

模糊Riesz空间中的模糊算子

赵娟娟, 程 娜*

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2022年10月11日; 录用日期: 2022年11月10日; 发布日期: 2022年11月21日

摘 要

本文首先讨论模糊赋范Riesz空间上模糊序连续范数的一些性质, 得到模糊序连续范数与模糊范闭理想之间的联系, 给出模糊 σ -理想的等价命题, 然后给出了模糊理想是模糊投影带的必要条件; 最后讨论了模糊赋范Riesz空间上模糊序连续算子的一些性质及研究模糊算子扩张, 得到模糊序有界正算子构成的模糊理想的性质及模糊理想上的模糊算子与模糊序连续算子之间的关系。

关键词

模糊赋范Riesz空间, 模糊序连续范数, 模糊正投影, 模糊算子

Fuzzy Operators in Fuzzy Riesz Spaces

Juanjuan Zhao, Na Cheng*

School of Sciences, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Oct. 11th, 2022; accepted: Nov. 10th, 2022; published: Nov. 21st, 2022

Abstract

In this paper, we first discuss some properties of fuzzy ordered continuous norms on fuzzy normed Riesz spaces such as the relationship between fuzzy ordered continuous norms and fuzzy normed closed ideals, giving the equivalent proposition of fuzzy σ -ideals, and then give the necessary conditions for fuzzy ideals to be fuzzy projective bands. Finally, we discuss some properties of fuzzy ordered continuous operators on fuzzy normed Riesz spaces and study the extension of fuzzy operators. We obtain the properties of fuzzy ideals formed by fuzzy ordered bounded positive operators and the relationship between fuzzy operators on fuzzy ideals and fuzzy ordered continuous operators.

*通讯作者。

Keywords

Fuzzy Normed Riesz Space, Fuzzy Order Continuous Norm, Fuzzy Positive Projection, Fuzzy Operator

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1965 年, Zadeh [1] 提出模糊集及 1971 年 [2] 引入了模糊序的概念之后, 1992 年, Venugopalan [3] 定义了模糊序集并对模糊序集展开系统研究。在 Zadeh 等人研究的基础上, 1994 年, Beg 和 Islam [4] [5] 先给出模糊 Riesz 空间的定义, 得到模糊 Riesz 分解等性质; 同年引入模糊序线性空间的概念并讨论模糊序收敛。1997 年, Beg 和 Islam [6] [7] 先后引入 σ -完备的模糊 Riesz 空间和模糊 Archimedeal 空间的概念, 后者还讨论了模糊 Archimedean 空间与完备的模糊 Riesz 空间之间的关系。然后, L. Hong [8] 介绍了模糊 Riesz 子空间、模糊理想、模糊带和模糊带投影等概念。基于模糊 Riesz 空间的一些重要结论, 很多人开始研究模糊算子。

1984 年, Katsaras [9] 首次在线性空间上引入了模糊范数的概念。1992 年, Felbin [10] 定义了模糊有界线性算子。同年, Cheng 和 Mordeson [11] 在模糊赋范线性空间上定义了模糊线性算子及模糊赋范线性空间的概念, 并用模糊范数定义刻画了模糊线性算子的连续性。Xiao 和 Zhu [12] 在 2003 年讨论了模糊赋范空间上线性算子的完备性。2020 年, Sharma 和 Hazarika [13] 研究了模糊赋范线性空间上线性算子的模糊有界性的各种概念之间的关系, 讨论了模糊紧算子的模糊有界性。Bag 和 Samanta [14] [15] 定义了两类模糊有界线性算子(强算子和弱算子), 研究了模糊连续性和模糊有界性之间的关系, 并建立了 Hahn-Banach 定理、开映射定理、闭图像定理和一致有界定理。Park [16] 给出了模糊赋范 Riesz 空间的概念, 并直接证明了保格泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性。M. Iqbal 和 Z. Bashir [17] 研究了模糊序有界线性算子空间和模糊序对偶空间的分离性质, 并讨论了局部实凸模糊 Riesz 空间的模糊序对偶和模糊拓扑对偶之间的关系。Cheng [18] 在模糊 Riesz 空间上研究了模糊线性算子扩张, 并得到 Hahn-Banach 定理推广的结论。

