Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 105-112
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131012

关于在求数列极限问题时极限存在准则的应用新解

陈卓伟[1]，寇冰煜[2*]，毛自森[2]

[1]陆军工程大学野战工程学院，江苏 南京
[2]陆军工程大学基础部，江苏 南京

收稿日期：2022年12月23日；录用日期：2023年1月22日；发布日期：2023年1月29日

摘 要

为得出以逐项公式为条件的求数列极限问题的通法通解，本文从新的角度分别利用单调有界准则和夹逼准则求解一道经典的数列极限问题，从中提炼出求数列极限问题思路方法，将其应用在其他同类型问题上。通过探究，我们得出了“先算极限再证明收敛”的基本解题流程，并进一步得出了两准则各自适用的解题情形。本探究揭示了以逐项公式为条件的求数列极限问题区别于一般以通项公式为条件的求数列极限问题的本质区别，强调了该类型问题与一般求数列极限问题等同的重要性。

关键词

单调有界准则，夹逼准则，数列极限

A New Solution for the Application of the Criterion for the Existence of Limits When Solving the Limit Problem of a Sequence

Zhuowei Chen[1], Bingyu Kou[2*], Zisen Mao[2]

[1]College of Field Engineering, The Army Engineering University of PLA, Nanjing Jiangsu
[2]Department of Basic Courses, The Army Engineering University of PLA, Nanjing Jiangsu

Received: Dec. 23rd, 2022; accepted: Jan. 22nd, 2023; published: Jan. 29th, 2023

Abstract

In order to obtain the general solution of solving the limit problem of sequence of sequences

*通讯作者。

文章引用: 陈卓伟, 寇冰煜, 毛自森. 关于在求数列极限问题时极限存在准则的应用新解[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 105-112. DOI: 10.12677/pm.2023.131012

based on the term by term formula, this paper uses the monotonic bounded criterion and the squeeze criterion respectively to solve a classical limit problem of sequence of sequences from a new angle, and extracts the thought method of solving the limit problem of sequence of sequences, which is applied to other similar problems. Through exploration, we obtained the basic problem solving process of "calculate the limit first and then prove the convergence", and further obtained the problem solving situation applicable to the two criteria. This research reveals the essential difference between the problem of finding the limit of series based on the term formula and the problem of finding the limit of series based on the general term formula, and emphasizes the importance of this type of problem being equal to the general problem of finding the limit of series.

Keywords

The Monotone Bounded Convergence Theorem, Squeeze Theorem, Limit of the Sequence

1. 引言

在同济大学的高等数学书后例题[1]和一些其它教辅材料[2] [3]中，有关以逐项公式为条件的求数列极限问题上一直以来都处于“真空”状态，相关教辅没有为此类型问题给出系统性的解答方案。极限存在准则，准则 I：夹逼准则和准则 II：单调有界数列必有极限，是判断和计算数列极限问题的重要工具。本文利用以上两种工具方法，从 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$ (n 重根号)的求极限问题出发，逐层深入，积极推广。得出了解决以逐项公式为条件的数列极限问题的基本流程方法。

本文先通过两种准则探讨了 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$ (n 重根号)的求极限问题解法，再通过两种变型方式，将此问题一般化。面向同类型的以逐项公式为条件的求数列极限问题，得出了两准则分别适用的问题情形。最后对整个探究过程的结果进行总结。

2. 分别利用两种准则进行探讨

2.1. 利用准则 II 进行探讨

例 已知 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$ (n 重根号)，证明 x_n 收敛并求其极限[4]。

对于这类问题，通常利用单调有界准则证明数列极限的存在性。在证明过程中利用 x_n 与 x_{n-1} 的递推关系式 $x_n=\sqrt{x_{n-1}+3}$ 以及数学归纳法证之。下面我们利用单调有界准则求其极限

解 首先证明 x_n 收敛，欲证明 x_n 收敛，在选择准则 II 单调有界数列必有极限的路径下，我们需要证明 x_n 具有单调性和有界性

引理 1： $0<x_n<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

证明：利用数学归纳法证之，

$$x_1-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\sqrt{3}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}<0\text{，}\quad x_2-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\sqrt{3+\sqrt{3}}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}<0\text{，}\quad\cdots$$

