Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 131-148
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132016

Hans汉斯

一类 $p-$Laplace 方程基态解的存在性与集中性

石 影

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2022年12月31日；录用日期：2023年1月30日；发布日期：2023年2月6日

摘 要

本文研究 $p-$**Laplace** 方程：

$$-\Delta_p u+|u|^{p-2}u=Q_n(x)|u|^{q-2}u, \quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中：$\Delta_p u=\mathbf{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$，$1<p<N$，$p<q<p^*:=\frac{Np}{N-p}$。当 $n\to\infty$ 时，有界函数 $Q_n(x)$ 的自焦核 $supp\{Q_n^+\}$ 收缩为有限点集。我们采用约束极小和集中紧性原理证明 $p-$**Laplace** 方程基态解的存在性和集中性。

关键词

$p-$**Laplace**，基态解，存在性，集中性

Existence and Concentration of Ground States for a Class of p-Laplace Equation

Ying Shi

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Dec. 31^{st}, 2022; accepted: Jan. 30^{th}, 2023; published: Feb. 6^{th}, 2023

文章引用: 石影. 一类 $p-$Laplace 方程基态解的存在性与集中性[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 131-148.
DOI: 10.12677/pm.2023.132016

Abstract

In this paper, we study the following $p-$Laplace equation:

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = Q_n(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $\Delta_p u = \mathbf{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$, $N \geq 1$, $p < q < p^* = \frac{Np}{N-p}$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leq N \leq p)$. Q_n are bounded functions with self-focusing core supp Q_n^+ which shrinks to a finite set of points as $n \to \infty$. Via the constraint minimizing method and the concentration compactness principle, we prove the existence and concentration for ground states.

Keywords

p-Laplace, Ground States, Existence, Concentration

1. 引言

随着数学、物理等自然科学的发展, $p-$Lapace 方程一直是国内外广大科研工作者研究的热点问题. 在 [1] 中, Bonanno-Livrea证明了 $p-$Laplace 方程三解的存在性. 在 [2] 中, Ferrero-Gazzola 证明了次临界增长或超临界增长的非线性 $p-$Laplace 方程径向解的存在性. 在 [3] 中， Liu 证明了 p-超线性次临界的 $p-$Laplace 方程基态解的存在性. 在 [4] 中, Costa-Magalhes 证明了 $p-$Laplace 摄动方程非平凡解的存在性.

本文考虑 $p-$Laplace 方程:

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = Q_n(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{$\mathcal{E}_n$}$$

其中: $N \geq 1, 1 < p < N$, $p < q < p^* := \frac{Np}{N-p}$. 当 $n \to \infty$ 时, 有界函数 $Q_n(x)$ 的自焦核 $supp\{Q_n^+\}$ 收缩为有限点集.

注 1 对于方程$(\mathcal{E}_n)$, 称 $\{x|Q_n(x) > 0\}$ 和 $\{x|Q_n < 0\}$ 中的点分别为自聚焦和去聚焦. 在文

献 [5] 中, *Buryak-Trapani* 研究了自聚焦和去聚焦的情形, 并证明了亮孤子和暗孤子的存在性. 对于带变号权函数的非线性偏微分方程的相关结果，参考 [6–9].

当 $p = 2$ 时, $p-$Laplace 方程可化为：

$$-\Delta u + u = Q_n(x)|u|^{q-2}u, \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{1}$$

其中: $Q_n(x)$ 变号. 在 [10] 中，Ackermann-Szulkin 证明了：

(i) 当 $n \to \infty$, 集合 $\{x \in \Omega|\, Q_n > 0\}$ 收缩到点 x_0 时, 作者采用约束极小方法证明了 Laplace 方程 (1) 基态解的存在性, 并进一步证明了这些基态解在 x_0 处关于 H^1 范数集中.

(ii) 当 $n \to \infty$, 集合 $\{x \in \Omega|\, Q_n > 0\}$ 收缩到两个不同的点 $x_1 \neq x_2$ 时, 作者采用截断函数方法证明了当 n 充分大时基态解的存在性及其 H^1 范数的集中性. 此时, 这些基态解关于 H^1 范数不能同时在 x_1 和 x_2 处集中.

为了进一步确定基态解关于 H^1 范数在 x_1 处还是 x_2 处集中，Fang-Wang [11] 就特定的权函数 $Q_n(x)$ 对方程(1) 进行了深入研究.若令

$$Q_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \varepsilon_n, \\ -1, & |x| \geq \varepsilon_n, \end{cases} \tag{q_1}$$

其中: $\varepsilon_n \to 0$. 作者采用约束极小方法证明了 (q_1) 基态解的存在性并通过和极限方程进行比较得到基态解关于 H^1 范数在 x_0 处集中. 若令

$$Q_n(x) = \begin{cases} s_1, & x \in B_{r_1\varepsilon_n}(x_1), \\ s_2, & x \in B_{r_2\varepsilon_n}(x_2), \\ -1, & \text{其它}, \end{cases} \tag{q_2}$$

其中: $s_1, s_2, r_1, r_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$, $\varepsilon_n \to 0$. 作者采用集中紧原理证明了基态解关于 H^1 范数在 x_1 处集中.