本文首先讨论模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续范数的一些性质, 给出模糊 σ -理想的等价命题, 给出了模糊理想是模糊投影带的必要条件, 并讨论了模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续算子的一些性质。本篇文章研究得到的结论可以进一步发展完善模糊赋范 Riesz 空间和算子理论。

本文结构如下, 在第二节简要回顾一些基本概念和性质。第三节我们将讨论模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续范数的一些性质, 给出模糊 σ -理想的等价命题和给出模糊理想是模糊投影带的必要条件。第四节讨论模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续算子的一些性质。第五节是本文的结论。

有关模糊 Riesz 空间和模糊赋范 Riesz 空间的一些重要结论以及各类符号可以参考文献 [1]-[19]。

2. 预备知识

定义 2.1 [3] 假设 X 是论域, X 中的模糊序 μ 是 $X \times X$ 的模糊子集, 当特征函数 μ 满足如下条件时, 则 μ 是 X 上的模糊序,

- 1) 任意 $x \in X$, $\mu(x, x) = 1$ (自反性);

2) 任意 $x, y \in X$, 当 $\mu(x, y) + \mu(y, x) > 1$ 有 $x = y$ (反对称性);

3) 任意 $x, z \in X$, 有 $\mu(x, z) \geq \vee(\mu(x, y) \wedge \mu(y, z))$ (传递性)。

其中 $\mu: X \times X \rightarrow [0, 1]$ 是 $X \times X$ 模糊子集的特征函数。

集合上赋予模糊序称该集合为模糊序集。

符号 2.2 [2] 假设 X 是模糊序集, $x \in X$ 。 $\downarrow x$ 是 X 上的模糊集, 对任意 $y \in X$ 表示为 $(\downarrow x)(y) = \mu(y, x)$ 。同理, 对任意 $y \in X$, $\uparrow x$ 表示 $(\uparrow x)(y) = \mu(x, y)$ 。若 A 是 X 的子集, 则 $\uparrow A = \bigvee_{x \in A} (\uparrow x)$, $\downarrow A = \bigvee_{x \in A} (\downarrow x)$ 。

定义 2.3 [2] 假设 A 是 X 的子集, A 的上界 $U(A)$ 定义如下:

$$U(A)(y) = \begin{cases} 0, & \mu(x, y) \leq \frac{1}{2}, \\ (\bigcap_{x \in A} \uparrow x)(y), & \text{其他} \end{cases}$$

同理, A 的下界 $L(A)$ 定义如下:

$$L(A)(y) = \begin{cases} 0, & \mu(y, x) \leq \frac{1}{2}, \\ (\bigcap_{x \in A} \downarrow x)(y), & \text{其他} \end{cases}$$

对任意 $x \in X$, 当满足 $U(A)(x) > 0$ 时称 $x \in U(A)$; 任意 $x \in X$, 当满足 $L(A)(x) > 0$ 时称 $x \in L(A)$ 。如果 $x \in X$ 且 $x \in U(A)$, 称 A 有上界, x 是 A 的一个上界。同理, 如果 $x \in X$ 且 $x \in L(A)$, 称 A 有下界, x 是 A 的一个下界。如果 A 既有上界又有下界, 称 A 有界。

元素 $z \in X$ 满足 (1) $z \in U(A)$, (2) 当 $y \in U(A)$ 时有 $y \in U(z)$, 则称 $z \in X$ 是 A 的上确界。同理, 元素 $z \in X$ 满足 (1) $y \in L(A)$, (2) 当 $y \in L(A)$ 时有 $y \in L(z)$, 则称 $z \in X$ 是 A 的下确界。

性质 2.4 [2] 假设 A 是模糊集 X 的子集:

1) 如果 $\sup A$ 存在, 则唯一;

2) 如果 $\inf A$ 存在, 则唯一。

注解 2.5 [2] $x \vee y = \sup\{x, y\}$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$

定义 2.6 [3] 在模糊序线性空间 X 中, 如果元素 x 满足 $\mu(0, x) > \frac{1}{2}$, 则元素 x 是正元素; 如果元素 x 满足 $\mu(x, 0) > \frac{1}{2}$, 则元素 x 是负元素。

