Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1869-1874
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211200

Hans汉斯

类似三对角矩阵行列式的递推公式算法

左陈宇，代慧慧，李梦玟，张雨婷，袁之成，董　兵，王　文
合肥师范学院数学与统计学院，安徽　合肥

收稿日期：2022年10月8日；录用日期：2022年11月7日；发布日期：2022年11月14日

摘　要

本文研究了一类特殊的类似三对角的行列式的递推公式。通过迭代关系算法表示，得到一个简洁的递推结果表示，方便在其它领域的应用。

关键词

三对角行列式，迭代，递推

A Recursive Formula Algorithm of Similar to a Tridiagonal Matrix Determinant

Chenyu Zuo, Huihui Dai, Mengwen Li, Yuting Zhang, Zhicheng Yuan, Bing Dong, Wen Wang
School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei Anhui

Received: Oct. 8th, 2022; accepted: Nov. 7th, 2022; published: Nov. 14th, 2022

Abstract

In this paper, we study the recurrence formula of a special kind of determinant similar to tridiagonal. A concise recursive result representation is obtained by using iterative relation algorithm, which is convenient for application in other fields.

Keywords

Tridiagonal Determinant, Iteration, Recursion

文章引用: 左陈宇, 代慧慧, 李梦玟, 张雨婷, 袁之成, 董兵, 王文. 类似三对角矩阵行列式的递推公式算法[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1869-1874. DOI: 10.12677/pm.2022.1211200

1. 引言及主要结果

行列式的计算是高等代数中十分重要的内容[1]，而且一些特殊的行列式在实际应用中有着重要的作用。比如三对角行列式在经济学中有着非常广泛的应用，在线性代数和组合数学中也具有重要的应用价值。因此，寻找这些特殊行列式的显示计算公式或地推公式也变得非常重要。文献[2]中介绍一些三阶的三对角矩阵的行列式的计算方法，文献[3] [4]中介绍对角矩阵逆矩阵的计算公式。文献[5]中给出 n 阶三对角矩阵的行列式特殊形式的计算公式，文献[3]中给出了下面一般的类似 n 阶三对角矩阵 U 的行列式的递推公式和连分数形式的公式，

$$U=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-2} \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-3} \\ a_3 & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-4} \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} & d_1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

本文主要受文献[3]的启发，对矩阵 U 再加一条边，并给出具体的递推计算，并对其进行简洁表示。本文构造的行列式有三条边框，即第一行、第一列和第 $n+1$ 列，其中的元素是互异的常数。另一条边框，即第 $n+1$ 行，其第一个和最后一个元素为常数，且与行列式中各元素均互异，第 $n+1$ 行的其它元素均为 0，即

$$D=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} & d_{n-2} \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-3} \\ a_3 & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-4} \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} & d_1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

进一步地，所构造行列式的计算结果存在叠代关系。最终发现此关系可用秦九韶算法表示，即得出简洁的结果表示，方便在其它领域的应用。我们的主要结果如下：

定理对 $n\in N^{+}$，矩阵 D 的行列式可表示为

$$|D_n|=-a_n\cdot\left(P_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{P_{[n-(i+2)]}}{b_{i+2}}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n-1}b_i+\left(Q_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{Q_{[n-(i+2)]}}{b_{i+2}}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n}b_i, \tag{1}$$

其中

$$P_1 = c_{n-1},\quad P_i = -\frac{c_{(n-i)}}{b_{(n-i+1)}} \cdot P_{i-1} + d_{i-1};$$

$$Q_1 = a_{n-1},\quad Q_i = -\frac{c_{(n-i)}}{b_{(n-i+1)}} \cdot Q_{i-1} + a_{n-i}, i = 2,3,\cdots,n-1.$$

证明：按最后一行展开可得

$$|D| = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} & d_{n-2} \\ b_2 & c_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-3} \\ 0 & b_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-4} \\ 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= H_1 + H_2$$

下面分别计算行列式 H_1 和 H_2。先计算 H_1，添加边框后再交换第一列和最后一列，可得

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-4} & e_{n-3} & d_{n-2} \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{n-3} \\ 0 & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & d_{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-3} & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & c_{n-2} & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ d_{n-2} & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-4} & e_{n-3} & 0 \\ d_{n-3} & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-4} & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-3} & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ c_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{按第一行展开}}}(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} d_{n-2} & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\ d_{n-3} & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-4} & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-5} & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} \\ c_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} d_{n-2} & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\ d_{n-3} & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-4} & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-5} & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{c_{n-2}}{b_{n-2}} c_{n-1} + d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & 0 \\ c_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$
=(-1)^{n+2}\begin{vmatrix}
d_{n-2} & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\
d_{n-3} & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
d_{n-4} & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-2}}c_{n-1}+d_1\right)\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}+d_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3} & 0 & 0 \\
-\frac{c_{n-2}}{b_{n-2}}c_{n-1}+d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & 0 \\
c_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
-\left(-\left(-\left(-\left(\cdots\left(-\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1\right)\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}+d_2\right)\frac{c_{n-4}}{b_{n-3}}+d_3\cdots\right)\frac{c_4}{b_5}+d_{n-6}\right)\frac{c_3}{b_4}+d_{n-5}\right)\frac{c_2}{b_3}+d_{n-4}\right)\frac{c_1}{b_2}+d_{n-2} & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\
-\left(-\left(-\left(\cdots\left(-\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1\right)\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}+d_2\right)\frac{c_{n-4}}{b_{n-3}}+d_3\cdots\right)\frac{c_4}{b_5}+d_{n-6}\right)\frac{c_3}{b_4}+d_{n-5}\right)\frac{c_2}{b_3}+d_{n-3} & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\left(-\left(\cdots\left(-\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1\right)\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}+d_2\right)\frac{c_{n-4}}{b_{n-3}}+d_3\cdots\right)\frac{c_4}{b_5}+d_{n-6}\right)\frac{c_3}{b_4}+d_{n-4} & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\cdots\left(-\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1\right)\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}+d_2\right)\frac{c_{n-4}}{b_{n-3}}+d_3\cdots\right)\frac{c_4}{b_5}+d_{n-5} & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1\right)\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}+d_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3} & 0 & 0 \\
-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & 0 \\
c_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