受文献 Ackermann-Szulkin [10] 和 Fang-Wang [11] 的启发, 本文旨在研究方程 ($\mathcal{E}_n$) 的基态解的存在性和 H^1 范数的集中性。

假设 (q_1) 成立, 我们有如下定理.

定理 1 *(i)* ($\mathcal{E}_n$) 至少存在一个正基态解;

(ii) 设 u_n 为 ($\mathcal{E}_n$)的一个正基态解. 作伸缩变换

$$\varphi_n := \varepsilon_n^{\frac{p}{q-p}} u_n(\varepsilon_n x),$$

则存在 φ_n 的子列, 仍记为 φ_n, 使得 $\varphi_n \to \varphi$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 且 φ 是方程

$$-\Delta_p u = Q(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

的一个正基态解. 这里

$$Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| < 1, \\ -1, & \text{其它}. \end{cases}$$

(iii) 对任意的 $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to 0} \frac{\int_{|x|\geq\delta} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p)\, dx} = 0, \quad \lim_{n\to 0} \frac{\int_{|x|\geq\delta} |\nabla u_n|^q\, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q\, dx} = 0.$$

注 2 *Sobolev* 空间$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u|\ \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N), u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)\}$, 其中范数定义为

$$\|u\|_D = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

假设 (q_2) 成立. 不失一般性, 不妨设 $s_1 \leq s_2$ 并定义$\beta = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{qp}{q-p}-N}\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\frac{p}{q-p}}$. 若 $\begin{cases} s_1 = s_2, \\ \beta < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s_1 < s_2, \\ \beta \leq 1, \end{cases}$ 我们有如下定理.

定理 2 *(i)* $(\mathcal{E}_n)$ 至少存在一个正基态解;

(ii) 设 u_n 为 $(\mathcal{E}_n)$的一个正基态解. 作伸缩变换

$$\varphi_n(x) := \varepsilon_n^{\frac{p}{q-p}} u_n(\varepsilon_n x),$$

则存在 φ_n 的子列, 仍记为 φ_n, 使得$\varphi_n(x + \frac{x_2}{\varepsilon_n}) \to \varphi$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 且 φ 是方程

$$-\Delta_p \varphi = K_2(x)|\varphi|^{q-2}\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

的一个正基态解. 这里

$$K_2 = \begin{cases} s_2, & x \in B_{r_2}(0), \\ -1, & \text{其它}; \end{cases}$$

(iii) 对于任意的 $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to 0}\frac{\int_{|x-x_2|\geq\delta}(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p)\,dx}=0,\quad \lim_{n\to 0}\frac{\int_{|x-x_2|\geq\delta}|u_n|^q\,dx}{\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q\,dx}=0.$$

本文结构如下: 第二节采用约束极小证明定理 1; 第三节利用约束极小和集中紧方法证明定理 2. **符号说明:** C, C_1, $C_2, \cdots$ 代表正常数; $B_r(y) := \{x \in \mathbb{R}^N |\ |x-y| < r\}$ 表示以 y 为心 r 为半径的球; $|u|_p$ 表示 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中的范数; $Q^{\pm}(x) = \max\{\pm Q(x), 0\}$ 表示函数 $Q(x)$ 的正部与负部.

2. 定理 1 的证明

本节采用约束极小方法得到方程 $(\mathcal{E}_n)$ 基态解的存在性, 并通过与极限方程比较可以得到基态解的集中性，进而完成定理 1 的最终证明.

首先将 ε_n 缩写为 ε, 作变量替换

$$\varphi(x) := \varepsilon^{\frac{p}{q-p}}u(\varepsilon x),$$

则由 $(\mathcal{E}_n)$ 得

$$-\Delta_p\varphi + \varepsilon^p|\varphi|^{p-2}\varphi = Q(x)|\varphi|^{q-2}\varphi,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{2}$$

注意到

$$Q(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ -1, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

形式上, 方程 (2) 的极限方程为

$$-\Delta_p\varphi = Q(x)|\varphi|^{q-2}\varphi,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{3}$$

考虑约束极小问题:

$$I_0=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,dx\ \middle|\ u\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^q\,dx=1\right\}.$$

我们有下述引理.

引理 1 *存在正函数 $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得 I_0 在 u_0 处可达, 并且 $\varphi_0 = I_0^{\frac{1}{q-p}}u_0$ 为方程 (3) 的正基态解.*

证明. 设 $\{u_n\} \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 为 I_0 的一列极小化序列, 那么当 $n \to \infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p\,dx\to I_0\,,\quad \int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u_n|^q\,dx=1,\quad n=1,2,\cdots.$$

首先, 我们证明 $I_0 > 0$. 事实上, 由 $Q(x)$ 的定义可知

$$\int_{|x|<1} |u_n|^q \, dx = 1 + \int_{|x|\geq 1} |u_n|^q \, dx \geq 1. \tag{4}$$

又由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$\int_{|x|<1} |u_n|^q \, dx \leq C \left(\int_{|x|<1} |u_n|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{q}{p^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \to C I_0^{\frac{q}{p}}. \tag{5}$$

因此, 由 (4) 和 (5) 得 $I_0 \geq C^{-p/q} > 0$.