假设 $x_{n-1}-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}<0$，根据数学归纳法

$$\begin{aligned}x_n-\frac{1+\sqrt{13}}{2}&=\sqrt{x_{n-1}+3}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\&<\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}+3}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\&=\sqrt{\frac{14+2\sqrt{13}}{4}}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=0\end{aligned}$$

引理 2： x_n 是单调递增数列

证明：由 $x_n=\sqrt{x_{n-1}+3}$，得 $x_n^2=x_{n-1}+3$，从而，

$$x_n^2-x_{n-1}^2=-x_{n-1}^2+x_{n-1}+3=-\left(x_{n-1}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)*\left(x_{n-1}-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

而 $0<x_{n-1}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，因此 $x_n>x_{n-1}$， x_n 是单调递增数列

再者求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，假设 x_n 极限为 a，易知， $x_n^2=3+x_{n-1}$，对其两边求极限，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2=3+\lim_{n\to\infty}x_{n-1}$$

即 $a^2=a+3$，解得， $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且为 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 。

我们利用较为复杂的 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}+3}$ 通过配方法完成开平方，进而得出 x_n 的有界性并利用有界性结果得到了数列的单调性。这样我们就完成了一个相对较为严谨的证明。

2.2. 通过准则 I 夹逼准则进行的简要探讨

大多数文献(见[1])，是使用准则 II 解决上述问题的。本部分我们利用夹逼准则加以证明。

首先，我们解决来看这样一个未给出通项公式的数列。

设数列 $\{a_n\}$， $a_n=2a_{n-1}+1$， $a_1=1$，

则其通项公式 $a_n=2a_{n-1}+1$ 通过配凑可得 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$，而 $a_1+1=2$， 则 $a_n=2^n-1$

那么对于 $x_n^2=x_{n-1}+3$，其左右两侧阶数不同，我们无法像求 a_n 一样直接通过配凑解决。但是由 $x_n<a$，可知 $x_n^2<ax_n$， 该不等式实现了由二次幂放缩降为一次幂的转变。

于是我们针对问题“求 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$ (n 重根号)在 $n\to\infty$ 时的极限”给出如下证明

证明：由引理 2 可知； $0<x_n<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$， 并且设 $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$， 则由 $ax_n<x_{n-1}+3$， 可知

$$ax_n+\frac{3a}{1-a}<x_{n-1}+\frac{3}{1-a}$$

从而 $x_n+\frac{3}{1-a}<\frac{1}{a}\left(x_{n-1}+\frac{3}{1-a}\right)$， 则有

$$x_n+\frac{3}{1-a}<\frac{1}{a}\left(x_{n-1}+\frac{3}{1-a}\right)<\left(\frac{1}{a}\right)^2\left(x_{n-2}+\frac{3}{1-a}\right)<\cdots<\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}\left(x_1+\frac{3}{1-a}\right)$$

故 $\dfrac{3}{a-1}<x_n<\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}\left(x_1+\dfrac{3}{1-a}\right)+\dfrac{3}{a-1}$

从而，当 $n\to\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}\left(x_1+\dfrac{3}{1-a}\right)+\dfrac{3}{a-1}\to\dfrac{3}{a-1}$

根据夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{a-1}=a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$。

3. 对原问题推广与在同类型问题上的应用

这部分我们对上述问题加以推广。

3.1. 递推公式一般化后的结论的推广

研究如下问题，若 $x_n=\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k+\cdots}}}$ 证明 x_n 收敛并求其极限。在证明 x_n 有界的过程中，我们不再使用配方法，利用求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 取值的公式 $a^2=a+k$ 来证之。解决其问题的关键便在于如何充分利用 $a^2=a+k$ 这一等式得出 a 取值。我们需要如下假设和引理。

假设 x_n 收敛且极限为 a，则 $a>0$，$a^2=a+k$，

引理 3 $x_n-a<0$

证明： $x_n^2=x_{n-1}+k$，考虑到 $a^2=a+k$ 左右两侧构造形式相同，于是我们让左侧减去 a^2，右侧减去 $a+k$，等式便化为 $x_n^2-a^2=x_{n-1}-a$，

