Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 124-130
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131015

涉及分担移动超平面的全纯曲线的正规族

王　瑶

上海理工大学，上海

收稿日期：2022年12月25日；录用日期：2023年1月24日；发布日期：2023年1月31日

摘　要

正规族理论的核心问题是关于正规定则的研究，学者研究过全纯曲线和导曲线分担超平面问题，那是否可以改变条件，得到相同的结论。我们研究了分担移动超平面与全纯曲线的正规族，主要用到了反证法和涉及导数的Pang-Zalcman引理，得到了如下结果：设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_j(z)=\{w\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle w,\alpha_j(z)\rangle=0\}$ 是处于强一般位置的移动超平面，即对任意的 $j=j_1,j_2,\cdots,j_{N+1}$，$\det(\alpha_{ji}(z))\neq 0\quad z\in D$。其中 $\alpha_j(z)=(a_{j0}(z),a_{j1},\cdots,a_{jN})^{\mathrm{T}}$，这里 $a_{j0}(z)\neq 0, z\in D$ 在D内解析。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，有：1) 若 $f(z)\in H_j(z)$，则 $\nabla f(z)\in H_j(z)$；2) 若 $f(z)\in H_j(z)$，那么 $\frac{|\langle f,H_0\rangle|}{\|f\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 $H_0=\{w_0=0\}$，$0<\delta<1$ 是一个常数。则 $\mathcal{F}$ 在D上正规。该结果推广了原先的定理，对后续关于分担超平面的研究，扩宽了想法和思路。

关键词

正规族，分担移动超平面，全纯曲线，强一般位置

The Normal Family Concerning Shared Moving Targets for Holomorphic Curves

Yao Wang

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 25th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

The core problem of normal family theory is the study of normal rule, scholars have studied the

文章引用: 王瑶. 涉及分担移动超平面的全纯曲线的正规族[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 124-130.
DOI: 10.12677/pm.2023.131015

problem of sharing hyperplane between holomorphic curve and derivative curve, so can we change the conditions and get the same conclusion? We studied the normal families that share moving hyperplanes and holomorphic curves, mainli using the method of disproof and Pang-Zalcman Lemma involving derivatives, and obtained the following results: Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic maps of a domain $D \subset \mathbb{C}$ to $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $H_j(z)=\{w \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle w,\alpha_j(z)\rangle=0\}$ be moving hyperplanes in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ located in strong general position, *i.e.* for all $j=j_1,j_2,\cdots,j_{N+1}$, $\det(\alpha_{ji}(z))\neq 0$ $z \in D$. And $\alpha_j(z)=(a_{j0}(z),a_{j1},\cdots,a_{jN})^{\mathrm{T}}$, where $a_{j0}(z)\neq 0, z\in D$ are analytic in D. Assume the following conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$: 1) If $f(z)\in H_j(z)$, then $\nabla f(z)\in H_j(z)$; 2) If $f(z)\in H_j(z)$, then $\frac{|\langle f,H_0\rangle|}{\|f\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$, where $0<\delta<1$ is a constant and $H_0=\{w_0=0\}$. Then $\mathcal{F}$ is normal on *D*. This result extends the original theorem and broadens the ideas and the ideas of the subsequent research on shared hyperplane.

Keywords

Normal Family, Shared Moving Targets, Holomorphic Curves, Strong General Position

1. 引言

正规族理论的核心问题是关于正规定则的研究，其发展主要分成两大板块：一是亚纯函数正规族的研究，这方面的主要方法有 Zalcman 引理以及涉及导数的 Pang-Zalcman 引理；二是关于一般复流形间全纯映射族的正规定则。在全纯曲线的例子中也存在一些类似的现象。

2015 年，叶亚盛、庞学诚和杨刘[1]考虑全纯曲线 f 与其导曲线 $\nabla f(z)$ “强分担”超平面的情形，证明了如下定理：

定理 YPY 设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}(D;\mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_1,H_2,\cdots,H_{2N+1}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的 $2N+1$ 个处于一般位置的超平面，δ 是一个实数，$0<\delta<1$。若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足以下条件：

1) $f(z)$ 与 $\nabla f(z)$ 在 D 上“强分担” $H_j, j=1,\cdots,2N+1$；

2) 若 $f(z)\in\bigcup_{j=1}^{2N+1}H_j$，那么 $\frac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 $H_0=\{x_0=0\}$ 是一个坐标超平面。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