由 I_0 的定义, $\{u_n\}$ 在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 取子序列, 仍记为 $\{u_n\}$, 则当 $n \to \infty$ 时

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 于 } D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u_n \to u_0 \text{ a.e. 于} \mathbb{R}^N, \quad u_n \to u_0 \text{ 于} L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), \forall 1 < r < p^*.$$

注意到 $|u_n|$ 为极小化序列, 则不妨设 $u_n \geq 0$. 因此$u_0 \geq 0$ a.e.于 $\mathbb{R}^N$. 对 (4) 取下极限, 由 Fatou 引理得

$$\int_{|x|<1} u_0^q \, dx \geq 1 + \int_{|x|\geq 1} u_0^q \, dx,$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u_0^q \, dx \geq 1.$$

如果 $\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u_0^q \, dx > 1$, 则由范数的弱下半连续性得

$$0 < I_0 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u_0^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}}} < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx = I_0,$$

矛盾. 因此, I_0 在 $u_0 \geq 0$ 处达到, 且 $u_0 \neq 0$.

令 $\varphi_0 = I_0^{\frac{1}{q-p}} u_0$, 则 $\varphi_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$-\Delta_p \varphi_0 = Q(x) \varphi_0^{q-1} \geq 0,$$

由椭圆方程的正则性,

$$\varphi_0 \in C^p(B_1) \cap C^p(\bar{B}_1^c) \cap C(\mathbb{R}^N).$$

再由椭圆方程强极大值原理得 $\varphi_0 > 0$. 因此, 方程 (3) 存在正基态解. □

接下来，考虑约束极小问题：

$$I_\varepsilon = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + \varepsilon^p |u|^p) \, dx \;\middle|\; u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) |u|^q \, dx = 1 \right\}.$$

对于 $0<\varepsilon\leq 1$, 类似于引理 1的证明, 不难得到下述命题.

命题 1 *存在正函数 $u_\varepsilon\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得 I_ε 在 u_ε 处可达到. 进一步, $\varphi_\varepsilon=I_\varepsilon^{\frac{1}{q-p}}u_\varepsilon$ 为方程 (2) 的一个正基态解.*

为了证明方程 (2) 基态解 H^1 范数集中性, 我们要用到有下述引理.

引理 2 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon=I_0$.

证明. 由引理 1, 存在正函数 $u_0\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)u_0^q\,dx=1,\quad \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_0|^p\,dx=I_0.$$

设光滑的截断函数 $\chi(x)$ 满足

$$0\leq\chi(x)\leq 1,\quad \chi(x)=1,x\in B_1(0),\quad \chi(x)=0,x\in B_2^c(0).$$

令 $w_n=c_n\chi_n u_0\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 其中:

$$c_n=\Big(\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)\chi_n^q u_0^q\,dx\Big)^{-\frac{1}{q}},\quad \chi_n(x)=\chi\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|w_n|^q\,dx=1,$$

则由 I_ε 的定义得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon\leq\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla w_n|^p+\varepsilon^p w_n^p\right)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^p\,dx.$$

注意到当 $n\to\infty$ 时, $c_n\to 1$, $\chi_n u_0\to u_0$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 即 $w_n\to u_0$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. 因此, 令 $n\to\infty$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon\leq\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_0|^p\,dx=I_0.$$

设 $u_\varepsilon>0$ 为 I_ε 的达到函数, 则由 I_0 的定义得

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon=\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p u_\varepsilon^p)\,dx\geq\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\varepsilon|^p\,dx\geq I_0.$$

因此, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon=I_0$. 证毕. □

最后，基于上述准备, 我们证明定理 1.

定理 1 的证明. 由命题 1, 方程 (2) 存在正基态解. 通过变量替换不难证明方程 $(\mathcal{E}_n)$ 至少存在一个正基态解. 因此, (i) 成立.

设 u_n 为方程 $(\mathcal{E}_n)$ 的正基态解, 则 $\varphi_{\varepsilon_n}=\varepsilon_n^{\frac{p}{q-p}}u_n(\varepsilon_n x)$ 为 (2) 的正基态解. 因此, 存在 I_{ε_n} 的达

到函数 $u_{\varepsilon_n} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得 $\varphi_{\varepsilon_n} = I_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{q-p}} u_{\varepsilon_n}$. 由引理 2, u_{ε_n} 在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 因此, 在子列的意义下, 当 $\varepsilon_n \to 0$ 时,

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0 \text{ 于 } D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u_{\varepsilon_n} \to u_0 \text{ a.e. } \mathbb{R}^N, \quad u_{\varepsilon_n} \to u_0 \text{ in } L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), 1 < r < p^*.$$

