Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 644-648
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133069

一维完全非线性波动方程的一个注记

薛欣欣，查冬兵

东华大学理学院数学系，上海

收稿日期：2023年2月22日；录用日期：2023年3月23日；发布日期：2023年3月30日

摘 要

本文研究满足零条件的一维完全非线性波动方程的 Cauchy 问题，通过将一维完全非线性波动方程化为一维拟线性波动方程组，利用拟线性情形的结论，我们证明了小初值经典解的整体存在性。

关键词

一维完全非线性波动方程，Cauchy 问题，零条件，小初值，整体存在性

A Note on One-Dimension Fully Nonlinear Wave Equations

Xinxin Xue, Dongbing Zha

Department of Mathematics, College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Feb. 22^{nd}, 2023; accepted: Mar. 23^{rd}, 2023; published: Mar. 30^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we study the Cauchy problem of one-dimension fully nonlinear wave equations with null condition, by transforming the one-dimension fully nonlinear wave equation to a system of one-dimension quasilinear wave equations, and using the result

文章引用: 薛欣欣, 查冬兵. 一维完全非线性波动方程的一个注记[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 644-648.
DOI: 10.12677/pm.2023.133069

in the quasilinear case, we show the global existence of classical solution with small initial data.

Keywords

One-Dimension Fully Nonlinear Wave Equations, Cauchy Problem, Null Condition, Small Initial Data, Global Existence

1. 引言

记 $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 为笛卡尔坐标，且定义

$$\xi=\frac{t+x}{2},\qquad \eta=\frac{t-x}{2}, \tag{1.1}$$

以及相应的向量场(特征导数)

$$\partial_\xi=\partial_t+\partial_x,\qquad \partial_\eta=\partial_t-\partial_x. \tag{1.2}$$

一维齐次线性波动方程在 (ξ,η) 坐标下可写为 $u_{\xi\eta}=0$。本文将处理其完全非线性扰动。考察如下的完全非线性波动方程

$$u_{\xi\eta}=F(u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\eta\eta},u_{\xi\eta}), \tag{1.3}$$

这里未知函数 $u=u(t,x):\mathbb{R}^{1+1}\longrightarrow\mathbb{R}$。记 $\lambda=(\lambda_i)_{1\le i\le 6}$. 假设在 $\lambda=0$ 的一个邻域中，非线性项充分光滑且满足

$$F(\lambda)=\mathscr{O}(|\lambda|^2). \tag{1.4}$$

我们称方程 (1.3) 满足零条件，若任何(小的)左行波解 $u=\phi(\xi)$ 以及右行波解 $u=\psi(\eta)$ 都满足 (1.3)。见 [1–4]以及 [5]。即在 $\lambda=0$ 的一个邻域中，成立

$$F(\lambda_1,\lambda_2,0,\lambda_4,0,0)=0, \tag{1.5}$$

$$F(\lambda_1,0,\lambda_3,0,\lambda_5,0)=0. \tag{1.6}$$

根据 (1.4)，(1.5) 以及 (1.6)，由微积分基本定理、链式法则以及 Leibniz 法则易知在 $\lambda=0$ 的一个

邻域中成立

$$F(\lambda)=\mathscr{O}\big((|\lambda_2|+|\lambda_4|+|\lambda_6|)(|\lambda_3|+|\lambda_5|+|\lambda_6|)\big), \tag{1.7}$$

$$F_{\lambda_1}(\lambda),F_{\lambda_2}(\lambda),F_{\lambda_4}(\lambda)=\mathscr{O}(|\lambda_3|+|\lambda_5|+|\lambda_6|), \tag{1.8}$$

$$F_{\lambda_1}(\lambda),F_{\lambda_3}(\lambda),F_{\lambda_5}(\lambda)=\mathscr{O}(|\lambda_2|+|\lambda_4|+|\lambda_6|) \tag{1.9}$$

以及

$$F_{\lambda_6}(\lambda)=\mathscr{O}(|\lambda|). \tag{1.10}$$

考察 (1.3) 具初值

$$t=0:\ u=\varepsilon u_0,\ \ u_t=\varepsilon u_1 \tag{1.11}$$

的 Cauchy 问题，其中 u_0 以及 u_1 是充分光滑的紧支集光滑函数，$\varepsilon>0$ 是一个小参数。

对于 Cauchy 问题 (1.3)–(1.11)，在半线性的情形，在一个较强的零条件假设下， [6] 给出了经典解的整体存在性， [5] 在零条件的假设下给出了经典解的整体存在性；拟线性的情形则在 [7] 中给出了证明。相关的文献亦见 [8] 和 [9]. 本文的目标是处理最一般的完全非线性的情形。

本文的主要结果是如下的

定理1.1. *若零条件满足且 $\varepsilon>0$ 充分小，则 Cauchy 问题 (1.3)–(1.11) 存在唯一的整体经典解。*

在下节中，我们将给出定理 1.1 的证明。

2. 定理 1.1 的证明

我们证明定理 1.1 的第一步是通过求导将完全非线性波动方程 (1.3) 化为一个拟线性波动方程组。该方法源于 [10]。在本文中，区别于 [10] 中使用的时空导数，我们将使用特征导数。第二步是验证归结到的拟线性波动方程组满足零条件，从而可以利用 [7] 中整体存在性的结论。

