Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 67-73
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131007

Hans汉斯

图的A_α-谱半径与k-匹配数

李　振，章　超*

贵州大学，数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2022年12月10日；录用日期：2023年1月11日；发布日期：2023年1月20日

摘　要

令G表示为图，图G的k-匹配是一个函数f，它为G的每个边分配$\{0,1,\cdots,k\}$中的一个数，使得G的每个顶点v均有$\sum_{e\sim v} f(e)\le k$，这里的求和表示取遍所有与定点邻接的边e。在本文中，我们探讨了当k为奇数时，图的A_α-谱半径与整数k-匹配数之间的关系。

关键词

k-匹配理论，谱半径，商矩阵

The A_α-Spectral Radius and k-Matching Number in Graphs

Zhen Li, Chao Zhang*

Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Dec. 10th, 2022; accepted: Jan. 11th, 2023; published: Jan. 20th, 2023

Abstract

Let G be a graph. A k-matching of G is a function f that assigns to each edge of G a number in $\{0,1,\cdots,k\}$ so that $\sum_{e\sim v} f(e)\le k$ for each vertex v of G, where the sum is taken over all edges e incident with v. In our paper, we explore the relationship between A_α-spectral radius and integer k-matching number in general graphs when k is odd.

Keywords

k-Matching Theory, Spectral Radius, Quotient Matrix

*通讯作者。

文章引用: 李振, 章超. 图的 A_α -谱半径与 k-匹配数[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 67-73.
DOI: 10.12677/pm.2023.131007

1. 引言

在本文中，我们只考虑无向简单图。设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个图，$G(V)$ 和 $G(E)$ 分别表示图中的顶点集和边集。除非另有规定，我们均使用文献[1]中的以下符号和定义。

我们将 $N(v)$ 表示为顶点 v 的一组邻接顶点，并用 $d(v)=|N(v)|$ 表示 v 的度。设 δ 和 Δ 分别为图的最小度和最大度。零度顶点也被称为孤立顶点。我们用 $odd(G)$ 表示奇分量的集合，其阶数至少为 3，用 $m=|odd(G)|$ 表示奇分量的数量，用 $i(G)$ 代表 G 中孤立顶点的数量。图 G 的邻接矩阵定义为 $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，如果顶点 i 和 j 相邻，则 $a_{ij}=1$，否则 $a_{ij}=0$。令 $D(G)$ 表示图 G 关于顶点度的对角矩阵。$L(G)=D(G)-A(G)$ 和 $Q(G)=D(G)+A(G)$ 分别称为图 G 的拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵。对于任意 $\alpha\in[0,1)$，Nikiforov [2]引入图 G 的 A_α-矩阵为 $A_\alpha(G)=\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G)$。需要指出的是，$A_0=A(G)$，$A_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}Q(G)$。$A(G)$ 的最大特征值称为图 G 的谱半径，拉普拉斯谱半径和无符号拉普拉斯谱半径也可以类似地定义。

现在我们回顾文献[3]中 k-匹配的定义，这是整数匹配的自然推广。设 k 为整数，图 G 的 k-匹配是函数 $f:E(G)\to\{0,1,\cdots,k\}$ 使得对于任何顶点 $v\in v(G)$，均有 $\sum_{e\sim v}f(e)\le k$。如果对于匹配 M 的每个顶点 v，均有 $\sum_{e\sim v}f(e)=k$，则匹配 M 称为 G 的完美 k-匹配。图 G 的 k-匹配数用 $\mu_k(G)$ 表示，是所有 k-匹配 f 上使得 $\sum_{e\in E(G)}f(e)$ 为最大值时的 k-匹配。很容易知道，当 $k=1$ 时，完美 1-匹配是我们熟悉的整数类型的完美匹配。根据文献[4]，我们知道当 $k=2$ 时，完美 2-匹配相当于分数完美匹配。图的 k-匹配被广泛应用于网络设计、组合拓扑等许多研究领域。