由于

$$\int_{|x|<1} u_{\varepsilon_n}^q \, dx = 1 + \int_{|x|\geq 1} u_{\varepsilon_n}^q \, dx. \tag{6}$$

由 Fatou 引理得

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u_0^q \, dx \geq 1.$$

由范数的弱下半连续性, 引理 2, 和 I_0 的定义可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx &\leq \liminf_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^p dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^p + \varepsilon^p |u_{\varepsilon_n}|^p\right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon_n \to 0} I_{\varepsilon_n} = I_0 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u_0^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}}.
\end{aligned}$$

因此, I_0 在 u_0 处可达到, 即

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx = I_0 > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u_0^q \, dx = 1. \tag{7}$$

进一步，我们得到

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_n^p \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_n}^p \, dx = 0.$$

进而, 由弱收敛和基本不等式

$$|\xi_2|^p \geq |\xi_1|^p + p|\xi_1|^{p-2}\xi_1 \cdot (\xi_2 - \xi_1) + C(p)|\xi_2 - \xi_1|^p, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N, p > 2$$

可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_{\varepsilon_n} - u_0)|^p dx = 0.$$

令 $\varphi_0 := I_0^{\frac{1}{q-p}} u_0 \geq 0$, 则由引理 1 的证明过程不难验证 φ_0 为方程 (3) 的正基态解. 根据引理 2, 方程 (2) 的正基态解 φ_{ε_n} 在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到极限方程 (3) 的正基态解 φ_0. 因此, (ii) 成立.

由 (6), (7), 和 Brézis-Lieb 引理不难得到

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\varepsilon_n}^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0^q \, dx, \quad \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\varepsilon_n} - u_0|^q \, dx = 0.$$

因此, 对任意的 $\delta>0$,

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_{|x|\le\frac{\delta}{\varepsilon_n}} u_{\varepsilon_n}^q\,dx=\int_{\mathbb{R}^N} u_0^q\,dx.$$

注意到

$$u_n(x)=\varepsilon_n^{-\frac{p}{q-p}} I_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{q-p}} u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n^{-1}x),$$

则当 $n\to+\infty$ 时,

$$\frac{\displaystyle\int_{|x|\ge\delta}|u_n|^q\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q\,dx}\le\frac{\displaystyle\int_{|x|\ge\delta}|u_n|^q\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}Q\Big(\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)|u_n|^q\,dx}=\frac{\displaystyle\int_{|x|\ge\frac{\delta}{\varepsilon_n}}u_{\varepsilon_n}^q\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u_{\varepsilon_n}|^q dx}=\int_{|x|\ge\frac{\delta}{\varepsilon_n}}u_{\varepsilon_n}^q\,dx\to 0.$$

由于

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_{|x|\le\frac{\delta}{\varepsilon_n}}|\nabla u_{\varepsilon_n}|^p dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_0|^p dx,\quad \lim_{\varepsilon_n\to 0}\varepsilon_n^p\int_{\mathbb{R}^N}u_{\varepsilon_n}^p\,dx=0,$$

则当 $n\to\infty$ 时, 由引理 2 得

$$\frac{\displaystyle\int_{|x|\ge\delta}(|\nabla u_n|^p+u_n^p)\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^p+u_n^p)\,dx}=I_{\varepsilon_n}^{-1}\int_{|x|\ge\frac{\delta}{\varepsilon_n}}(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^p+\varepsilon_n^p|u_{\varepsilon_n}|^p)\,dx\to 0.$$

因此, (iii) 成立. 证毕. □

3. 定理 2 的证明

本节通过与极限方程进行比较, 采用集中紧性原理证明方程 $(\mathcal{E}_n)$ 的基态解关于 H^1 范数在特定点处集中, 进而完成定理 2 的证明.

不妨假设集中点 $x_1=0$, 缩写 ε_n为 ε. 作变量替换

$$\varphi(x)=\varepsilon^{\frac{p}{q-p}}u(\varepsilon x),$$

则由方程 $(\mathcal{E}_n)$ 得

$$-\Delta_p\varphi+\varepsilon^p|\varphi|^{p-2}\varphi=Q_\varepsilon(x)|\varphi|^{q-2}\varphi,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{8}$$

其中:

$$Q_\varepsilon(x)=\begin{cases} s_1, & x\in B_{r_1}(0),\\ s_2, & x\in B_{r_2}(\frac{x_2}{\varepsilon}),\\ -1, & \text{其它}.\end{cases}$$

由引理 1 的证明过程不难发现约束极小问题

$$J_\varepsilon = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + \varepsilon^p|u|^p)\,dx \,\middle|\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} Q_\varepsilon(x)|u|^q\,dx = 1\right\}$$

存在正的达到函数 $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. 令 $\varphi_\varepsilon = J_\varepsilon^{\frac{1}{q-p}} u_\varepsilon$, 则由椭圆方程的正则性理论和强最大值原理可知 φ_ε 是方程 (8) 的正基态解.