定义 2.7 [8] 设 X 是模糊序集, $\{x_\alpha\}$ 是 X 的网, 如果对任意 α, β , 当 $\alpha \leq \beta$ 时有 $\mu(x_\alpha, x_\beta) > \frac{1}{2}$, 则 $\{x_\alpha\}$ 是递增的, 记作 $x_\alpha \uparrow$ 。如果 $x = \sup\{x_\alpha\}$ 存在, 则 $x_\alpha \uparrow x$ 。同理, 若 $\{x_\alpha\}$ 是递减的, 表示为 $x_\alpha \downarrow$ 。

定义 2.8 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间。假设 A 是 X 的模糊 solid 子空间, 则 A 叫做 X 的模糊理想。

定义 2.9 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间, P 是模糊带。如果 P 满足 $X = P + P^d$, 则 P 是模糊投影带。

定义 2.10 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间, Y 是 X 的模糊 Riesz 子空间。如果任意正元素 $x \in X$, 存在非零元素 $y \in Y$ 使得 $\mu(y, x) > \frac{1}{2}$, 则称 Y 在 X 中模糊序稠。

定义 2.11 [10] 假设 X 是数域 F 上的线性空间, N 是 $X \times R$ 的模糊子集。 N 叫做 X 上的模糊范数, 当且仅当任意 $x, y \in X, c \in F$ 满足下述条件成立:

N1) 任意 $t \in R, t \leq 0$, $N(x, t) = 0$;

N2) 任意 $t \in R, t > 0$, $N(x, t) = 1$ 当且仅当 $x = 0$;

N3) 任意 $t \in R, t > 0$, 如果 $c \neq 0$, 则 $N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$, 如果 $c = 0$, 则 $N(cx, t) = 1$;

N4) 任意 $s, t \in R$, $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$;

N5) $N(x, \cdot)$ 是 R 上的左连续不减函数, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ 。

此时称 (X, N) 为模糊赋范线性空间。

定义 2.12 [10] 假设 (X, N) 为模糊赋范线性空间,

N6) 任意 $t > 0$, 若 $N(x, t) > 0$, 则 $x = 0$ 。

定义 $\|x\|_\alpha = \wedge\{t: N(x, t) \geq \alpha\}$ $\alpha \in (0, 1)$, 则 $\{\|\cdot\|_\alpha: \alpha \in (0, 1)\}$ 是 X 上的升序范数族, 称之为 X 上的 α -范数。

注解 2.13 [10]

N7) 假设 $x \neq 0$, $N(x, \cdot)$ 是 R 上的连续函数且严格递增。

定义 2.14 [10] 假设 (X, N) 是模糊赋范线性空间, $\{x_n\}_n$ 是 X 上的序列。如果对任意 $t > 0$, 存在 $x \in X$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$, 则 $\{x_n\}_n$ 在 X 上模糊范收敛, 范极限为 x 。

定义 2.15 [10] 如果任意 $t > 0, p = 1, 2, \dots$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p} - x_n, t) = 1$, 则称 $\{x_n\}_n$ 为 X 上的模糊范柯西列。

性质 2.16 [10] 模糊赋范线性空间上收敛序列的子序列也收敛, 且有相同的模糊序极限。每个收敛序列都是模糊柯西列。

定义 2.17 [16] 假设 $(X, \leq)$ 是模糊 Riesz 空间。 $N: X \times R \rightarrow [0, 1]$ 是 X 上的模糊范数, 如果 N 满足下述条件,

N7) 若 $|x| \leq |y|$, 则 $N(x, t) \geq N(y, t)$,

则称 N 为 Riesz 模糊范数, $(X^\circ, \leq, N)$ 称为 Riesz 模糊赋范空间。

定义 2.18 [19] 模糊序有界正线性算子记作 $L_b(X, F)$, 模糊序连续有界线性算子记作 $L_n(X, F)$, σ -模糊序连续有界线性算子记作 $L_c(X, F)$ 。当 F 模糊 Dedekind 完备时, 则 $L_n(X, F) \subseteq L_c(X, F)$ 。

定义 2.19 [19] 假设 $(X, \mu), (F, \eta)$ 是模糊 Riesz 空间, F 模糊 Dedekind 完备。对任意 $x \in X$, 有模糊序有界算子 $P: X \rightarrow F$ 满足

$$P^+(k) = \sup \left\{ Pg : \mu(g, k) > \frac{1}{2} \right\},$$

$$P^-(k) = \sup \left\{ -Pg : \mu(g, k) > \frac{1}{2} \right\} \text{ 且 } P = P^+ - P^-.$$