首先，由 (1.3) 可得

$$u_{\xi\xi\eta}=F_{\lambda_1}u_\xi+F_{\lambda_2}u_{\xi\xi}+F_{\lambda_3}u_{\xi\eta}+F_{\lambda_4}u_{\xi\xi\xi}+F_{\lambda_5}u_{\xi\eta\eta}+F_{\lambda_6}u_{\xi\xi\eta}, \tag{2.1}$$

$$u_{\eta\xi\eta}=F_{\lambda_1}u_\eta+F_{\lambda_2}u_{\xi\eta}+F_{\lambda_3}u_{\eta\eta}+F_{\lambda_4}u_{\xi\xi\eta}+F_{\lambda_5}u_{\eta\eta\eta}+F_{\lambda_6}u_{\xi\eta\eta}, \tag{2.2}$$

这里我们简记 $F_{\lambda_i}=F_{\lambda_i}(u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\eta\eta},u_{\xi\eta})$, $i=1,\cdots,6$。

令 $U=(U^{(1)},U^{(2)},U^{(3)})^T=(u,u_\xi,u_\eta)^T$。由 (1.3)，(2.1) 以及 (2.2) 可得

$$U_{\xi\eta}=A_1(U,U_\xi,U_\eta)U_{\xi\eta}+A_2(U,U_\xi,U_\eta)U_{\xi\xi}+A_3(U,U_\xi,U_\eta)U_{\eta\eta}+G(U,U_\xi,U_\eta), \tag{2.3}$$

这里矩阵值函数 $A_i:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^{3\times3}$, $i=1,2,3,$

$$A_1=\operatorname{diag}\big[0,F_{\lambda_6},F_{\lambda_6}\big],\ A_2=\operatorname{diag}\big[0,F_{\lambda_4},F_{\lambda_4}\big],\ A_3=\operatorname{diag}\big[0,F_{\lambda_5},F_{\lambda_5}\big], \tag{2.4}$$

向量值函数 $G:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}G&=\big(F,F_{\lambda_1}u_\xi+F_{\lambda_2}u_{\xi\xi}+F_{\lambda_3}u_{\xi\eta},F_{\lambda_1}u_\eta+F_{\lambda_2}u_{\xi\eta}+F_{\lambda_3}u_{\eta\eta}\big)\\&=\big(F,F_{\lambda_1}U_\xi^{(1)}+F_{\lambda_2}U_\xi^{(2)}+F_{\lambda_3}U_\eta^{(2)},F_{\lambda_1}U_\eta^{(1)}+F_{\lambda_2}U_\xi^{(3)}+F_{\lambda_3}U_\eta^{(3)}\big).\end{aligned}\tag{2.5}$$

由 (1.7)，(1.8)，(1.9)，(1.10)，(2.4) 以及 (2.5) 可得

$$A_1(U,U_\xi,U_\eta)=\mathscr{O}(|U|+|U_\xi|+|U_\eta|),\tag{2.6}$$

$$A_2(U,U_\xi,U_\eta)=\mathscr{O}(|U_\eta|),\tag{2.7}$$

$$A_3(U,U_\xi,U_\eta)=\mathscr{O}(|U_\xi|),\tag{2.8}$$

$$G(U,U_\xi,U_\eta)=\mathscr{O}(|U_\xi||U_\eta|).\tag{2.9}$$

我们指出 (2.6)–(2.9) 恰是拟线性情形的零条件。

现在我们已将完全非线性波动方程 (1.3) 化为拟线性波动方程组 (2.3)，其系数 $A_i(i=1,2,3)$ 为对称矩阵且满足结构性条件 (2.6)，(2.7)，(2.8)，(2.9)。对于这种形式的拟线性波动方程组的 Cauchy 问题，其小初值经典解的整体存在性已在 [7] 中证明。因此定理 1.1 得证。

注2.1. 在 (1.3) 中，当未知函数 u 取值于有限维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 时，若对于 $i=4,5,6$, $F_{\lambda_i}:\mathbb{R}^{6n}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的，则定理 1.1 也成立。

致 谢

本文作者得到中央高校基本科研业务费专项资金(Fundamental Research Funds for the Central Universities, No. 2232022D-27) 资助。

参考文献

[1] Alinhac, S. (2001) The Null Condition for Quasilinear Wave Equations in Two Space Dimensions. *Inventiones Mathematicae*, **145**, 597-618. https://doi.org/10.1007/s002220100165

[2] Christodoulou, D. (1986) Global Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations for Small Initial Data. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **39**, 267-282. https://doi.org/10.1002/cpa.3160390205

[3] Klainerman, S. (1984) Long Time Behaviour of Solutions to Nonlinear Wave Equations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw, 1209-1215.

[4] Klainerman, S. (1986) The Null Condition and Global Existence to Nonlinear Wave Equations. In: *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 293-326.

[5] Luli, G.K., Yang, S. and Yu, P. (2018) On One-Dimension Semi-Linear Wave Equations with Null Conditions. *Advances in Mathematics*, **329**, 174-188. https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.02.022

[6] Nakamura, M. (2014) Remarks on a Weighted Energy Estimate and Its Application to Nonlinear Wave Equations in One Space Dimension. *Journal of Differential Equations*, **256**, 389-406. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.09.005

[7] Zha, D. (2020) On One-Dimension Quasilinear Wave Equations with Null Conditions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, Article No. 94. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01761-1

[8] Cha, L.D. and Shao, A. (2022) Global Stability of Traveling Waves for (1+1)-Dimensional Systems of Quasilinear Wave Equations. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **19**, 549-586. https://doi.org/10.1142/S0219891622500163

[9] Zha, D. (2022) Global Stability of Solutions to Two-Dimension and One-Dimension Systems of Semilinear Wave Equations. *Journal of Functional Analysis*, **282**, Article ID: 109219. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109219

[10] Dionne, A. (1962) Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés. *Journal d'Analyse Mathématique*, **10**, 1-90. https://doi.org/10.1007/BF02790303