类似地, 约束极小问题

$$J_0 = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx \,\middle|\, u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} K_2(x)|u|^q\,dx = 1\right\}.$$

存在正达到函数 $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 且 $\varphi_0 = J_\varepsilon^{\frac{1}{q-p}} u_0$ 是极限方程

$$-\Delta_p \varphi = K_2(x)|\varphi|^{q-2}\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{9}$$

的正基态解, 其中:

$$K_2(x) = \begin{cases} s_2, & x \in B_{r_2}(0), \\ -1, & \text{其它}. \end{cases}$$

首先，我们证明下述引理.

引理 3 $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon \le J_0$.

证明.不难证明 J_0 存在正达到函数 $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_2(x) u_0^p\,dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p\,dx = J_0.$$

设光滑的截断函数 $\chi(x)$满足

$$0 \le \chi(x) \le 1, \quad \chi(x) = 1, x \in B_1(0), \quad \chi(x) = 0, x \in B_2^c(0).$$

令

$$w_n(x) = c_n \chi_n u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

其中:

$$\chi_n(x) = \chi\Big(\frac{x}{n}\Big), \quad c_n = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} K_2(x)\chi_n^q(x) u_0^q(x)\,dx\Big)^{-\frac{1}{q}}.$$

当 $Q_\varepsilon(x+\frac{x_2}{\varepsilon}) = s_1$ 时, $\left|x+\frac{x_2}{\varepsilon}\right| < r_1$. 则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 对 $\forall n < \frac{1}{2}\Big(\frac{|x_2|}{\varepsilon} - r_1\Big)$, 有

$$\left|\frac{x}{n}\right| > 2\left|\frac{x}{\frac{|x_2|}{\varepsilon} - r_1}\right| > 2\left|\frac{x}{\frac{|x_2|}{\varepsilon} - |x + \frac{x_2}{\varepsilon}|}\right| \ge 2\frac{|x|}{|x|} = 2.$$

此时 $\chi_n(x)=0$. 因此, 由 $Q_\varepsilon(x)$ 和 $K_2(x)$ 的定义得

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q_\varepsilon(x) w_n^q\Big(x-\frac{x_2}{\varepsilon}\Big)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N} Q_\varepsilon\Big(x+\frac{x_2}{\varepsilon}\Big) w_n^q\,dx=\int_{\mathbb{R}^N} K_2(x) w_n^q\,dx=1.$$

所以，由 J_ε 的定义得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon \le \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\big[|\nabla w_n(\cdot-x_2/\varepsilon)|^p+\varepsilon^p w_n^p(\cdot-x_2/\varepsilon)\big]\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^p\,dx.$$

显然, 当 $n\to\infty$ 时, $c_n\to 1$ 且$\chi_n u_0\to u_0$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 则 $w_n(x)\to u_0$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. 因此, 当 $n\to\infty$ 时, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon\le J_0$. 证毕. □

回顾

$$K_1(x)=\begin{cases} s_1, & x\in B_{r_1}(0),\\ -1, & \text{其它}, \end{cases}\qquad K_2(x)=\begin{cases} s_2, & x\in B_{r_2}(0),\\ -1, & \text{其它}, \end{cases}$$

定义

$$K_3(x)=\frac{s_2}{s_1}K_1\Big(\frac{r_1}{r_2}x\Big)=\begin{cases} s_2, & x\in B_{r_2}(0),\\ -\dfrac{s_2}{s_1}, & \text{其它}. \end{cases}$$

记

$$\beta=\Big(\frac{r_1}{r_2}\Big)^{\frac{qp}{q-p}-N}\Big(\frac{s_1}{s_2}\Big)^{\frac{p}{q-p}}.$$

我们假设

$$s_1=s_2,\beta<1,\ \text{或者}\ s_1<s_2,\beta\le 1.$$

注 3 假设 $s_1\le s_2$. 由 K_2 和 K_3 的定义, 当 $x\in B_{r_2}(0)$ 时,$K_3(x)=K_2(x)=s_2$; 当 $x\notin B_{r_2}(0)$ 时, $K_3(x)<-1=K_2(x)$. 因此, $K_3\le K_2$.

令 $u_\varepsilon\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是 J_ε 的正达到函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p|u_\varepsilon|^p)\,dx=J_\varepsilon,\quad \int_{\mathbb{R}^N}Q(x)u_\varepsilon^q\,dx=1.$$

由引理 3 可得, $\{u_\varepsilon\}$ 在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 下面证明当 $\varepsilon>0$ 充分小时, u_ε 在 $\frac{x_2}{\varepsilon}$ 处集中.

引理 4 我们有

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}u_\varepsilon^q\,dx>0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_1}(0)}u_\varepsilon^q\,dx=0.$$

证明. 情形 1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_1}(0)}u_\varepsilon^q\,dx=\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}u_\varepsilon^q\,dx=0.$$

事实上, 由 $s_1>0$, $s_2>0$, 和

$$s_1\int_{B_{r_1}(0)}u_\varepsilon^q\,dx+s_2\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}u_\varepsilon^q\,dx\geq 1$$

知, **情形 1** 不成立.

情形 2.