近年来，图是否能为某些性质找到谱充分条件的问题越来越受到人们的关注，特别是在研究图的特征值与匹配数之间的关系方面。例如，当 k 为偶数时，Y. Liu 和 X. Liu [5]证明了图的整数 k-匹配数等于其分数匹配数的 k 倍，其中分数匹配是通过使用 Pulleyblank [6]给出的生成特殊分数匹配的算法，将整数匹配中的赋值集{0, 1}替换为实数集[0, 1]来定义的。H. Lu 和 W. Wang [7]研究了一般图的完美 k-匹配，并给出了当 k 为奇数时其存在的充分必要条件。最近，Y. Liu，X. Su，D. Xiong [3]研究了当 k 为奇数时，图中 k-匹配的数量。这一结果与文献[7]中的 Berge-Tutte 公式非常相似。此外，在文献[8]中，R. F. Liu 等人从最小度 δ 的角度探讨了分数匹配数与谱半径之间的关系。

在本文中，我们主要研究 k-匹配数与谱半径相对于奇分量的数量之间的关系(见定理 3.1)。

2. 预备知识

在本节中，我们将介绍完美 k-匹配的一些特征和一些引理。

令 M 为 $n\times n$ 阶的实对称矩阵，设 M 是 n 阶对称实矩阵，描述为如下形式

$$M=\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,m} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m,1} & M_{m,2} & \cdots & M_{m,m} \end{pmatrix}$$

其中块 M_{ij} 是任意 $1\le i,j\le m$ 且 $n=n_1+\cdots+n_m$ 的 $n_i\times n_j$ 矩阵。对于 $1\le i,j\le m$，令 b_{ij} 表示 M_{ij} 的平均行和，

即 b_{ij} 是 M_{ij} 中所有条目的和除以行数。$B=\left(b_{ij}\right)$ 被称为 M 的商矩阵。此外，如果 M 的每个块 M_{ij} 具有恒定的行和，则 B 被称为 M 的公平商矩阵。

对于任何非负矩阵 M，我们用 $\rho\left(M\right)$ 表示 M 的谱半径。我们有如下关于公平商矩阵的引理。

引理 2.1 [9] [10]设 M，M_1，M_2 是非负矩阵。然后

1) 如果 B 是 M 的公平商矩阵，那么 B 的特征值也是 M 的特征值，并且 $\rho\left(M\right)=\rho\left(B\right)$。

2) 如果 M_1-M_2 为非负，则 $\rho\left(M_1\right)\geq\rho\left(M_2\right)$。

对于 k-匹配，我们有以下结果。

命题 2.2 设 G 是连通图，f 是 G 上的 k-匹配。则 $\sum_{e\in E(G)} f\left(e\right)\leq\frac{1}{2}k\left|V\left(G\right)\right|$，当且仅当 f 是完美 k-匹配时等式成立。因此，k-匹配数 $\mu_k\left(G\right)\leq\frac{1}{2}k\left|V\left(G\right)\right|$，等式成立当且仅当图 G 存在完美 k-匹配。

证明：对于任何顶点 v 和 k 匹配的 f，我们有 $\sum_{e\sim v} f\left(e\right)\leq k$。对所有顶点 v 将这些不等式求和，我们有 $\frac{1}{k}\sum_{e\in E(G)} 2f\left(e\right)\leq\left|v\left(G\right)\right|$。

因此，我们获得了期望的结果。根据 k-匹配数的定义，我们可以很容易地知道 f 是 G 上的完美 k-匹配，当且仅当 $\sum_{e\in E(G)} f\left(e\right)\leq\frac{1}{2}k\left|v\left(G\right)\right|$。

文献[3]中的以下命题为我们提供了完美 k-匹配存在的标准。

命题 2.3 设 G 为图。

1) 如果 $k\geq 2$ 是偶数，则对于所有 $S\subseteq V\left(G\right)$，$G$ 具有完美 k-匹配当且仅当 $i\left(G-S\right)\leq\left|S\right|$。

2) 如果 $k\geq 1$ 是奇数，则对于所有子集 $S\subseteq V\left(G\right)$，$G$ 具有完美 k-匹配当且仅当 $odd\left(G-S\right)+ki\left(G-S\right)\leq k\left|S\right|$。