性质 2.20 [19] 假设 $(X, \mu), (F, \eta)$ 是模糊 Riesz 空间, F 模糊 Dedekind 完备。则 $L_n(X, F), L_c(X, F)$ 都是 $L_b(X, F)$ 上的模糊带。

3. 模糊序连续范数

本节讨论模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续范数的一些性质, 给出模糊 σ -理想的等价命题, 且给出了模糊理想是模糊投影带的必要条件。

定理 3.1 设 X° 是模糊赋范 Riesz 空间, 若 X° 中每个递增有上界序列模糊范收敛, 则 X° 有模糊序连续范数。

证明: 假设 D 是 X° 中的向下集, 且 $D \downarrow 0 (D \subseteq X^\circ)$, 由模糊序连续范数定义可知, 只需证明 $\inf(\|f\|: f \in D) = 0$ 。

假设 D 包含其有限下确界。任取 $f_0 \in D$, 令 $D_1 = (f \wedge f_0: f \in D)$, 则 D_1 是向下集且 $D_1 \downarrow 0$, $\inf(\|f\|: f \in D) = \inf(\|f\|: f \in D_1)$ 。假设 $D \downarrow 0$ 且 D 有上界 f_0 。令 $D_2 = (f_0 - f: f \in D)$, 则 $D_2 \uparrow f_0$ 且 D_2 是模糊范柯西列。否则, 对任意递增序列 $\{f_n: n = 1, 2, \dots\} \in D$, 存在正数 ε , 使得 $\|f_n - f_m\| \geq \varepsilon$, 与假设矛盾。由参考文献[19]引理 3.1.1 可知, D_2 包含一个与其有相同上界的递增模糊范柯西列。又由参考文献[19]

定理 3.2.5 可知, 存在 f_0 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f_n - f_0, t) = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f - f_0, t) = 1, \forall f \in D_2$ 。任意 $\varepsilon > 0$, 当 $f(\varepsilon) \in D$ 且 $f \leq f(\varepsilon)$ 时, 有 $\|f\| \leq \varepsilon$ 。由此可得 $\inf(\|f\|: f \in D) = 0$, 即 E 有模糊序连续范数。

定理 3.2 设 X° 是模糊赋范 Riesz 空间, 如果 X° 的每个模糊范闭理想是模糊带, 则 X° 有模糊序连续范数。如果 X° 是模糊 Banach 格且具有模糊序连续范数, 则每个范闭理想是模糊投影带。

证明: 假设 X° 中的每个模糊范闭理想是模糊带。下面证明当 D 是向上集且满足 $D \xrightarrow{N} u_0$ 时, 有 $\{\|u_0 - u\|: u \in D\}$ 是向下集, $(u_0 - u) \xrightarrow{N} 0$ 。

取 $\alpha \in (0, 1)$ 满足 $(1 - \alpha)u_0 \xrightarrow{N} 0$ 。因

$$0 \leq u_0 - u = (1 - \alpha)u_0 + (\alpha u_0 - u) \leq (1 - \alpha)u_0 + (\alpha u_0 - u)^+,$$

由 N4 和 N7 可知对任意 $u \in D$, 有

$$N(u_0 - u, t) \geq \min\{N((1 - \alpha)u_0, t), N((\alpha u_0 - u)^+, t)\}。$$

因 $\{(\alpha u_0 - u)^+\}$ 是向下集, 下面证明当 $u^* \in D$ 时, 有 $N((\alpha u_0 - u^*)^+, t) = 1 (n \geq n^* \rightarrow \infty)$ 。又由 $(u - \alpha u_0: u \in D) \uparrow (1 - \alpha)u_0$, 所以 $((u - \alpha u_0)^+: u \in D) \uparrow (1 - \alpha)u_0$ 。

