Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 74-80
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131008

平面上保持常宽的两种保长度的闭凸曲线流

赵会文*，张泽源

云南师范大学，云南 昆明

收稿日期：2022年12月22日；录用日期：2023年1月21日；发布日期：2023年1月29日

摘 要

本文主要研究了平面上两种保长度的闭凸曲线流，在这两种流下，如果初始闭凸曲线是广义的常宽曲线，那么在这两种流下发展，曲线仍然保持广义的常宽，并且宽度与初始曲线宽度相等．特别地，如果初始曲线是常宽曲线，那么在这两种流下曲线始终保持常宽，并且宽度与初始曲线宽度相等。

关键词

保长度流，广义的宽度函数，常宽曲线

Closed-Convex Curvilinear Flows with Two Kinds of Length Preserving Constant Width on the Plane

Huiwen Zhao*, Zeyuan Zhang

Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Dec. 22nd, 2022; accepted: Jan. 21st, 2023; published: Jan. 29th, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 赵会文, 张泽源. 平面上保持常宽的两种保长度的闭凸曲线流[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 74-80.
DOI: 10.12677/pm.2023.131008

Abstract

In this paper, we mainly study two kinds of length preserving closed convex curve flows on the plane. Under these two kinds of flows, if the initial closed convex curve is a generalized constant width curve, then the curve will still maintain a generalized constant width under these two kinds of flows, and the width is equal to the width of the initial curve. Especially, if the initial curve is a constant width curve, then the curve will always maintain a constant width under these two kinds of flows, and the width is equal to the width of the initial curve.

Keywords

Preserve Length Flow, Generalized Width Function, Constant Width Curve.

1. 引言及主要结果

平面上曲线流的研究是几何分析学的一个分支, 近年来, 出于各种物理现象和现实问题的需要, 曲线受外力的影响产生相应流的性质得到愈来愈多的关注和研究. 在1984年，Gage Hamilton在文 [1]中研究了著名的曲线收缩流

$$\begin{cases} \frac{\partial F(u,t)}{\partial t} = k\left(u,t\right) N\left(u,t\right) \\ F\left(u,0\right) = F_0\left(u\right) \end{cases} \tag{1.1}$$

式中$F\left(u,t\right) : [a,b] \times [0,\infty) \to \mathcal{R}^2$是一族平面闭曲线, $k\left(u,t\right)$是相对曲率, $N\left(u,t\right)$ 是单位内法向量. 证明了当初始曲线为平面简单闭凸曲线时, 则在演化过程中一直保持凸性, 且在有限时间内收缩成一个圆点. 文 [2–5]研究了四种不同类型的保长度流.

本文主要研究速度函数中含有支撑函数的两种保长度曲线流, 考虑如果初始曲线是宽度为$\omega_m\left(\theta,0\right)$的广义的常宽曲线, 那么曲线在这两种流下发展, 是否保持广义的常宽, 并且宽度与初始曲线宽度相等?

首先在2010年, 孟庆贤在文 [5]中研究过速度函数为以下结构的曲线流. 设F_0 是初始闭凸曲线, $F(u,t): S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ 是一族平面光滑曲线. $F(u,t)$ 满足以下演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(p\left(u,t\right) - \frac{1}{k(u,t)} \right) N\left(u,t\right) \\ F\left(u,0\right) = F_0\left(u\right) \end{cases} \tag{1.2}$$

其中$p = p(u,t)$为演化曲线的支撑函数, $N = N_{in}(u,t)$为演化曲线的单位内法向量, $k(u,t)$为演化曲线的曲率.

从文 [5]中可以得到：F_0是平面上的初始闭凸曲线, 曲线$F(u,t)$在流(1.2)下演化, 在演化过程中曲线$X(u,t)$保持闭凸性不变, 且曲线在发展过程中变得越来越圆, 长度$L(t)$ 保持不变, 面积$A(t)$ 增大, 当时间趋于无穷时, 在C^∞ 度量下收敛到有限圆.

由于改变发展方程的切向分量只影响曲线的参数表示, 而不会影响发展曲线的几何形状, 所以我们选择适当的切向分量来简化曲线行为的几何分析, 因此, 在文 [5]中可以考虑如下与式(1.2)等价的发展问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(p\left(u,t\right) - \frac{1}{k(u,t)} \right) N\left(u,t\right) - \frac{1}{k} \frac{\partial \left(p(u,t) - \frac{1}{k(u,t)} \right)}{\partial s} T\left(u,t\right) \\ F\left(u,0\right) = F_0\left(u\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

其中$T(u,t)$为单位切向量.