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_1}(0)}u_\varepsilon^q\,dx>0,\quad \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}u_\varepsilon^q\,dx>0.$$

令

$$\varphi_{1,\varepsilon}=\left(\frac{r_1^p s_1}{r_2^p s_2}\right)^{\frac{1}{q-p}}u_\varepsilon\left(\frac{r_1}{r_2}x\right),\quad \varphi_{2,\varepsilon}(x)=u_\varepsilon\left(x+\frac{x_2}{\varepsilon}\right), \tag{10}$$

则

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_2}(0)}\beta^{-1}\left(\frac{s_2}{s_1}\right)\varphi_{1,\varepsilon}^q\,dx>0,\quad \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_2}(0)}\varphi_{2,\varepsilon}^q\,dx>0.$$

由于 $\varphi_{1,\varepsilon}$ 和 $\varphi_{2,\varepsilon}$ 在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界, 则在子列的意义下, 当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\varphi_{i,\varepsilon}\rightharpoonup\varphi_{i,0}\text{ 于 }D^{1,p}(\mathbb{R}^N),\quad \varphi_{i,\varepsilon}\to\varphi_{i,0}\text{ 于 }L^q_{loc}(\mathbb{R}^N),\quad \varphi_{i,\varepsilon}\to\varphi_{i,0}\ \text{ a.e. 于 }\mathbb{R}^N,\quad i=1,2.$$

对于 $i=1,2$, 由 $\varphi_{i,\varepsilon}>0$ 得, $\varphi_{i,0}\geq 0$. 进一步, $\varphi_{i,0}\not\equiv 0$, $i=1,2$. 当 $\varepsilon>0$ 充分小时, 对 $\forall R<\frac{|x_2|}{2\varepsilon}$, 我们有$B_R(\frac{x_2}{\varepsilon})\cap B_R(0)=\emptyset$. 注意到

$$Q_\varepsilon^-(x)=K_1^-(x),Q_\varepsilon^-(x+\frac{x_2}{\varepsilon})=K_2^-(x),\quad \forall x\in B_R(0),$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{r_1}(0)}Q_\varepsilon^+u_\varepsilon^q\,dx+\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}Q_\varepsilon^+u_\varepsilon^q\,dx\\
&\geq 1+\int_{B_R(0)}Q_\varepsilon^-u_\varepsilon^q\,dx+\int_{B_R\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}Q_\varepsilon^-u_\varepsilon^q\,dx\\
&=1+\int_{B_{\frac{Rr_2}{r_1}}(0)}\beta^{-1}\left(\frac{s_2}{s_1}\right)K_1^-\left(\frac{r_1}{r_2}x\right)\varphi_{1,\varepsilon}^q\,dx+\int_{B_R(0)}K_2^-\varphi_{2,\varepsilon}^q\,dx\\
&=1+\int_{B_{\frac{Rr_2}{r_1}}(0)}\beta^{-1}K_3^-\varphi_{1,\varepsilon}^q\,dx+\int_{B_R(0)}K_2^-\varphi_{2,\varepsilon}^q\,dx\\
&=1+\int_{B_{\frac{Rr_2}{r_1}}(0)}\beta^{-1}K_3^-\varphi_{1,0}^q\,dx+\int_{B_R(0)}K_2^-\varphi_{2,0}^q\,dx+o(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_1}(0)}Q_\varepsilon^+u_\varepsilon^q\,dx+\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}Q_\varepsilon^+u_\varepsilon^q\,dx&=\int_{B_{r_2}(0)}\left[\beta^{-1}K_3^+\varphi_{1,\varepsilon}^q+K_2^+\varphi_{2,\varepsilon}^q\right]\,dx\\
&=\int_{B_{r_2}(0)}\left[\beta^{-1}K_3^+\varphi_{1,0}^q+K_2^+\varphi_{2,0}^q\right]\,dx+o(1).
\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$, 我们有

$$\int_{B_{r_2}(0)}\left(\beta^{-1}K_3^+\varphi_{1,0}^q+K_2^+\varphi_{2,0}^q\right)\,dx\geq 1+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\beta^{-1}K_3^-\varphi_{1,0}^q+K_2^-\varphi_{2,0}^q\right)\,dx.$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{2,0}^q\,dx\geq 1.$$

下面分三种情况讨论:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\geq 1,\quad \int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{2,0}^q\,dx\leq 0; \tag{11}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\leq 0,\quad \int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{2,0}^q\,dx\geq 1; \tag{12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx> 0,\quad \int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{2,0}^q\,dx> 0. \tag{13}$$

假设 (11) 成立. 由引理 3 得

$$\begin{aligned}
J_0&\geq\limsup_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon\\
&=\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p|u_\varepsilon|^p)\,dx\\
&\geq\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B_R(0)}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p|u_\varepsilon|^p)\,dx+\int_{B_R\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p|u_\varepsilon|^p)\,dx\right)\\
&\geq\int_{B_{\frac{Rr_2}{r_1}}(0)}\beta^{-1}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx+\int_{B_R(0)}|\nabla\varphi_{2,0}|^p\,dx.
\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$, 由 $\beta\leq 1$ 和注 3得

$$\begin{aligned}
J_0&>\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx\geq\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}}\\
&=\frac{\beta^{\frac{p}{q}-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}}\\
&\geq\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}}\geq J_0.
\end{aligned}$$

矛盾.