通过两边同除，我们有 $x_n-a=\dfrac{1}{x_n+a}(x_{n-1}-a)>0$

由 $\dfrac{1}{x_n+a}>0$ 可知，x_n-a 与 $x_{n-1}-a$ 同号，$x_{n-1}-a$ 与 $x_{n-2}-a$ 同号，……，x_2-a 与 x_1-a 同号。

而 $x_1-a=\sqrt{k}-a$，对于方程 $a^2=a+k$ 而 $k<\sqrt{k}+k$，也就是 $\left(\sqrt{k}\right)^2<\sqrt{k}+k$，根据图 1 中两函数在 $x=a$ 和 $x=\sqrt{k}$ 时的大小关系可知 $x_1-a<0$。

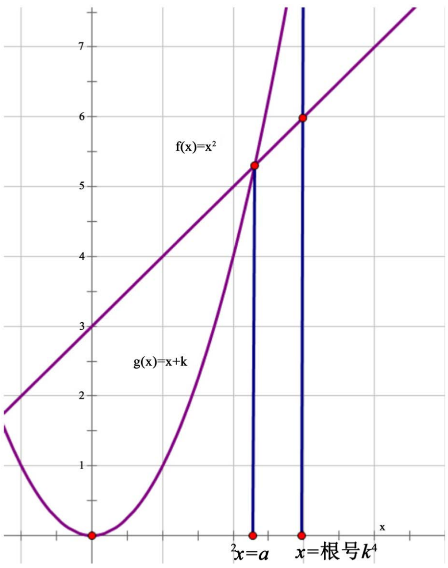

Figure 1. 函数 $y=x^2$ 和 $y=x+k$ （k 为常数)，在平面直角坐标系中的图像

图 1. The graph of the function $y=x^2$ and $y=x+k$ (k is constant) in the plane rectangular coordinate system

以此类推，得 $x_n-a<0$ 而对于其单调性，由

$$x_n^2-x_{n-1}^2=-x_{n-1}^2+x_{n-1}+k=-\left(x_{n-1}-a\right)\left(x_{n-1}-\frac{k}{a}\right)>0$$

可知，x_n 单调递增。因此 x_n 收敛且极限为

$$a=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}.$$

3.2. 首项改变后的推广

我们令 $x_1=4$，再重新利用 2.1.1 中的证明有界性的解法时，会发现

$$x_1-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=4-\frac{1+\sqrt{13}}{2}>0，\quad x_2-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\sqrt{4+\sqrt{3}}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}>0，\quad\cdots$$

故再想要证明 $x_n<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 是不可能的。故我们转而证明 $x_n>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，假设 $x_{n-1}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}>0$ 根据数学归纳法

$$\begin{aligned}x_n-\frac{1+\sqrt{13}}{2}&=\sqrt{x_{n-1}+3}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}>\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}+3}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\&=\sqrt{\frac{14+2\sqrt{13}}{4}}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=0\end{aligned}$$

发现在 x_1 数值发生改动之后，x_n 的单调性也同时发生了改变：

$$x_n^2-x_{n-1}^2=-x_{n-1}^2+x_{n-1}+3=-\left(x_{n-1}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)*\left(x_{n-1}-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

故 $x_n>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，因此 x_n 单调递减，而 $x_n>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，因此 $|x_n|<x_1=4$，x_n 具有有界性，结合 x_n 单调性可知，x_n 收敛且极限为 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$。

3.3. 问题一般化

根据 3.2 我们可以知道，当 x_1 小于极限值时，x_n 单调递增，当 x_1 大于极限值时，x_n 单调递减，并且数列收敛且极限不变。由此，结合(1)和(2)中的推广思路，我们可以得出如下结论。

定理：若 $x_1=C$ （C 为常数），$x_n=\sqrt{x_{n-1}+k}$ （$k>0$），a 为方程 $a^2=a+k$ 的正根。当 $x_1<C$ 时，x_n 恒单调递增，当 $x_1>C$ 时，x_n 恒单调递减，$x_1=C$ 时，x_n 恒为 C。并且 x_n 收敛且极限为 a

证明 假设 x_n 收敛且极限为 a

$$a>0，\quad a^2=a+k，\quad a=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$$