记 $((u - \alpha u_0)^+: u \in D)$ 生成的模糊理想为 A , A 生成的模糊带为 B 。由参考文献[19]定理 3.8 可知 $u_0 \in B$ 。又 $\bar{A}$ 是 A 的模糊范闭包, 由假设可知 $B \subseteq \bar{A}$ 。因为 $u_0 \in B$, 故 $u_0 \in \bar{A}$ 。对于任意正数 ε , 存在 $v \in A$, 使得 $\|u_0 - v\| < \varepsilon$ 。所以 $v^+ \in A$, $|u_0 - v^+| = |u_0^+ - v^+| \leq |u_0 - v| < \varepsilon$ 。假设 $v \in A^+$, 用 $v \wedge u_0$ 代替 v 。因 $v \in A^+$ 且 $((u - \alpha u_0)^+: u \in D) \uparrow$, 所以存在 $u^* \in D$, 使得 v 是 $(u^* - \alpha u_0)^+$ 生成的模糊正则理想的元素。因此

$$v \perp (u^* - \alpha u_0)^- = (\alpha u_0 - u^*)^+ \text{ 且 } v \leq u_0, \quad (\alpha u_0 - u^*)^+ \leq u_0。$$

从而

$$v + (\alpha u_0 - u^*)^+ \leq u_0, \quad \|(\alpha u_0 - u^*)^+\| \leq \|u_0 - v\| \leq \varepsilon, \quad \text{且 } N((\alpha u_0 - u^*)^+, t) \geq N(u_0 - v, t)。$$

由 ε 的任意性, 知 $N(u_0 - v, t) = 1$, $N(\alpha u_0 - u, t) = 1 (n \rightarrow \infty)$ 。由 N4 可知 $N(u_0 - u, t) = 1 (n \rightarrow \infty)$, $u_0 - u \xrightarrow{N} 0$ 。所以 X° 有模糊序连续范数。

由文献[19] 3.2.4 可知, X° 是最大 Dedekind 完备的。因此模糊 Riesz 空间具有模糊投影性, 所以每个范闭理想是模糊投影带。

定理 3.3 设 X 是模糊 Riesz 空间, 则下述命题等价:

- 1) A 是模糊 σ -理想;
- 2) 若 X 中 $u_n \in A^+, n = 1, 2, \dots$ 且 $u_n \uparrow u_0$, 则 $u_0 \in A$;
- 3) 若 $f_n \in A, n = 1, 2, \dots$, 且 f_n 模糊序收敛到 f_0 , 则 $u_0 \in A$ 。

证明: 先证明 1) 与 2) 等价。假设 $u_n \in A^+, n = 1, 2, \dots$, $u_n \uparrow u_0$, 由模糊序收敛可知 $u_0 = \sup u_n$ 。因 A 是模糊 σ -理想, 所以 $u_0 \in A$ 。又由模糊 σ -理想的定义可知, 2) $\Rightarrow$ 1) 成立。

2) $\Rightarrow$ 3)

假设 $f_n \in A, n = 1, 2, \dots$ 且 f_n 模糊序收敛到 f_0 , 则 $f_n \in A^+$, f_n^+ 模糊序收敛到 f_0^+ 。令

$$g_n = f_n^+ \wedge f_0^+, \forall n \in N, \quad \text{则 } \mu(0, f_0^+ - g_n) > \frac{1}{2}, \quad \mu(f_0^+ - g_n, |f_0^+ - f_n^+|) > \frac{1}{2}。 \text{ 令 } u_n = \sup(g_1, \dots, g_n), \forall n \in N,$$

$$\text{有 } \mu(0, u_n) > \frac{1}{2} \text{ 且 } u_n \text{ 是递增序列。所以 } \mu(0, f_0^+ - u_n) > \frac{1}{2}, \quad \mu(f_0^+ - u_n, f_0^+ - g_n) > \frac{1}{2},$$

$\mu(f_0^+ - g_n, |f_0^+ - f_n^+|) > \frac{1}{2}$ 。从而 $u_n \uparrow f_0^+$ 。根据假设可知 $f_0 \in A^+$ 。同理可证 $f_0 \in A^-$, 所以 $f_0 \in A$ 。

3) $\Rightarrow$ 2)

假设 $f_n \in A, n=1, 2, \dots$ 且 f_n 模糊序收敛到 f_0 , 由 3) 可知 $f_0 \in A$ 。令 $u_n \in A^+$, 任意 $n \in N$ 有 $u_n \uparrow u_0$, 则 $(u_0 - u_n) \downarrow 0$ 。设 $p_n = 2(u_0 - u_n)$, 所以 $p_n \downarrow 0$, $\mu(|u_0 - u_n|, p_n) > \frac{1}{2}$ 。因此 $u_0 \in A$ 。

已知线性空间上的算子满足一定运算后是投影, 我们想在模糊 Riesz 空间及模糊赋范 Riesz 空间上研究算子, 就要给出投影、模糊带投影及模糊正投影的相关概念, 然后再讨论他们的性质。