之后在2017年, 杨东灵和黄平亮在文 [6]中也研究过速度函数中含有支撑函数的曲线流. 设F_0是初始闭凸曲线, $F(u,t): S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ 是一族平面光滑曲线. $F(u,t)$ 满足以下演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(p\left(u,t\right) - \alpha \frac{L(t)}{2\pi} + \left(1-\alpha\right) \frac{2A(t)}{L(t)} \right) N\left(u,t\right) \\ F\left(u,0\right) = F_0\left(u\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

其中$p = p(u,t)$为演化曲线的支撑函数, $N = N_{in}(u,t)$为演化曲线的单位内法向量, $L(t)$为演化曲线的长度, $A(t)$为演化曲线的面积, $0 \le \alpha \le 1$，在α的不同取值情况下, 演化曲线的长度和面积的单调性不同, 本文主要研究$\alpha = 1$的情况, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(p\left(u,t\right) - \frac{L(t)}{2\pi} \right) N\left(u,t\right) \\ F\left(u,0\right) = F_0\left(u\right) \end{cases} . \tag{1.5}$$

从文 [6]中可以得到：F_0是平面上的初始闭凸曲线, 曲线$F(u,t)$在流(1.5)下演化, 在演化过程中曲线$X(u,t)$保持闭凸性不变, 且曲线在发展过程中变得越来越圆, 长度$L(t)$ 保持不变, 面积$A(t)$ 增大, 当时间趋于无穷时, 在C^∞ 度量下收敛到有限圆.

由于改变发展方程的切向分量只影响曲线的参数表示, 而不会影响发展曲线的几何形状, 所以我们选择适当的切向分量来简化曲线行为的几何分析, 因此, 在文 [6]中可以考虑如下与式(1.5)等价的发展问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(p\left(u,t\right) - \frac{L(t)}{2\pi} + \right) N\left(u,t\right) - \frac{1}{k} \frac{\partial \left(p(u,t) - \frac{L(t)}{2\pi} \right)}{\partial s} T\left(u,t\right) \\ F\left(u,0\right) = F_0\left(u\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

本文的主要定理叙述如下:

定理1.1 如果初始闭凸曲线是宽度为$\omega_m(\theta,0)$的广义的常宽曲线, 那么在流(1.3)下发展, 曲线保持广义的常宽, 并且宽度与初始曲线宽度相等.

定理1.2 如果初始闭凸曲线是宽度为$\omega_m(\theta,0)=m\cdot\frac{L(0)}{2\pi}$的广义的常宽曲线, 那么在流(1.6)下发展, 曲线保持广义的常宽, 并且宽度与初始曲线宽度相等.

本文的结构安排:

本文分为三个部分, 第一部分为引言和主要定理, 这部分主要介绍了速度函数中含有支撑函数的两种保长度的曲线流的研究背景及结果, 同时给出本文的研究目的和主要结果; 第二部分为预备知识, 这部分主要定义了支撑函数、宽度函数以及广义的宽度函数, 以及两个重要的引理; 第三部分为主要定理的证明, 这部分主要利用孟庆贤在文 [5]中及杨东灵和黄平亮在文 [6]中研究的平面上两种保长度的闭凸曲线流给出本文的主要定理证明.

2. 预备知识

定义2.1 [7]凸集的支撑函数: 设K为有界闭凸集, 在平面上任意选取坐标系$x0y$. 自原点0引射线$0R$. 作垂直于$0R$且与K相遇的任意一直线$G_1(P_1,\theta)$. 集p_1的上确界为p, 即

$$p=sup\left\{p_1:G_1(p_1,\theta)\cap K\neq\emptyset\right\}, \tag{2.1}$$

其中G_1与K的交为非空表示G_1与K相交的意思. 与(2.1)式中p相应的直线$G(p,\theta)$显然为K的支撑线, 称为K沿θ方向的支撑线. 函数$p(\theta)$称为凸集K的支撑函数.

定义2.2 [7]宽度函数: 引进函数

$$\omega(\theta)=p(\theta)+p(\theta+\pi), \tag{2.2}$$

显然, $\omega(\theta)$是对于方向θ,和$\theta+\pi$的两平行支撑函数间的距离, 称为凸集K沿θ方向的宽度, 函数$\omega(\theta)$称为凸集K的宽度函数.

定义2.3 [8] 广义的宽度函数: 对于整数$m\geq 2$,$\omega(\theta)=p(\theta)+p(\theta+\pi)$的推广形式为:

$$\omega_m(\theta)=p(\theta)+p\left(\theta+\frac{2\pi}{m}\right)+\cdots+p\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) \tag{2.3}$$

因为

$$1+\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)=0,$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)=0$$

所以$\omega_m(\theta)$与原点O的选取无关, 且它的周期为$\frac{2\pi}{m}$.