注 1 “强分担”超平面 H，不仅要求 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$，更要求在满足 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$ 的那些点有 $f(z)=\nabla f(z)$。

2020 年，刘晓俊、庞学诚和杨锦华[2]减弱条件“强分担”并对超平面的第一系数做非零的限制，得到了：

定理 LPY 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_j=\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\mathbf{x},\alpha_j\rangle=0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面，$\alpha_j=(\alpha_{j0},\cdots,\alpha_{jN})^{\mathrm{T}}$ 且 $a_{j0}\neq 0, j=1,2,\cdots,2N+1$。若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足以

下条件：

1) 若 $f(z)\in H_j$，则 $\nabla f(z)\in H_j$，其中 $j=1,\cdots,2N+1$；

2) 若 $f(z)\in\bigcup_{j=1}^{2N+1}H_j$，那么 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot\|H_0\|}\ge\delta$，其中 $H_0=\{x_0=0\}$。$0<\delta<1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

问题：若将“$H_j=\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\mathbf{x},\alpha_j\rangle=0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面”改成可移动的超平面，结论是否仍然成立？

得到以下结论：

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_j(z)=\{w\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle w,\alpha_j(z)\rangle=0\}$ 是处于强一般位置的移动超平面，即对任意的 $j=j_1,j_2,\cdots,j_{N+1}$，$\det(\alpha_{ji}(z))\ne0\quad z\in D$，其中 $\alpha_j(z)=(a_{j0}(z),a_{j1},\cdots,a_{jN})^{\mathrm{T}}$，这里 $a_{j0}(z)\ne0,z\in D$ 在 D 内解析。若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足以下条件：

1) 若 $f(z)\in H_j(z)$，则 $\nabla f(z)\in H_j(z)$；

2) 若 $f(z)\in H_j(z)$，那么 $\dfrac{|\langle f,H_0\rangle|}{\|f\|\cdot\|H_0\|}\ge\delta$，其中 $H_0=\{w_0=0\}$，$0<\delta<1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

该定理推广了定理 LPY 的结果，并且拓展了研究关于分担超平面的正规定则的思路和想法，是否还可以对超平面的限制条件继续减弱或者将函数所需满足的条件减弱成一个条件？

不过可惜的是，由于全纯曲线过于抽象，要满足以上条件的超平面和全纯曲线非常少，所以在本文中没有找到合适的例子。

在证明该定理之前，先说明一些概念。

2. 定义与符号

首先，我们回顾一些关于 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的定义与符号。

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}/\sim$ 是 N 维复射影空间，且对任意的 $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_N),\mathbf{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$，$\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$ 当且仅当存在某个 $\lambda\in\mathbb{C}^*$，使得 $(x_0,x_1,\cdots,x_N)=\lambda(y_0,y_1,\cdots,y_N)$。$(x_0,x_1,\cdots,x_N)$ 的等价类记作 $[x_0:x_1:\cdots:x_N]$，则 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\{x=[x_0:x_1:\cdots:x_N]:\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}\}$。

设 $H_1,H_2,\cdots,H_q$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的超平面，由如下形式给出

$$H_\ell=\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\mathbf{x},\alpha_\ell\rangle=a_{\ell0}x_0+a_{\ell1}x_1+\cdots+a_{\ell N}x_N=0\}$$

其中 $\alpha_\ell=(a_{\ell0},a_{\ell1},\cdots,a_{\ell N})^{\mathrm{T}}\ne0$ 是 H_ℓ 的法向量，这里 $\ell=1,2,\cdots,q$。

定义 2.1 若对任意的 $z\in D$，对任意的 $j_1,j_2,\cdots,j_{N+1}$，向量组 $\alpha_{j1}(z),\alpha_{j2}(z),\cdots,\alpha_{jN+1}(z)$ 都线性无关，则称 $H_1(z),H_2(z),\cdots,H_j(z)$ 为处于强一般位置的移动超平面。

其次，设 $f:D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是全纯曲线，U 是 D 的开子集。任意在 U 内满足 $\mathbb{P}(\tilde{f}(z))\equiv f(z)$ 的全纯曲线 $\tilde{f}:U\to\mathbb{C}^{N+1}$ 称作 f 在 U 上的既约表示，其中 $\mathbb{P}:\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是典型的商映射。