令 $P_1=c_{n-1},P_2=-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1,P_3=-\frac{c_{n-3}}{b_{n-2}}\left(-\frac{c_{n-2}}{b_{n-1}}c_{n-1}+d_1\right)+d_2,\cdots$

由此通项公式可以表示为

$$P_i=-\frac{c_{n-i}}{b_{n-(i-1)}}P_{i-1}+d_{i-1},\ i=2,3,\cdots,n-1.$$

则上式可化为

$$
H_1=\begin{vmatrix}
P_{n-1} & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\
P_{n-2} & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
P_{n-3} & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
P_{n-4} & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
P_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3} & 0 & 0 \\
P_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & 0 \\
P_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1}
\end{vmatrix}
\xlongequal{\text{将第}i\text{列分别乘上}\left(-\frac{P_{n-i}}{b_i}\right)\text{加到第一列}}
$$

$$\begin{vmatrix} P_{n-1}-\frac{P_{n-3}}{b_3}e_1-\frac{P_{n-4}}{b_4}e_2-\cdots-\frac{P_1}{b_{n-1}}e_{n-3} & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\left(P_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{P_{n-(i+2)}}{b_{i+2}}\right)\prod_{i=2}^{n-i}b_i.$$

由行列式 H_1 的计算过程中发现，下面行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} d_{n-2} & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\ d_{n-3} & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-4} & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_{n-5} & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} \\ c_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =\left(P_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{P_{[n-(i+2)]}}{b_{i+2}}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n-1}b_i; \quad (2)$$

利用(2)式，可求得

$$H_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-5} & e_{n-4} & e_{n-3} \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & c_{n-2} \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =\left(Q_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{Q_{[n-(i+2)]}}{b_{i+2}}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n-1}b_i;$$

其中 $Q_1=a_{n-1},Q_i=-\frac{c_{(n-i)}}{b_{(n-i+1)}}\cdot Q_{i-1}+a_{n-i},i=2,3,\cdots,n-1$.

所以

$$\begin{aligned}|D_n|&=(-1)^{n-1}a_n\cdot(-1)^{n+2}|H_1|+(-1)^{2n}b_n\cdot|H_2| \\ &=-a_n\cdot\left(P_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{P_{[n-(i+2)]}}{b_{i+2}}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n-1}b_i+\left(Q_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3}e_i\cdot\frac{Q_{[n-(i+2)]}}{b_{i+2}}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n}b_i.\end{aligned}$$

2. 简单应用

例：计算行列式

$$|T|=\begin{vmatrix} a & \beta & e & e & \cdots & e & e & e & d \\ a & \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & \beta & d \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

解：根据定理中的公式可得

$$\begin{aligned} |T| &= -a\cdot\left(A_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3} e\cdot\frac{A_{[n-(i+2)]}}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{n-3}+\left(B_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-3} e\cdot\frac{B_{[n-(i+2)]}}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{n-2} \\ &= -a\cdot\left(A_{n-1}+\frac{e}{\alpha}\sum_{i=1}^{n-3} A_{[n-(i+2)]}\right)\cdot\alpha^{n-3}+\left(B_{n-1}-\frac{e}{\alpha}\sum_{i=1}^{n-3} B_{[n-(i+2)]}\right)\cdot\alpha^{n-2} \end{aligned}$$

(其中 $A_1=\beta$， $A_i=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot A_{i-1}+d$； $B_1=a$， $B_i=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot B_{i-1}+a$， $i=2,3,\cdots,n-1$)。

基金项目

安徽省 2020 年创新创业训练计划省级项目(S202014098010)，2021 年国家级大学生创新创业训练计划项目(202114098036)。

参考文献

[1] 北京大学数学系. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 杨胜良. 三对角行列式及其应用[J]. 工科数学, 2002(2): 106-108.

[3] Kılıç, E. (2008) Explicit Formula for the Inverse of a Tridiagonal Matrix by Backward Continued Fractions. *Applied Mathematics and Computation*, **197**, 345-357. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.07.046

[4] Barrett, W.W. (1979) A Theorem on Inverses of Tridiagonal Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **27**, 211-217. https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90043-0

[5] Qi, F., Wang, W., Guo, B.-N. and Lim, D. (2021) Several Explicit and Recurrent Formulas for Determinants of Tridiagonal Matrices via Generalized Continued Fractions. In: Hammouch, Z., Dutta, H., Melliani, S. and Ruzhansky, M., Eds., *Nonlinear Analysis*: *Problems*, *Applications and Computational Methods*, *Lecture Notes in Networks and Systems*, Springer, Cham, Vol. 168, 233-248. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62299-2_15