定义 3.4 设 P 是向量空间 V 到它自身的线性算子。若任意 $f \in V$ 都有 $P(Pf) = Pf$, 则 P 是投影。

如果 X 是模糊 Riesz 空间, 当 $V = X$ 时, 任意 $u \in X$, 有 $\mu(0, Pu) > \frac{1}{2}$, 称 P 是模糊正投影。模糊带投影是模糊正投影, 即任意非负元素 $u \in X$, 有 $\mu(0, Pu) > \frac{1}{2}$, $\mu(Pu, u) > \frac{1}{2}$ 。若 P 是模糊带投影, 对一些 $f \in X$, 存在 $g \in X$ 使得 $g = Pf$, 则称 P 是由这些 $f \in X$ 构成集合上的模糊正投影, 记作 B 。 B 是模糊投影带, 即 $B \oplus B^d = X, Pf = 0, f \in B^d$ 。

定理 3.5 设 X 是模糊 Riesz 空间, A 是模糊理想, 若 P 是 A 上的模糊正投影, 则 A 是模糊投影带, 且 A 有模糊带投影 P_A , 满足 $P_A \leq P$ 。

证明: 要证明 A 是模糊投影带, 需证明 $\forall u \in X^+$ 有分解 $u = (u \wedge Pu) - \{u - (u \wedge Pu)\}$, 其中 $(u \wedge Pu) \in A^+$, $\{u - (u \wedge Pu)\} \in A^{d+}$ 。对任意 $g \in A$, 存在 $f \in X$, 使得 $g = Pf$ 。因 P 是模糊正投影, 故 $g = Pf = P^2 f = P(Pf) = Pg$ 。假设 $u \in X^+$, 则 $Pu \in A$ 。因 A 是模糊理想, $\mu(u \wedge Pu, Pu) > \frac{1}{2}$, 所以 $u \wedge Pu \in A$ 。下证 $\{u - (u \wedge Pu)\} \in (A^d)^+$ 。令 $p = v \wedge \{u - (u \wedge Pu)\}$, 取 $p \in A$, 所以 $P_p = p$ 。因为 $\mu(p, \{u - (u \wedge Pu)\}) > \frac{1}{2}$, 并且 $P\{u - (u \wedge Pu)\} = Pu - P(u \wedge Pu) = Pu - (u \wedge Pu)$, 所以

$$\mu(p, P\{u - (u \wedge Pu)\}) > \frac{1}{2},$$

$$\mu(p, \{u - (u \wedge Pu)\} \wedge Pu - (u \wedge Pu)) = \mu(p, (u \wedge Pu) - (u \wedge Pu) = 0) > \frac{1}{2}.$$

故 $\{u - (u \wedge Pu)\} \in A^{d+}$, A 是模糊投影带。由分解是唯一的, 所以 $u \in X^+$ 在 A 中的分解即为 $u \wedge Pu$, 所以 $\mu(u \wedge P_A u = u \wedge Pu, Pu) > \frac{1}{2}$ 。

定理 3.6 设 X° 是具有模糊投影性的模糊赋范 Riesz 空间, 则 X° 有模糊序连续范数当且仅当 P 是范闭理想的模糊正投影。如果 X° 是模糊 Banach 格且具有模糊序连续范数, 则 P 是范闭理想的模糊正投影。

证明: 假设 X° 有模糊序连续范数, 由定理 3.1 可知, 每个模糊范闭理想都是模糊带。因 X° 有模糊投影性可知每个范闭理想都是模糊投影带。假设 A 是模糊范闭理想, 所以 A 是模糊投影带, $P = P_A$ 。对于任意 $g \in A$, 存在 $u \in X^\circ$, 使得 $g = Pu = P_A u$, 所以 P 是 A 上的模糊正投影。另一方面, 假设 P 是每个范闭理想的模糊正投影, 由定理 3.1 可知每个模糊范闭理想是模糊投影带。所以 $P = P_A$, 即 X° 有模糊序连续范数

由定理 3.1 可知每个模糊范闭理想是模糊投影带。

4. 模糊序连续算子

本节讨论了模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续算子的一些性质。

定理 4.1 假设 X, F 是模糊 Riesz 空间, F 是模糊 Dedekind 完备的, 则模糊理想 $L_\sigma(X, F)$ $\{T \in L_b(X, F): C_T = \{0\}\}$ 在 $L_\sigma(X, F)$ 上模糊序稠。