定义 2.2 设 $D\subset U$ 是开集，若 $f_0,f_1,\cdots,f_N$ 在 U 内全纯且没有公共零点，则称 $\tilde{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_N)$ 是 f 的一个既约表示。

设 $H(z)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\mathbf{x},\alpha(z)\rangle=0\}$ 是一个超平面，记 $\|H\|=\|\alpha\|=\max\limits_{0\le i\le N}|a_j|$。在文中，仅考虑满足 $\|H\|=1$ 的标准化超平面。

对全纯曲线 f 的任何一个既约表示 $\tilde{f}$，我们可以定义全纯函数

$$\left\langle f(z),H\right\rangle=\left\langle \tilde{f},\alpha\right\rangle=\sum_{i=0}^{N}a_i f_i(z),$$

再置，

$$\|f\|=\|\tilde{f}\|=\left\{\sum_{i=0}^{N}\left|f_i(z)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

定义 2.3 设 $f=[f_0:f_1:\cdots:f_N]:D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一个全纯曲线，$z\in D$。再设 $\tilde{f}$ 是 f 在 z 处的任何一个既约表示，称

$$f^{\#}(z)=\frac{|f\wedge f'|}{\|f\|^2}=\frac{\sqrt{\sum_{0\le i<j\le N}\left|f_i f_j'-f_j f_i'\right|^2}}{\sum_{i=0}^{N}|f_i|^2}$$

是 f 在 z 处的 Fubini-Study 导数，简称 F-S 导数，其中 $\tilde{f}'=\left(\tilde{f}_0',\tilde{f}_1',\cdots,\tilde{f}_N'\right)$。

注 1 当 $N=1$ 时，则 $f=\dfrac{f_1}{f_0}=[f_0:f_1]:D\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 是亚纯函数，此时

$$f^{\#}(z)=\frac{|f_1'f_0-f_0'f_1|}{|f_0|^2+|f_1|^2}=\frac{\left|\left(\frac{f_1}{f_0}\right)'\right|}{1+\left|\frac{f_1}{f_0}\right|^2}=\frac{|f'|}{1+|f|^2},$$

即通常意义下的球面导数。

最后，按照文[1]中关于导曲线的定义，我们有

定义 2.4 设 f 是从 D 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$\tilde{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_N)$ 是 f 在 D 上的任意一个满足 $f_\mu(z)\neq 0$ 的既约表示，$\mu=\{1,2,\cdots,N\}$，则

$\nabla_\mu f(z)=\left[W(f_\mu,f_0)/d:\cdots:W(f_\mu,f_{\mu-1})/d:f_\mu^2/d:W(f_\mu,f_{\mu+1})/d:\cdots:W(f_\mu,f_N)/d\right]$ 称作 f 关于第 μ 个分量的全纯导曲线，其中 $d(z)$ 是全纯函数，使得 f_μ^d/d 和 $W(f_\mu,f_i)/d$ 没有公共零点，$i=0,1,\cdots,N;i\neq\mu$。

注 2 简单起见，将 $\nabla_0 f$ 记作 ∇f，并且显然地有 ∇f_μ 的定义与 f 的既约表示的选取无关。当 $N=1$ 时，$\nabla_0 f$ 对应的是亚纯函数 $\dfrac{f_1}{f_0}$ 的导数，即 f 的导函数 f'，而 $\nabla_1 f$ 对应的是亚纯函数 $\dfrac{f_1}{f_0}$ 的导数，即 $\dfrac{1}{f}$ 的导函数 $\left(\dfrac{1}{f}\right)'$。

在证明主要定理之前，先介绍一些本文常用符号。在本文中，D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个区域，$H_0=\{x_0=0\}$ 代表第一坐标超平面。我们记 $g_n(\zeta)\overset{\zeta\in\mathbb{C}}{\underset{F-S}{\Rightarrow}}g(\zeta)$ 表示序列 $\{g_n\}$ 按照 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的 Fubini-Study 度量在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于 g。

3. 主要引理

引理 3.1 [3]设 $\mathcal{F}$ 是一族从 $\mathbb{C}^m$ 中的双曲区域 Ω 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射。$\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规当且仅当存在子列 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，点列 $\{z_n\}\subset\Omega$ 满足 $z_n\to z_0\in\Omega$，正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n\to 0^+$，使得 $g_n(\xi):=f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在 $\mathbb{C}^m$ 上内闭一致收敛于从 $\mathbb{C}^m$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的非常值全纯映射 $g(\xi)$。