引理 2.4 (k-Berge-Tutte formula, [11])对于任意图 G，

$$\mu_k\left(G\right)=\frac{1}{2}\left(k\left|V\left(G\right)\right|-\max\left\{odd\left(G-S\right)+ki\left(G-S\right)-k\left|S\right|\mid S\subset V\left(G\right)\right\}\right).$$

引理 2.5 [12]设 G 是具有 n 个顶点的连通图，如果 $\left|E\left(G\right)\right|\geq C_{n-1}^2+1$，则 G 包含哈密顿路。

3. 主要结论

定理 3.1 设 G 是 $n=\left|V\left(G\right)\right|$ 且 $\delta=\delta\left(G\right)$ 的连通图，且 $\alpha\in\left[0,1\right)$ 是实数且 $k>m$。如果

$$\lambda_1\left(\alpha D\left(G\right)+\left(1-\alpha\right)A\left(G\right)\right)<\begin{cases}\delta\sqrt{1+\dfrac{2\left(1-\dfrac{m}{k}\right)}{n-\left(3m+1-\dfrac{m}{k}\right)}}, & \alpha=0\\ \dfrac{2\alpha\delta}{1-\alpha}\left[\dfrac{n-3m}{n-\left(3m+1-\dfrac{m}{k}\right)}\right], & \alpha\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\\ \dfrac{\alpha\delta}{1-\alpha}\left[1+\dfrac{2\left(1-\dfrac{m}{k}\right)}{n-\left(3m+1-\dfrac{m}{k}\right)}\right], & \alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

则 $\mu_k(G) > \dfrac{kn-\left(1-\frac{m}{k}\right)}{2}$。

证明： 采用反证法证明，假设 $\mu_k(G) \le \dfrac{kn-\left(1-\frac{m}{k}\right)}{2}$，因此 $\mu_k(G) < \dfrac{kn}{2}$。这意味着图 G 不具有命题 2.2 的完美 k-匹配。因此，根据命题 2.3，存在满足 $i(G-S)-|S| \ge 1-\dfrac{m}{k}$ 的顶点子集 $S \subseteq V(G)$。设 T 是 $G-S$ 中的孤立顶点集，$|S|=s$，$|T|=t$。则 $3m+s+t \le n$，$t=i(G-S) \ge S+1-\dfrac{m}{k}$，因此 $S \le \dfrac{n-\left(3m+1-\frac{m}{k}\right)}{2}$。由于 T 是 $G-S$ 中孤立顶点的集合，我们观察到 $N_G(T) \subseteq S$，因此 $S \ge \delta$。

设 $X=E_G[S,T]$，$H=G[X]$ 是由 X 诱导的二部图 G，并且 $r=|E(H)|$。则 $r \ge t\delta$。因此，$\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)$ 相对于分区 (S,T) 的商矩阵 $R(\alpha D(H)+(1-\alpha)A)$：

$$R(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha r}{s} & \dfrac{(1-\alpha)r}{s} \\ \dfrac{(1-\alpha)r}{t} & \dfrac{\alpha r}{t} \end{pmatrix}$$

$R(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H))$ 的特征多项式为：$\lambda^2-\alpha\left(\dfrac{r}{s}+\dfrac{r}{t}\right)\lambda+\left[\alpha^2-(1-\alpha)^2\right]\dfrac{r^2}{st}=0$，直接计算便有：

$$\begin{aligned}\lambda_1(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)) &= \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)+\sqrt{\alpha^2\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)^2-4\left[\alpha^2-(1-\alpha)^2\right]\frac{r^2}{st}}\right\} \\ &= \frac{1-\alpha}{2}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)+\sqrt{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2-1\right]\left(\frac{r}{s}-\frac{r}{t}\right)^2+\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)^2}\right\}\end{aligned}$$