假设 (12) 成立. 类似于 (11) 的讨论, 我们有

$$\begin{aligned} J_0 &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p|u_\varepsilon|^p)\,dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{2,0}|^p\,dx \\ &> \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{2,0}|^p\,dx \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{2,0}|^p\,dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{2,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}} \geq J_0. \end{aligned}$$

矛盾.

假设 (13) 成立. 由注 3, $\beta \leq 1$, 和 J_0 的定义得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx &\geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \\ &\geq J_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

因此, 类似于 (11) 的讨论, 我们有

$$\begin{aligned} J_0 &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon|^p+\varepsilon^p|u_\varepsilon|^p)\,dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}|\nabla\varphi_{1,0}|^p\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_{2,0}|^p\,dx \\ &\geq J_0\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{-1}K_3\varphi_{1,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}+\left(\int_{\mathbb{R}^N}K_2\varphi_{2,0}^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}\right] > J_0. \end{aligned}$$

矛盾.

因此, 通过排除 (11), (12), 和 (13), **情形 2** 不成立.

情形 3

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_1}(0)}u_\varepsilon^q\,dx>0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)}u_\varepsilon^q\,dx=0.$$

由 (10) 不难得到 $\varphi_{1,\varepsilon}$ 满足

$$-\Delta_p\varphi+r_1^p r_2^{-p}\varepsilon^p|\varphi|^{p-2}\varphi=J_\varepsilon s_1^{-1}s_2Q_\varepsilon(r_2^{-1}r_1x)|\varphi|^{q-2}\varphi,\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 则 $\varphi_{1,0}\in D^{1,P}(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$-\Delta_p\varphi=J^1K_3(x)|\varphi|^{q-2}\varphi,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中：

$$J^1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{1,0}|^p dx > 0.$$

由椭圆方程正则性理论和强极值原理得 $\varphi_{1,0} > 0$.

注意在 $B_R(0)$ 上, $Q_\varepsilon^- = \frac{s_1}{s_2} K_3^-$ 且对 $R < \frac{1}{2}\left(\frac{|x_2|}{\varepsilon} - r_2\right)$,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_2}(0)} \beta^{-1} K_3^+ \varphi_{1,0}^q \, dx + o(1) &= \int_{B_{r_1}(0)} Q_\varepsilon^+ u_\varepsilon^q \, dx + \int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)} Q_\varepsilon^+ u_\varepsilon^q \, dx \\
&\geq 1 + \int_{B_R(0)} Q_\varepsilon^- u_\varepsilon^q \, dx \\
&= 1 + \int_{B_{\frac{Rr_2}{r_1}}(0)} \beta^{-1} K_3^- \varphi_{1,0}^q \, dx + o(1).
\end{aligned}$$

令 $R \to \infty$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-1} K_3 \varphi_{1,0}^q \, dx \geq 1.$$

因此, 由引理 3 得

$$\begin{aligned}
J_0 &\geq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_\varepsilon|^p + \varepsilon^p |u_\varepsilon|^p) \, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-1} |\nabla \varphi_{1,0}|^p \, dx \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-1} |\nabla \varphi_{1,0}|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-1} K_3 \varphi_{1,0}^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \\
&= \beta^{\left(\frac{p}{q}-1\right)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{1,0}|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} K_3 \varphi_{1,0}^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \\
&> \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{1,0}|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} K_2 \varphi_{1,0}^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \geq J_0.
\end{aligned}$$

矛盾. 因此, **情形 3**不成立.

通过排除**情形 1, 2, 3**, 我们得到

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)} u_\varepsilon^q \, dx > 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_{r_1}(0)} u_\varepsilon^q \, dx = 0.$$

证毕. □

接下来，我们证明下面命题.

命题 2 $\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon = J_0$.

证明. 由引理 4得

$$s_2 \int_{B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)} u_\varepsilon^q\, dx = 1 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \left(B_{r_1}(0) \cup B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right)} u_\varepsilon^q\, dx - s_1 \int_{B_{r_1}(0)} u_\varepsilon^q\, dx$$
$$= 1 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r_2}\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)} u_\varepsilon^q\, dx + o(1).$$

由 (10) 得

$$\int_{B_{r_2}(0)} K_2^+ \varphi_{2,\varepsilon}^q\, dx = 1 + \int_{\mathbb{R}^N} K_2^- \varphi_{2,\varepsilon}^q\, dx + o(1).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由局部 Sobolev 紧嵌入定理和 Fatou 引理得

$$\int_{B_{r_2}(0)} K_2^+ \varphi_{2,0}^q\, dx \geq 1 + \int_{\mathbb{R}^N} K_2^- \varphi_{2,0}^q\, dx, \quad .$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_2 \varphi_{2,0}^q\, dx \geq 1.$$

由范数的弱下半连续性, 引理 3, 和 J_0 的定义得

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{2,0}|^p\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} K_2 \varphi_{2,0}^q\, dx\right)^{\frac{p}{q}}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{2,0}|^p\, dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon \leq J_0 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{2,0}|^p\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} K_2 \varphi_{2,0}^q\, dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

因此, J_0 在 $\varphi_{2,0}$ 处可达, 且 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon = J_0$. 证毕. □

最后，我们完成定理 2 的证明.