证明: $L_b(X, F) \subseteq L_\sigma(X, F)$ 显然成立, 因此 $\{T \in L_b(E, F): C_T = \{0\}\} \subseteq L_\sigma(E, F)$ 。下面证明模糊序稠。假设模糊正算子 $T \in L_\sigma(X, F)$ 。因为 T 不是模糊序连续的, 由参考文献[19]的引理 3.6 可知, 存在模糊正算子 S 满足 $0 < S \leq T$, 使得 N_S 不是模糊带。记 N_S 生成的模糊带为 B , 由参考文献[18]定理 2.9 可知存在模糊正算子 R , 使得在 B 上有 $R = S$, 在 B^d 上有 $R = 0$ 。显然 $N_S \subseteq N_R$, $0 < R \leq S$ 。另一方面, 因为在 $B^d = N_S^d = C_S$ 上有 $R = 0$, 所以 $N_S \oplus C_S \subseteq N_R$ 。由文献[8]定理 4.7 可知 N_R 在 X 上模糊序稠, 则 R 有零分解。

定理 4.2 假设 X, F 是模糊 Riesz 空间, 并且 F 是模糊 Dedekind 完备的, $T: X \rightarrow F$ 是模糊正算子, 如果 A 是 X 中的模糊理想, 则算子 T 在 A 上模糊序连续当且仅当 T_A 是模糊序连续算子。

证明: 必要性。由参考文献[18]定理 2.9 可知, 对任意 $x \in X^+$, 有

$$T_A(x) = \sup\{T(y): y \in A, 0 \leq y \leq x\} \text{ 成立。}$$

因为在 A 上有 $T_A = T$, 所以当 T_A 模糊序连续时, 有 T 在 A 上模糊序连续。

充分性。假设 T 在 A 上模糊序连续, 下面证明 T_A 也模糊序连续。假设 $0 \leq x_\alpha \uparrow x$, $T_A(x_\alpha) \uparrow z \leq T_A(x)$ 。任取 $y \in A \cap [0, x]$, 则在 A 上有 $0 \leq y \wedge x_\alpha \uparrow y$, 在 F 上有 $T(y \wedge x_\alpha) \uparrow T(y)$ 。因为 $T(y \wedge x_\alpha) = T_A(y \wedge x_\alpha) \leq z \leq T_A(x)$, 所以对任意 $y \in A \cap [0, x]$, 有 $T(y) \leq z \leq T_A(x)$ 成立, 所以 $T_A(x) = \sup T(A \cap [0, x]) \leq z \leq T_A(x)$, 即 $z = T_A(x)$, T_A 是模糊序连续算子。

定理 4.3 假设 X 是模糊 Riesz 空间, 并且 F 是模糊 Dedekind 完备的, G 是被 X 控制的线性子空间, 如果 $T: G \rightarrow F$ 是正的模糊序连续算子, 则 $T(x) = \sup\{T(y): y \in A, 0 \leq y \leq x\}, x \in X^+$ 是 T 从 X 到 F 的唯一模糊序连续扩张。

证明: 因为 G 是 X 上被 X 控制的线性子空间, 所以显然有 $S(x) = \sup\{T(y): y \in A, 0 \leq y \leq x\}, x \in X^+$ 。假设 $\{x_\alpha\} \subseteq G$, $0 \leq x_\alpha \uparrow x$, 则 $T(x_\alpha) \uparrow S(x)$ 。事实上, 任意 $0 \leq y \in G$, 当 $0 \leq y \leq x$ 时, 有 $0 \leq y \wedge x_\alpha \uparrow y$ 。由 T 的连续性可知 $T(y) = \sup\{T(y \wedge x_\alpha)\} \leq \sup\{T(x_\alpha)\} \leq S(x)$, $T(x_\alpha) \uparrow S(x)$ 。假设 $x, y \in X^+$ 时, 存在 $\{x_\alpha\}, \{y_\beta\} \subseteq G^+$ 使得 $0 \leq x_\alpha \uparrow x$, $0 \leq y_\beta \uparrow y$, 则 $0 \leq x_\alpha + y_\beta \uparrow x + y$ 。由上述讨论可得 $T(x_\alpha) + T(y_\beta) = T(x_\alpha + y_\beta) \uparrow S(x + y)$ 。又因为 $T(x_\alpha) \uparrow S(x)$, $T(y_\beta) \uparrow S(y)$, 故 $S(x + y) = S(x) + S(y)$ 。所以 $T: X^+ \rightarrow F^+$ 是可加的。由文献[19]性质 3.2 可知, T 可以从 X 扩张为 F 上的唯一模糊正算子。从而 S 是 T 的扩张。最后证明 S 是模糊序连续的。假设 $0 \leq x_\alpha \uparrow x$, $D = \{y \in G^+: y \leq x_\alpha\}$, 则 $\sup T(D) \leq \sup\{T(x_\alpha)\} \leq S(x)$ 。由 G 在 X 上模糊序稠, 所以 $D \uparrow x$, $\sup T(D) = S(x)$ 。所以 $S(x_\alpha) \uparrow S(x)$ 。