情况 1：当 $\alpha=0$ 时，$\lambda_1(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)) = r\sqrt{\dfrac{1}{st}}$。因此，

$$\begin{aligned}\lambda_1(\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G)) &\ge \lambda_1\left(\alpha D(H\cup(n-s-t)K_1)+(1-\alpha)A(H\cup(n-s-t)K_1)\right) \\ &= \lambda_1(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)) \ge \lambda_1\left(R(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H))\right) \\ &= r\sqrt{\frac{1}{st}} \ge \delta\sqrt{\frac{t}{s}} \ge \delta\sqrt{1+\frac{k-m}{sk}} \ge \delta\sqrt{1+\frac{2\left(1-\frac{m}{k}\right)}{n-\left(3m+1-\frac{m}{k}\right)}}\end{aligned}$$

情况 2：当 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ 时，$\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2-1 \le 0$，由此可知：

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(R(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H))\right) &\ge \frac{1-\alpha}{2}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)+\sqrt{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2-1\right]\left(\frac{r}{s}-\frac{r}{t}\right)^2+\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)^2}\right\} \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)\end{aligned}$$

据此有，

$$\lambda_1\left(\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G)\right)\ge\lambda_1\left(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)\right)\ge\lambda_1\left(R\left(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)\right)\right)$$
$$\ge\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)\ge\frac{\alpha}{1-\alpha}\delta\left(1+\frac{t}{s}\right)\ge\frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\left(2+\frac{1-\frac{m}{k}}{s}\right)$$
$$\ge\frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\left[2+\frac{2\left(1-\frac{m}{k}\right)}{n-\left(3m+1-\frac{m}{k}\right)}\right]=\frac{2\alpha\delta}{1-\alpha}\left[\frac{n-3m}{n-\left(3m+1-\frac{m}{k}\right)}\right]$$

情况 3：当$\frac{1}{2}<\alpha<1$时，$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2-1>0$，由此可知：

$$\lambda_1\left(R\left(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)\right)\right)>\frac{1-\alpha}{2}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)+\sqrt{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2-1\right]\left(\frac{r}{s}-\frac{r}{t}\right)^2+\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{t}\right)^2}\right\}$$
$$=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{r}{s}$$

据此有，

$$\lambda_1\left(\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G)\right)\ge\lambda_1\left(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)\right)\ge\lambda_1\left(R\left(\alpha D(H)+(1-\alpha)A(H)\right)\right)$$
$$\ge\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{r}{s}\ge\left(\frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\right)\frac{t}{s}\ge\frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\left(1+\frac{1-\frac{m}{k}}{s}\right)$$
$$\ge\frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\left[1+\frac{2\left(1-\frac{m}{k}\right)}{n-\left(3m+1-\frac{m}{k}\right)}\right]$$

定理 3.2 设 G 是 $n=|V(G)|$ 且 $\delta=\delta(G)$ 的连通图，且 $\alpha\in[0,1)$ 是实数且 $k>m$。如果

$$\lambda_1\left(\alpha D(\bar{G})+(1-\alpha)A(\bar{G})\right)<\delta-\frac{m}{k}$$

因此 $\mu_k(G)>\frac{kn-\left(1-\frac{m}{k}\right)}{2}$。

证明：假设 $\mu_k(G)\le\frac{kn-\left(1-\frac{m}{k}\right)}{2}<\frac{kn}{2}$。这意味着，图 G 不包含完美 k-匹配。因此，根据定理 2.3，存在满足 $i(G-S)-|S|\ge1-\frac{m}{k}$ 的顶点子集 $S\subseteq V(G)$。设 T 是 $G-S$ 中孤立顶点的集合，$|S|=s$，$|T|=t$。那么 $t=i(G-S)\ge s+1-\frac{m}{k}$。由于 T 是 $G-S$ 中孤立点的集合，我们观察到 $N_G(T)\subseteq S$，因此 $s\ge\delta$。由于 $K_t\cup(n-t)K_1$ 是 $\bar{G}$ 的生成子图，因此

$$\lambda_1\left(\alpha D(\bar{G})+(1-\alpha)A(\bar{G})\right)\ge\lambda_1\left(\alpha D\left(K_t\cup(n-t)K_1\right)+(1-\alpha)A\left(K_t\cup(n-t)K_1\right)\right)$$
$$=t-1\ge s-\frac{m}{k}\ge\delta-\frac{m}{k}$$