DOI: 10.12677/pm.2023.131008

引理2.1 [5] 如果闭凸曲线$F(u,t)$按照方程(1.2)演化, 则有

$$p_t = \frac{1}{k} - p \tag{2.4}$$

引理2.2 [6] 如果闭凸曲线$F(u,t)$按照方程(1.5)演化, 则有

$$p_t = \frac{L}{2\pi} - p \tag{2.5}$$

3. 主要定理的证明

定理1.1的证明 由

$$p + p_{\theta\theta} = \frac{1}{k} \tag{3.1}$$

再由引理2.1可得

$$p_t = p_{\theta\theta} \tag{3.2}$$

又由定义2.3可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_m(\theta,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(p(\theta,t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(p\left(\theta+\frac{2\pi}{m},t\right)\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial t}\left(p\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m},t\right)\right) \\ &= \frac{\partial^2 p(\theta,t)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 p\left(\theta+\frac{2\pi}{m},t\right)}{\partial\theta^2} + \cdots + \frac{\partial^2 p\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m},t\right)}{\partial\theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 \omega_m(\theta,t)}{\partial\theta^2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

如果初始曲线是宽度为$\omega_m(\theta,0)$的常宽曲线, 那么有

$$\omega_m(\theta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_m(\theta,0) e^{-\frac{(\theta-u)^2}{4t}} du = \omega_m(\theta,0) \tag{3.4}$$

即在发展中曲线的广义常宽性保持不变, 并且宽度与初始曲线相等.

推论1 [5] 特别地, 当$m=2$时, 如果初始曲线是常宽曲线, 那么曲线在流(1.3)下始终保持常宽, 并且宽度不变.

定理1.2的证明 由定义2.3与引理2.2得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_m(\theta,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(p(\theta,t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(p\left(\theta+\frac{2\pi}{m},t\right)\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial t}\left(p\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m},t\right)\right) \\ &= \frac{L(0)}{2\pi} - p(\theta,t) + \frac{L(0)}{2\pi} - p\left(\theta+\frac{2\pi}{m},t\right) + \cdots + \frac{L(0)}{2\pi} - p\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m},t\right) \\ &= m\cdot\frac{L(0)}{2\pi} - \omega_m(\theta,t).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由(3.5)与初始条件得

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_m(\theta,t)}{\partial t} = m \cdot \frac{L(0)}{2\pi} - \omega_m(\theta,t) \\ \omega_m(\theta,0) = m \cdot \frac{L(0)}{2\pi} \end{cases} \tag{3.6}$$

下面解方程(3.6), 首先令

$$\omega_m(\theta,t) = C(t)\, e^{-t} \tag{3.7}$$

对(3.7)两端关于t求导得

$$\frac{\partial \omega_m(\theta,t)}{\partial t} = \frac{dC(t)}{dt} e^{-t} - C(t)\, e^{-t} \tag{3.8}$$

将(3.7)代入(3.6)再联立(3.8)得

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^t m \cdot \frac{L(0)}{2\pi} \tag{3.9}$$

对(3.9)左右两边积分得

$$C(t) = \omega_m(\theta,0) + m \cdot \frac{L(0)}{2\pi}\left(e^t - 1\right) \tag{3.10}$$

将(3.10)代入(3.7)得

$$\omega_m(\theta,t) = \left[\omega_m(\theta,0) + m \cdot \frac{L(0)}{2\pi}\left(e^t - 1\right)\right] e^{-t} \tag{3.11}$$

因为$\omega_m(\theta,0) = m \cdot \frac{L(0)}{2\pi}$, 所以$\omega_m(\theta,t) = m \cdot \frac{L(0)}{2\pi}$, 即定理1.2成立.

推论2 特别地, 当$m = 2$时, 如果初始闭凸曲线是宽度$\omega(\theta,0) = \frac{L(0)}{\pi}$的常宽曲线, 那么在流(1.6)下发展, 曲线保持常宽, 并且宽度与初始曲线宽度相等.

本文优点 在定理1.1中, 若$m = 2$, 则该结果在文 [5]中被孟庆贤研究. 本文的结果在定义了广义的宽度函数的基础上对之前的结果进行了推广, 相对于之前已有的结果, 会更丰富一些.

参考文献

[1] Gage, M.E. (1984) Curve Shortening Makes Convex Curves Circular. *Inventiones Mathematicae*, **76**, 357-364. https://doi.org/10.1007/BF01388602

[2] Pan, S.L. (2001) On a Perimeter-Preserving Plane Curve Flow. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, **16**, 409-417. https://doi.org/10.1007/s11766-001-0009-z

[3] Pan, S.L. and Yang, J.N. (2008) On a Non-Local Perimeter-Preserving Curve Evolution Problem for Convex Plane Curves. *Manuscripta Mathematica*, **127**, 469-484. https://doi.org/10.1007/s00229-008-0211-x

[4] Ma, L. and Zhu, A.Q. (2012) On a Length Preserving Curve Flow. *Monatshefte für Mathematik*, **165**, 57-78. https://doi.org/10.1007/s00605-011-0302-8

[5] 孟庆贤. 平面上一种保长度曲线流[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2010.

[6] 杨东灵, 黄平亮. 平面上一类光滑凸曲线流[J]. 应用数学与计算数学学报, 2017, 31(1): 114-121.

[7] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 北京高等教育出版社, 2008.

[8] Ou, K. and Pan, S.L. (2010) Some Remarks about Closed Convex Curves. *Pacific Journal of Mathematics*, **248**, 393-401. https://doi.org/10.2140/pjm.2010.248.393