5. 结论

本文首先讨论模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续范数的一些性质, 给出模糊 σ -理想的等价命题, 然后给出了模糊理想是模糊投影带的必要条件。最后讨论了模糊赋范 Riesz 空间上模糊序连续算子的一些性质, 且研究了模糊序连续算子的性质及研究模糊算子扩张。本文得到的结论可以逐渐丰富模糊赋范 Riesz 空间的理论。

基金项目

国家自然科学基金资助(11801458)。

参考文献

- [1] Zadeh, L. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)

- [2] Zadeh, L. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Ordering. *Information Science*, **8**, 177-200. [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(71\)80005-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1)
- [3] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets & Systems*, **46**, 221-226. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90134-P](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P)
- [4] Beg, I. and Islam, M.U. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-241.
- [5] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.
- [6] Beg, I. (1997) σ -Complete Fuzzy Riesz Spaces. *Results in Mathematics*, **31**, 292-299. <https://doi.org/10.1007/BF03322166>
- [7] Beg, I. and Islam, M.U. (1997) Fuzzy Archimedean Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **5**, 413-423.
- [8] Liang, H. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands and Fuzzy Band Projections. *Annals of the West University of Timisoara: Mathematics and Computer Science*, **53**, 77-108. <https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005>
- [9] Katsaras, A. (1984) Fuzzy Topological Vector Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **12**, 143-154. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(84\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90034-4)
- [10] Felbin, C. (1992) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Space. *Fuzzy Sets and Systems*, **48**, 239-248. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90338-5](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90338-5)
- [11] Cheng, S. and Mordeson, J. (1992) Fuzzy Linear Operator and Fuzzy Normed Linear Spaces. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **86**, 429-436.
- [12] Xiao, J. and Zhu, X. (2003) Fuzzy Normed Space of Operators and Its Completeness. *Fuzzy Sets and Systems*, **133**, 389-399. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(02\)00274-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00274-9)
- [13] Sharma, M. and Hazarika, D. (2020) Fuzzy Bounded Linear Operator in Fuzzy Normed Linear Spaces and Its Fuzzy Compactness. *New Mathematics and Natural Computation (NMNC)*, **16**, 177-193. <https://doi.org/10.1142/S1793005720500118>
- [14] Bag, T. and Samanta, S. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and System*, **151**, 513-547. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004>
- [15] Bag, T. and Samanta, S. (2015) Operator's Fuzzy Norm and Some Properties. *Fuzzy Information and Engineering*, **7**, 151-164. <https://doi.org/10.1016/j.fiae.2015.05.002>
- [16] Park, C., Movahednia, E., Mosadegh, S. and Mursaleen, M. (2018) Riesz Fuzzy Normed Spaces and Stability of a Lattice Preserving Functional Equation. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **24**, 569-579.
- [17] Iqbal, M., Bashir, Z., et al. (2020) A Study on Fuzzy Order Bounded Linear Operators in Fuzzy Riesz Spaces. *Mathematics*, **9**, Article No. 1512.
- [18] Cheng, N., Liu, X. and Dai, J. (2022) Extension of Fuzzy Linear Operators on Fuzzy Riesz Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **179**, Article ID: 103168. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2022.103168>
- [19] 赵家锐. 模糊赋范 Riesz 空间的性质[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2022. <https://doi.org/10.27411/d.cnki.gscgc.2022.000015>