这与假设矛盾。

推论 3.3 设G是 $n=\left|V(G)\right|$ 且 $\delta=\delta(G)$ 的连通图，且 $\alpha\in[0,1)$ 是实数，如果

$$\lambda_1\left(\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G)\right)<\begin{cases}\delta\sqrt{1+\dfrac{2}{n-1}}, & \alpha=0\\ \left(\dfrac{2\alpha\delta}{1-\alpha}\right)\dfrac{n}{n-1}, & \alpha\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\\ \dfrac{\alpha\delta}{1-\alpha}\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right], & \alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

则图 G 包含完美 k-匹配。

证明：在定理 3.1 中，设 $m=0$，我们可以知道 $\mu_k(G)>\dfrac{kn-1}{2}$。根据命题 2.2 有 $\mu_k(G)\le\dfrac{kn}{2}$，由于 $\mu_k(G)$ 是一个整数。这迫使 $\mu_k(G)=\dfrac{kn}{2}$，这意味着 G 包含完美 k-匹配。

同样，我们可以很容易地得出以下结论：

推论 3.4 设 G 是 $n=\left|V(G)\right|$ 且 $\delta=\delta(G)$ 的连通图，且 $\alpha\in[0,1)$ 是实数。如果

$$\lambda_1\left(D(\bar{G})+(1-\alpha)A(\bar{G})\right)<\delta$$

则图 G 包含完美 k-匹配。

定理 3.5 设 G 是具有 n 个顶点的连通图且 $n\ge4$，n 为偶数，如果 $\left|E(G)\right|\ge C_{n-1}^{2}+1$，则 G 包含完美 k-匹配。

证明：根据定理 2.5，图 G 包含哈密顿路 P_n。对于任何 $e\in E(P_n)$，我们可以通过交替地将 $f(e)=k$ 和 $f(e)=0$ 赋给 P_n，对于 P_n 之外的边赋值 0，以此来构造完美 k-匹配。

基金项目

本文由贵州省科技厅项目(批准号：黔科合基础[2020]1Y405)资助。

参考文献

[1] Lovász, L. and Plummer, M.D. (1986) Matching Theory. *Annals of Discrete Mathematics*, **29**.

[2] Nikiforov, V. (2017) Merging the A- and Q-Spectral Theories. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **11**, 81-107. https://doi.org/10.2298/AADM1701081N

[3] Lu, H.L. and Wang, W. (2014) On Perfect *k*-Matchings. *Graphs and Combinatorics*, **30**, 229-335. https://doi.org/10.1007/s00373-012-1259-7

[4] Tutte, W.T. (1953) The 1-Factors of Oriented Graphs. *Proceedings of the American Mathematical*, **4**, 922-931. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1953-0063009-7

[5] Liu, Y. and Liu, X.H. (2018) Integer *k*-Matchings of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **235**, 118-128. https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.08.013

[6] Pulleyblank, W.R. (1987) Fractional Matching and the Edmonds-Gallai Theorem. *Discrete Applied Mathematics*, **16**, 51-58. https://doi.org/10.1016/0166-218X(87)90053-9

[7] Berge, C. (1958) Sur le couplage maximum d'un graphe. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (*Paris*) **247**, 258-259.

[8] Liu, R.F., Lai, H.J., Guo, T.L. and Xue, J. (2020) Fractional Matching Number and Spectral Radius of Nonnegative Matrix of Graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, Article ID: 1865252. https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1865252

[9] Godsil, C. and Royle, G. (2001) Algebraic Graph Theory. In: Vakil, R., Ed., *Graduate Texts in Mathematics* (Vol. 207), Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9

[10] You, L., Yang, M., So, W. and Xi, W. (2019) On the Spectrum of an Equitable Matrix and Its Application. *Linear Algebra and Its Applications*, **577**, 21-40. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.04.013

[11] Liu, Y., Su, X.L. and Xiong, D.N. (2021) Integer *k*-Matchings of Graphs: *k*-Berge-Tutte Formula, *k*-Factor-Critical Graphs and *k*-Barriers. *Discrete Applied Mathematics*, **297**, 120-128. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.03.005

[12] Ore, O. (1963) Hamiltonian Connected Graphs. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **42**, 21-27.