有

$$\begin{aligned}E\left(\theta^{-1}\mid X\right)&=\int_0^{\infty}\theta^{-1}\pi(\theta\mid X)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\infty}\theta^{-1}\cdot\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\infty}\theta^{n\alpha+\beta-2}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(n\alpha+\beta-1)}{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta-1}}\\&=\frac{\gamma+t}{n\alpha+\beta-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left(\theta^{-2}\mid X\right)&=\int_0^{\infty}\theta^{-2}\pi(\theta\mid X)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\infty}\theta^{-2}\cdot\theta^{n\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\infty}\theta^{n\alpha+\beta-3}\mathrm{e}^{-(\gamma+t)\theta}\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(n\alpha+\beta-2)}{(\gamma+t)^{n\alpha+\beta-2}}\\&=\frac{(\gamma+t)^2}{(n\alpha+\beta-1)(n\alpha+\beta-2)}\end{aligned}$$

因此，由定理 3 可知，尺度参数 θ 的 Bayes 估计的精确表达式为：

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{B^*}(X)&=\frac{E\left(\theta^{-1}\mid X\right)}{E\left(\theta^{-2}\mid X\right)}\\&=\frac{\gamma+t}{n\alpha+\beta-1}\bigg/\frac{(\gamma+t)^2}{(n\alpha+\beta-1)(n\alpha+\beta-2)}\\&=\frac{n\alpha+\beta-2}{\gamma+t}\end{aligned}$$

定理 4 同定理 3 条件。设定 $I\Upsilon(\alpha,\theta)$ 分布中尺度参数的先验分布为 $\Gamma(\beta,\gamma)$，其中参数 β,γ 为超参数，且 $\beta>0,\gamma>0$，则在平方损失函数(4)下，且形状参数 α 已知的情况下，尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计的精确表达式为：

$$\hat{\theta}_{EB^*}(X)=\frac{2n\alpha-3}{2c}\ln\frac{c+t}{t},$$

其中 $t=\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}$，且 β 和 γ 的先验分布分别为 $U(0,1)$ 和 $U(0,c)$。

证明 由推论 2 可知，尺度参数 θ 在加权平方损失函数(4)下的 Bayes 估计的精确表达为

$$\hat{\theta}_{B^*}(X)=\frac{n\alpha+\beta-2}{\gamma+t},$$

其中 $t=\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}$；其次，给定尺度参数的先验分布为 $\Gamma(\beta,\gamma)$ 且 β,γ 均为超参数，$\beta>0,\gamma>0$，假设 β,γ 独立，则有 β 和 γ 的先验分布分别为 $U(0,1)$ 和 $U(0,m)$ 上的均匀分布，所以得到先验分布密度函数 $f(\beta,\gamma)=\frac{1}{c}$，最后再根据定义 1，可得尺度参数 θ 在加权平方损失函数(4)下的 E-Bayes 估计的精确表达为：

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB^*}(X)&=E(\theta\mid X)=\int_0^c\int_0^1\frac{n\alpha+\beta-2}{\gamma+t}f(\beta,\gamma)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\\&=\int_0^c\int_0^1\frac{n\alpha+\beta-2}{\gamma+t}\frac{1}{c}\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\\&=\frac{1}{c}\int_0^c\frac{1}{\gamma+t}\mathrm{d}\gamma\int_0^1(n\alpha+\beta-2)\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\cdot\frac{2n\alpha-3}{2}\cdot\ln\frac{c+t}{t}=\frac{2n\alpha-3}{2c}\ln\frac{c+t}{t}\end{aligned}$$

4. 数值模拟

为进一步佐证文章给出的方法与估计结果的可行性与准确性，运用 MATLAB 进行蒙特卡洛随机模拟。模拟中给定参数真实值 $\theta=1,\alpha=2,c=1$，并对各类数据进行分类讨论，对样本容量 n 分别取值 10、20、50、100，并进行有效的 2000 次模拟。模拟结果如下表，其中 EB 表示尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计，MSE 表示估计值与给定真值的均方误差，Abs 表示估计值与给定真值的偏差绝对值。

对比表 1 和表 2 的模拟结果可以看出：

1) 对比两种损失函数下的模拟结果，发现当样本容量 n 逐步增大时，E-Bayes 估计的 MSE 和 Abs 都在减小。即说明数据模拟的结果是可行的，同时也说明逆伽马分布中尺度参数的估计本身具有大样本性质。

Table 1. E-Bayes estimation of the scale parameters θ under the squared loss function (3)
表 1. 平方损失函数(3)下尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计

n	EB	MSE	Abs
10	1.0502	7.1901E−06	0.0502
20	1.0219	2.16638E−06	0.0219
50	1.0102	5.42531E−07	0.0102
100	1.0040	1.51226E−07	0.0040

Table 2. E-Bayes estimation of the scaled parameter θ under the weighted squared loss function (4)
表 2. 加权平方损失函数(4)下尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计

n	EB	MSE	Abs
10	0.9478	5.85559E−06	0.0522
20	0.9714	1.9577E−06	0.0296
50	0.9901	5.21153E−07	0.0099
100	0.9940	1.48224E−07	0.0060