下面证明 $\{x_n\}$ 收敛。

欲证明 x_n 收敛，采用准则 II，我们需要证明 x_n 具有有界性和单调性。

当 $C>a$ 时，

先证明有界性：将等式 $x_n^2=x_{n-1}+k$ 两边分别减去 a^2 和 $a+k$ 可得 $x_n^2-a^2=x_{n-1}-a$

通过两边同除，我们有 $x_n - a = \frac{1}{x_n + a}(x_{n-1} - a)$

显然 $\frac{1}{x_n + a} > 0$，也因此 $x_n - a$ 与 $x_{n-1} - a$ 同号，$x_{n-1} - a$ 与 $x_{n-2} - a$ 同号，……，$x_2 - a$ 与 $x_1 - a$ 同号

而 $x_1 = C > a$，因此当 x_n 单调递减时，x_n 以 $x_1 = C$ 为界

再证明单调性：$x_n^2 - x_{n-1}^2 = -x_{n-1}^2 + x_{n-1} + k = -(x_{n-1} - a)\left(x_{n-1} + \frac{k}{a}\right)$

$x_1 = C > a$，因此 $x_n - x_{n-1} < 0$，x_n 单调递减

综上，x_n 有界并单调递减，x_n 收敛且极限为

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$$

当 $C < a$ 时，

先证明有界性：同样对于等式 $x_n^2 - a^2 = x_{n-1} - a$

通过两边同除，我们有 $x_n - a = \frac{1}{x_n + a}(x_{n-1} - a)$

显然 $\frac{1}{x_n + a} > 0$ 则 $x_n - a$ 与 $x_{n-1} - a$ 同号，$x_{n-1} - a$ 与 $x_{n-2} - a$ 同号，……，$x_2 - a$ 与 $x_1 - a$ 同号

而 $x_1 = C < a$，因此 x_n 以 $x_1 = C$ 为界

再证明单调性：$x_n^2 - x_{n-1}^2 = -x_{n-1}^2 + x_{n-1} + k = -(x_{n-1} - a)\left(x_{n-1} + \frac{k}{a}\right)$

$x_1 = C < a$，因此 $x_n - x_{n-1} > 0$，x_n 单调递增

综上，x_n 有界并单调递增，x_n 收敛且极限为 $a = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$

当 $C = a$ 时，$x_1 = C$，$x_2 = \sqrt{k + C} = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{1+4k}+4k+1}{4}} = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} = C$

根据数学归纳法 $x_n = C$，显然 x_n 收敛且极限为 $a = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$

综上所述， x_n 收敛且极限为 $a = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$，其值不为 C 取值的改变而改变！

3.4. 应用

综上所述，在我们解决数列极限问题特别是无法用显式来表达 x_n 而只能得出逐项公式时。我们可以利用 2.1 中的思路：先通过准则 II 证明出极限存在，再直接等式两边求极限进行求解。也可以利用 2.2 中的思路，通过一些已知的不等关系将 x_n 与 x_{n-1} 关系简化成一般形式，进而求出 x_n 放缩后的通项公式，最后利用夹逼准则证明极限存在并求出极限。

首先在逐项公式并非线性时，见如下例题分析。

例题 1 [5]：设数列 $\{x_n\}$ 由如下关系式确定：

$$x_n > 0,\quad x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

证明该数列存在极限，并求极限值。

证明：先假设$\{x_n\}$极限存在，设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \quad (a>0)$，则$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$，即$a=\dfrac{3(1+a)}{3+a}$，通过计算可得出$a=\sqrt{3}$

欲证明$\{x_n\}$收敛，我们需要x_n有界并具有单调性

先证明其有界性：$x_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{3+3x_n-3\sqrt{3}-\sqrt{3}x_n}{3+x_n}=\dfrac{(3-\sqrt{3})(x_n-\sqrt{3})}{3+x_n}$

则有$\dfrac{x_{n+1}-\sqrt{3}}{x_n-\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{x_n}}>0$，则$x_n-\sqrt{3}$与$x_{n-1}-\sqrt{3}$同号，$x_{n-1}-\sqrt{3}$与$x_{n-2}-\sqrt{3}$同号……，$x_2-\sqrt{3}$与$x_1-\sqrt{3}$同号，则$x_n-\sqrt{3}$与$x_1-\sqrt{3}$同号，不妨设$x_n-\sqrt{3}>0\Rightarrow x_n>\sqrt{3}$