在证明主要定理的过程中，还需要如下 Hurwitz 定理。

引理 3.2 [2]设$\{f_n(z)\}$是定义在区域$D\subset\mathbb{C}$内的一列全纯函数，$a\in\mathbb{C}$是任意一个复数，且设$f_n(z)$在D的任意一个紧子集上一致收敛于非常值的全纯函数$f(z)$。若存在点$z_0\in D$，使得$f(z_0)=a$，则对于每一个充分大的n，方程$f_n(z)=a$在D内有根。此外，存在z_0的某领域U，使得$f(z)-a$在U内根的总数与$f_n(z)-a$在U内根的总数相同(计重数)。

注 3 当$n\to\infty$时，$f_n(z)-a$在U的所有零点都会收敛到z_0。

由 Nevanlinna 理论中关于线性退化的第二基本定理可得如下结论：

引理 3.3 [4]设$f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$是全纯曲线，$H_1,H_2,\cdots,H_q$是$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$中$(q\geq 2N+1)$个处于一般位置的超平面。若对每个$j=1,\cdots,q$，要么$f(\mathbb{C})$落在$H_j$内，要么$f(\mathbb{C})$不取$H_j$，则$f$是常值。

4. 定理的证明

倘若不然，不妨假设$\mathcal{F}$在点$z_0\in D$处不正规。由引理 3.1 可得，存在点列$\{z_n\}\subset D$满足$z_n\to z_0\in D$，全纯曲线列$\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，正数列$\{\rho_n\}\to 0^+$，使得

$$g_n(\xi):=f_n(z_n+\rho_n\xi)\underset{F-S}{\overset{\xi\in\mathbb{C}}{\rightrightarrows}}g(\xi),$$

其中g是$\mathbb{C}$上的非常值全纯曲线。

断言：g要么不取$H_j(z_0)$，要么$g(\mathbb{C})\subset H_j(z_0)$。

断言的证明：

设$\tilde{g}(\xi)=(g_0,g_1,\cdots,g_N)(\xi)$是$g$的某个既约表示。若不然，假设存在点$\xi_0\in\mathbb{C}$，使得$\langle g(\xi_0),\alpha_j(z_0)\rangle=0$但$\langle g(\xi),\alpha_j(z_0)\rangle\not\equiv 0$。

由引理 3.2，存在点列$\{\xi_n\}$，收敛到ξ_0，使得

$$\langle g_n(\xi_n),\alpha_j(z_n+\rho_n\xi_n)\rangle=0,$$

也就是说

$$\langle f_n,\alpha_j\rangle(z_n+\rho_n\xi_n)=0. \tag{4.1}$$

由定理 1 的条件(2)，我们有

$$|f_{n0}(z_n+\rho_n\xi_n)|\geq\delta\|f_n(z_n+\rho_n\xi_n)\|$$

和

$$|g_{n0}(\xi_n)|\geq\delta\|\tilde{g}_n(\xi_n)\|.$$

令$n\to\infty$，推出$|g_0(\xi_0)|\geq\delta\|\tilde{g}(\xi_0)\|>0$。则$g_0(\xi_0)\neq 0$。

我们不妨假设在领域U上有$g_0(\xi_0)\neq 0$以及对所有充分大的n，$g_{n0}(\xi)\neq 0$。则对于每一个这样的n，

$$\left(g_{n0}^2(\xi),W(g_{n1},g_{n0})(\xi),\cdots,W(g_{nN},g_{n0})(\xi)\right)$$

是$\nabla g_n(\xi)$在U上的既约表示。

由(4.1)和条件(1)，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ji}W(f_{ni},f_{n0})(z_n+\rho_n\xi_n)+a_{j0}(z_n+\rho_n\xi_n)f_{n0}^2(z_n+\rho_n\xi_n)=0,$$

则有，

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\frac{W(f_{ni},f_{n0})}{f_{n0}^2}(z_n+\rho_n\xi_n)=-a_{j0}(z_n+\rho_n\xi_n).$$

因 $a_{j0}(z_0)\neq 0$，故存在 $r>0$，使得 $a_{j0}(z)\neq 0,|z-z_0|<r$，则当 n 充分大时，有 $|z_n+\rho_n\xi_n-z_0|<r$，从而 $a_{j0}(z_n+\rho_n\xi_n)\neq 0$。