2) 随着样本容量 n 的增大，平方损失函数(3)下的 E-Bayes 估计值逐渐递减并接近真值；随着样本容量 n 的增大，加权平方损失函数(4)下的 E-Bayes 估计值逐渐递增并接近真值，同时发现在大样本容量下，模拟效果最好。

估计参数时，估计的稳健性也是研究的一大重点。由上述结论需讨论两类损失函数的稳健性，应选取大样本数据，即样本容量为 $n=100$ 不变时，改变 c 的数值，进而进行随机模拟。在确保数据准确性的前提下，c 的值分别取为 0.8、0.85、0.9、0.95。模拟结果如下：

Table 3. Robustness of E-Bayes estimation for scale parameter θ under the squared loss function (3)
表 3. 平方损失函数(3)下尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计的稳健性

c	EB	MSE	Abs
0.8	0.6429	1.64517E−07	0.3571
0.85	0.7255	1.88072E−07	0.2745
0.9	0.8137	1.76655E−07	0.1863
0.95	0.9069	1.07877E−07	0.0931
0.99	0.9846	5.02217E−07	0.0154

Table 4. Robustness of E-Bayes estimation for scale parameter θ under the weighted squared loss function (4)
表 4. 加权平方损失函数(4)下尺度参数 θ 的 E-Bayes 估计的稳健性

c	EB	MSE	Abs
0.8	0.6365	1.61251E−07	0.3635
0.85	0.7182	1.84338E−07	0.2818
0.9	0.8055	1.73148E−07	0.1945
0.95	0.8979	1.05736E−07	0.1021
0.99	0.9748	4.92248E−07	0.0252

对比表 3 和表 4 的结果可以看出：

1) 当参数 c 逐步递增接近 1 时，E-Bayes 估计的 Abs 逐步减小，说明估计值越接近真值，并且说明数据估计的结果是真实的。

2) 在平方损失函数(3)下的 E-Bayes 估计的值要比在加权损失函数(4)下的 E-Bayes 估计更靠近真值，但在加权损失函数(4)下的 E-Bayes 估计值变化相对较小，表明在加权损失函数(4)下的 E-Bayes 估计稳健性较好。

综上，结合表 1~4 数据图表，说明在大样本数据处理上研究 $I\Upsilon(a,\theta)$ 分布的形状参数时，可考虑选取加权平方损失函数。

5. 结论

E-Bayes 估计是近些年中对参数估计问题研究下不断迭代发展出来的最新方法，而对逆伽马分布参数的研究也尚不完善，本文就此背景下，利用 E-Bayes 估计方法，基于平方损失函数和加权平方损失函数下，讨论逆伽马分布在形状参数已知且给定下，尺度参数的 E-Bayes 估计，并运用蒙特卡洛方法对尺度参数在两种损失函数下进行数值模拟，结果表明：加权损失函数下的 E-Bayes 估计稳健性较好，可以判定加权平方损失函数下逆伽马分布参数的 E-Bayes 估计是最优估计方法，同时此结论可作为其在应用研究上的理论基础。在后续研究中可以利用文章结论，具体讨论实例下的模拟情况，并不断完善理论下的实际应用。

参考文献

[1] 张月. 艾拉姆咖分布中参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断[J]. 新疆师范大学学报: 自然科学版, 2017, 36(3): 49-52.

[2] 邹鲲, 赵修斌, 田孝华, 谢洪森. 非高斯杂波中知识辅助的信号检测算法[J]. 信号处理, 2012, 28(1): 60-66.

[3] 李康, 史宪铭, 李广宁, 刘昊邦. 基于正态-逆伽马分布的反巡航导弹命中概率估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2022, 44(8): 2621-2627.

[4] 丁新月, 徐美萍. Mlinex 损失函数下逆伽马分布尺度参数的 Bayes 估计[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 2014(3): 61-64.

[5] 陶袁, 李晶. 一类寿命分布的贝叶斯估计问题[J]. 渤海大学学报: 自然科学版, 2021, 42(1): 36-40.

[6] 蒋杰, 王立春. 线性模型参数向量的近似贝叶斯估计[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2022, 37(1): 1-14.

[7] 张志华, 田艳梅, 郭尚峰. 指数型产品可靠性验收试验方案研究[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(4): 753-756.

[8] 鄢伟安, 宋保维, 毛昭勇. 双边定数截尾下广义指数分布的贝叶斯估计[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(1): 234-236.

[9] 韩明. 可靠度的一种新估计方法[J]. 兵工学报, 2004, 25(1): 60-66.

[10] 韩明. 不同损失函数下 Poisson 分布参数的 E-Bayes 估计及其 E-MSE [J]. 数学物理学报: A 辑, 2019, 39(3): 664-673.

[11] 韩明. 多层先验分布的构造及其应用[J]. 运筹与管理, 1997, 6(3): 31-40.

[12] Berger, J.O. (1985) Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. 2nd Edition, Springer Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4286-2

[13] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 367-372.