再证明其单调性：$x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}<0$，故$x_n$单调递减，综上所述$\{x_n\}$极限存在且$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\sqrt{3}$

如果逐项公式并非等式，而是不等式时，见如下例题分析

例题 2 [6]：设$x_n>0$且$x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}<4$ (n为正整数)，证明$\{x_n\}$收敛并求出$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$。

证明：欲证明$\{x_n\}$收敛，我们需要x_n有界并具有单调性

对于其有界性，$x_n>0$，则有$x_{n+1}<x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}<4$，$0<x_n<4$，$x_n$有界。

对于其单调性，我们有$x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}<4\Rightarrow x_{n+1}-x_n<4-x_n-\dfrac{4}{x_n}=\dfrac{-(x_n-2)^2}{x_n}<0$，$x_n$单调递增。

则$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A$，对于$x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}<4$，两边同时求以极限，则有$A+\dfrac{4}{A}\le 4$，解得$A=2$故，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=2$。

虽然单调有界数列必有极限，但这并不意味着所有收敛的数列都单调，在遇到这样的问题时，我们便可以采取使用夹逼准则的方案。

例题 3：设数列$\{x_n\}$由如下关系式确定：

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},$$

证明该数列存在极限，并求极限值。

证明：先假设$\{x_n\}$极限存在，设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a \quad (a>0)$，则

$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$即$a=\dfrac{1}{1+a}$，计算得出$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

由$x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{2}$，$x_3=\dfrac{3}{2}$，$x_4=\dfrac{2}{5}$，$x_5=\dfrac{5}{7}$可知，

x_n不具有单调性，因此我们无法使用单调有界准则，因而我们转变策略，使用夹逼准则

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$$

即$1+x_n=\dfrac{1}{x_{n+1}}$，等式两边同减a，得$x_n-a=\dfrac{-(x_{n+1}-a)}{ax_{n+1}}$，即$\dfrac{x_n-a}{x_{n+1}-a}=\dfrac{-1}{ax_{n+1}}$

则有 $\dfrac{|x_n-a|}{|x_{n+1}-a|}=\dfrac{1}{ax_{n+1}}$，根据数学归纳法

$$\frac{|x_n-a|}{|x_1-a|}=ax_n\cdot ax_{n-1}\cdot ax_{n-2}\cdots ax_2$$

而根据不等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}<\dfrac{1}{x_n}$ 可知 $0<|x_n-a|<a^{n-1}|x_1-a|$ (n 为奇数)或 $a^n|x_1-a|\cdot x_2$ (n 为偶数)，故当 $n\to\infty$ 时 $a^n|x_1-a|\cdot x_2$ 和 $a^{n-1}|x_1-a|$ 趋近于 0，根据夹逼准则 $\{x_n\}$ 极限存在且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

4. 结语

我们利用两种不同方法全面系统地对上述以通项公式为条件的数列极限问题进行了研究和推广。通过以上的探究，我们揭示了以逐项公式为条件的数列极限问题与常规的以通项公式为条件的数列极限问题的本质区别，得出了解决该类型问题时先“求极限再证收敛”的基本方针，进一步提高了对数列极限问题的理解程度。

基金项目

陆军工程大学 2022 年度精品课程建设，陆军工程大学教育教学研究重点课题(GJ20ZD003)，陆军工程大学教育教学研究专项课题(GJ20XS136)，陆军工程大学基础学科培育基金重点项目(KYJBJQZL2003)，陆军工程大学基础部 2020 年度教育教学课题。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[2] Richard Courant, Fritz John. 微积分和数学分析引论(第一卷) [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[3] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第一卷) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[4] 陆军工程大学基础部. 陆军工程大学高等数学习题册[M]. 南京: 陆军工程大学, 2022.

[5] 北京理工大学数学系. 北京理工大学 2021 年数学分析考研试题[EB/OL]. https://mp.weixin.qq.com/s/ISiRLx5dgunmlK9-3LScAQ, 2022-10-30.

[6] 考研竞赛数学, 典型例题与练习参考解答: 数列极限判定的基本方法[微信公众号文章] [EB/OL]. https://mp.weixin.qq.com/s/KdLM3jjXilnnNYpyyeRGMg, 2022-10-13.