又有，

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\left(\frac{g_{ni}}{g_{no}}\right)'(z_n+\rho_n\xi_n)=\rho_n\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\frac{W(f_{ni},f_{n0})}{f_{n0}^2}(z_n+\rho_n\xi_n)=-\rho_n a_{j0}(z_n+\rho_n\xi_n)\neq 0. \tag{4.2}$$

令 $G_j(\xi)=a_{j0}(z_0)+\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\frac{g_i}{g_0}(\xi)$，$G_j(\xi_0)=0$，$G_j(\xi)\not\equiv 0$。由(4.2)式，当 $n\to\infty$ 时，$-\rho_n a_{j0}(z_n+\rho_n\xi_n)\to 0$，则有 $G_j'(\xi_0)=0$。于是，我们不妨设 ξ_0 是 $G_j(\xi)$ 的 $m(m\geq 2)$ 重零点，则 $G_j^{(m)}(\xi_0)\neq 0$。

又由(4.2)式，对于任意充分大的 n，

$G_{nj}(\xi)=a_{j0}(z_n+\rho_n\xi)+\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\frac{g_i}{g_0}(\xi)$ 在 $U(\xi_0)$ 内有 m 个零点(计重数)，不妨设为 $\xi_{n\ell}$，满足 $\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\left(\frac{g_{ni}}{g_{n0}}\right)'(\xi_{n\ell})=-\rho_n a_{j0}(z_n+\rho_n\xi_{n\ell})\neq 0$，

所以 $\xi_{n\ell}$ 是

$$T_{nj}(\xi)=\sum_{i=1}^{N}a_{ji}\left(\frac{g_{ni}}{g_{n0}}\right)'(\xi)+\rho_n a_{j0}(z_n+\rho_n\xi)$$

的 m 个不同零点，其中 $\ell=1,2,\cdots,m$。

当 $n\to\infty$ 时，$\xi_{nl}\to\xi_0$ 且 $T_{nj}(\xi)\underset{U(\xi_0)}{\Rightarrow}G_j'(\xi)$，则 ξ_0 是 $G_j'(\xi)$ 的 m 重零点。

故 $\left(G_j'(\xi)\right)^{(m-1)}(\xi_0)=G_j^{(m)}(\xi_0)=0$，矛盾。

因此，$\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

致　谢

三年前，怀着对将来的美好憧憬，载着家人的期望来到上海理工大学。值此学业即将完成之际，我谨向在我读研期间对我的科研、学习和生活方面给予关心和帮忙的人们致以最衷心的感谢和最美好的祝愿！首先，衷心地感谢我的导师刘晓俊老师，本论文是在刘老师的指导下完成的。无论是论文的选题、查阅资料还是最终的写作，都倾注了导师大量的心血。能师从刘老师，我为自己感到庆幸。借此机会，我谨向刘晓俊老师致以深深的谢意。其次，感谢始终关心和支持我的同学和朋友们！感谢你们在科研、生活上给予的帮助；感谢室友的陪伴，三年里，我们朝夕相处、相互倾听、规划将来，衷心感谢你们给予我的关心和帮忙。同窗之谊，终生难忘！需要特殊感谢的是我的父母，他们是我十多年求学路上的坚强后盾。始终以来你们的支持、理解和鼓舞，是我努力向前的动力！最后，我要感谢我的母校，母校给予了我一个宽敞的学习环境，让我不断吸取学问，充实自己。

参考文献

[1] Ye, Y., Pang, X. and Yang, L. (2015) An Extension of Schwick's Theorem for Normal Families. *Annales Polonici Mathematici*, **115**, 23-31. https://doi.org/10.4064/ap115-1-2

[2] 刘晓俊, 庞学诚, 杨锦华. 涉及分担超平面的正规定则[J]. 数学年刊 A 辑, 2021, 42(2): 171-178.

[3] Yang, L., Fang, C.Y. and Pang, X.C. (2014) Normal Families of Holomorphic Mappings into Complex Projective Space Concerning Shared Hyperplanes. *Pacific Journal of Mathematics*, **272**, 245-256.

https://doi.org/10.2140/pjm.2014.272.245

[4] Ru, M. (2001) Nevanlinna Theory and Its Relation to Diophantine Approximation. World Scientific Publishing, Singapore. https://doi.org/10.1142/4508