定理 2 的证明. 注意到方程 (8) 存在正基态解, 则通过变量替换不难证明 ($\mathcal{E}_n$) 存在正基态解. 因此, (i) 成立.

设 $u_n > 0$ 为 ($\mathcal{E}_n$) 的基态解, 则 $\varphi_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n^{\frac{p}{q-p}} u_n(\varepsilon_n x)$ 为方程 (8) 的正基态解. 因此, 存在 J_ε 的达到函数 $u_{\varepsilon_n} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得 $\varphi_{\varepsilon_n} = J_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{q-p}} u_{\varepsilon_n}$. 注意到

$$\varphi_{2,\varepsilon_n} = J_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{q-p}} \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot + x_2/\varepsilon_n),$$

且由命题 2 的证明得

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \varepsilon_n^p \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{2,\varepsilon_n}|^p dx = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{2,\varepsilon_n}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{2,0}|^p\, dx,$$
$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{2,\varepsilon_n}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{2,0}|^p dx,$$

其中: $\varphi_{2,0}$ 为 J_0 的正达到函数. 因此, 当 $\varepsilon_n \to 0$ 时, $\varphi_{2,\varepsilon_n} \to \varphi_{2,0}$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$. 所以由命题 2 得, $\varphi_{\varepsilon_n} \to J_0^{-\frac{1}{q-p}} \varphi_{2,0}$ 于 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. 故 (ii) 成立.

令 $\varepsilon_n \to 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 我们有

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(x_2)} |u_n|^q\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q\,dx} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{\delta}{\varepsilon_n}}(0)} |\varphi_{2,\varepsilon_n}|^q\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{2,\varepsilon_n}|^q\,dx} \le s_2^q \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{\delta}{\varepsilon_n}}(0)} u_{\varepsilon_n}^q\,dx \to 0,$$

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(x_2)} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p)\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p)\,dx} = J_{\varepsilon_n}^{-1} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{\delta}{\varepsilon_n}}(0)} (|\nabla \varphi_{2,\varepsilon_n}|^p + \varepsilon_n^p |\varphi_{2,\varepsilon_n}|^p)\,dx \to 0.$$

因此, (iii) 成立. 证毕. □

基金项目

国家自然科学基金青年项目(11901531); 国家留学基金委地方合作项目(202008330417); 浙江省自然科学基金重点项目(LZ22A010001).

参考文献

[1] Bonanno, G. and Livrea, R. (2003) Multiplicity Theorems for the Dirichlet Problem Involving the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* , **54**, 1-7. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(03)00027-0

[2] Ferrero, A. and Gazzola, F. (2003) On Subcriticality Assumptions for the Existence of Ground States of Quasilinear Elliptic Equations. *Advances in Differential Equations*, **8**, 1081-1106. https://doi.org/10.57262/ade/1355926580

[3] Liu, S. (2010) On Ground States of Superlinear p-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **361**, 48-58. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.09.016

[4] Costa, D.G. and Magalhães, C.A. (1995) Existence Results for Perturbations of the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **24**, 409-418. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)E0046-J

[5] Buryak, A.V., Trapani, P.D., Skryabin, D.V. and Trillo, S. (2002) Optical Solitons Due to Quadratic Nonlinearities: From Basic Physics to Futuristic Applications. *Physics Reports*, **370**, 63-235. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00196-5

[6] Afrouzi, G.A., Mahdavi, S. and Naghizadeh, Z. (2007) The Nehari Manifold for p-Laplacian Equation with Dirichlet Boundary Condition. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **12**, 143-155.

[7] Binding, P.A., Drábek, P. and Huang, Y. (1997) On Neumann Boundary Value Problems for Some Quasilinear Elliptic Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **1997**, 1-11.

[8] Wu, T. (2007) Multiplicity of Positive Solution of p-Laplacian Problems with Sign-Changing Weight Function. *International Journal of Mathematical Analysis*, **1**, 557-563.

[9] Zhong, X. and Zou, W. (2014) A Concentration Behavior for Semilinear Elliptic Systems with Indefinite Weight. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **30**, 2014-2026. https://doi.org/10.1007/s10114-014-3509-5

[10] Ackermann, N. and Szulkin, A. (2013) A Concentration Phenomenon for Semilinear Elliptic Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **207**, 1075-1089. https://doi.org/10.1007/s00205-012-0589-1

[11] Fang, X. and Wang, Z. (2020) Limiting Profile of Solutions for Schrödinger Equations with Shrinking Self-Focusing Core. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, Article No. 129. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01799-1