

# 基于理解的“鸡兔同笼”问题思路研究

沙热帕提·艾不都热合甫

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2023年2月21日; 录用日期: 2023年3月22日; 发布日期: 2023年3月30日

## 摘要

本文以“鸡兔同笼”问题为例, 引导学生用“直接画图”和“想象画图”的方式解答“鸡兔同笼”问题, 发现其隐含的“假设”思想, 最终得到解答“鸡兔同笼”问题和其他类似问题的“假设法”。

## 关键词

鸡兔同笼, 假设法

# Research on the Solution to the “Chicken and Rabbit in the Same Cage” Problem Based on Understanding

Sharepati·Aibdurahefu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 21<sup>st</sup>, 2023; accepted: Mar. 22<sup>nd</sup>, 2023; published: Mar. 30<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

This paper takes The Chicken-Rabbit Problem as an example, guides students to use “direct drawing” and “imaginative drawing” to answer the question of The Chicken-Rabbit Problem, discovers its hidden “hypothetical” ideas, and finally obtains the “hypothetical method” to solve The Chicken-Rabbit Problem and other similar problems.

## Keywords

Chickens and Rabbits in the Same Cage, Hypothesis Method

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题提出

“鸡兔同笼”问题是人教版四年级数学下册第九单元“数学广角”中的内容，出自中国古代数学名著《孙子算经》。解答“鸡兔同笼”问题的典型算术方法是“假设法”，诸多教学设计直接开门见山“告诉”学生用“假设法”解答而不分析其缘由[1]，这显然背离“数学需要理解”的基本学习观。显然，数学学习中，“理解”无疑是第一位的[2]。

四年级学生学习“鸡兔同笼”问题之前，已经具备“画图”“看图说话”等直观想象能力和将“图形语言”翻译为“自然语言”等能力。据此“鸡兔同笼”问题的教学理应从学生已有的认知基础出发，加强新旧知识的联系，提供丰富的感性材料[3]，自然而然生长出“假设法”，最终使理解学习得以发生。

## 2. 策略分析

首先通过“直接画图”直观解答“鸡兔同笼”问题，进而过渡到通过借助头脑中的“想象图形”直接列式解答，最后从“直接画图”和“想象画图”自然而然地生长出解答“鸡兔同笼”问题的“假设法”。

## 3. 目标设计

1) 理解并掌握解“鸡兔同笼”问题的“假设法”，能用“假设法”举一反三解类似问题。

2) 通过“直接画图”和“想象画图”自然而然地生长出解答“鸡兔同笼”问题的“假设法”，体会观察、化归、数形结合等数学思想方法的重要作用。

3) 了解“鸡兔同笼”问题，感受古代数学问题的趣味性和解法的巧妙性，体会“鸡兔同笼”问题在生活中的应用，感受学习数学的乐趣。

**重点：**掌握并理解“鸡兔同笼”问题的“假设法”，能用“假设法”解答类似问题。

**难点：**通过“直接画图”和“想象画图”过程，自然而然地生长出解决“鸡兔同笼”问题的“假设法”。

## 4. 过程设计

### 4.1. 问题导入

**问题 1** 1 只鸡有 1 个头，2 只足，1 只兔有 1 个头，4 只足。那么 5 只鸡和 7 只兔一共有多少个头，多少只足？

生 1：可以直接列式计算， $5 + 7 = 12$  个头， $5 \times 2 + 7 \times 4 = 38$  只足。

生 2：我用“○”表示头，用小棒“|”表示足(图 1)，根据图形算出有  $5 + 7 = 12$  个头， $5 \times 2 + 7 \times 4 = 38$  只足。

师：两位同学的算法各有特点，值得点赞！那么大家能够提出一个新的问题吗？

生 3：可把问题反过来，如果已知鸡和兔子共有的头数和足数，反过来求鸡和兔各有几只。例如“鸡兔同笼，一共有 10 个头，32 只足，鸡兔各有几只？”

**问题 2** “有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

师：这是大约在 1500 年前，我国古代数学名著《孙子算经》中记载的一道数学趣题——“鸡兔同笼”问题。即“已知鸡和兔子共有几个头，几只足，求鸡兔各有几只”。除了直接的“鸡兔同笼”问题外，

还有其他的类似应用题本质上也可归结为“鸡兔同笼”问题。这节课我们就来学习“鸡兔同笼”及其类似问题的解法。

**【设计意图】**通过“已知鸡的只数和兔子的只数，求一共有多少个头和足”这个简单问题，自然地引出相反的“鸡兔同笼”问题，同时通过“直接画图”解答此简单问题为后续用“想象画图”列式解答“鸡兔同笼”问题奠定方法基础。因此，在数学教学中，创设有效的教学情境，使枯燥、抽象的知识变得生动、形象，激发学生的探索欲望[4]。



Figure 1. Problem import

图 1. 问题导入

## 4.2. 自主探究，画图尝试

**例 1** 鸡兔同笼，一共有 10 个头，32 只足，鸡兔各有几只？

**教师启发：**请同学们用画图的方法试着求解例 1。

### 1) 先画有 2 只足的鸡

生 1：一共有 10 个头，32 只足，那么可以先画 10 个“○”表示头，再添加 32 只足。

生 2：因为鸡有 2 只足比较简单，所以我们组先全部画有 2 只足的鸡，即在每个“○”下面添加 2 个“|” (图 2)。

生 3：全部画有 2 只足的鸡，总共添加了  $10 \times 2 = 20$  个“|”，还剩余  $32 - 20 = 12$  个“|”需要继续添加。注意到 1 只鸡比 1 只兔少 2 只足，从而在其中  $12 \div 2 = 6$  只鸡的基础上，再添加 2 个“|”画成兔即可(图 3)。看图说话，显然有 6 只兔，4 只鸡。

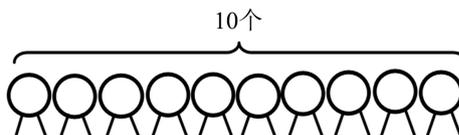


Figure 2. First draw the 10 chickens

图 2. 先画 10 只鸡



Figure 3. Six rabbits and four chickens

图 3. 6 只兔与 4 只鸡

### 2) 先画有 4 只足的兔

生 4：我们组喜欢兔子，所以先全部画有 4 只足的兔，即在每“○”下面添加 4 个“|” (图 4)。

生 5：全部画有 4 只足的兔，总共添加了  $10 \times 4 = 40$  个“|”，多画了  $40 - 32 = 8$  个“|”。注意到 1 只兔比 1 只鸡多 2 只足，从而只需把其中  $8 \div 2 = 4$  只兔擦掉 2 个“|”即可(图 5)。看图说话，同样有 4 只鸡，6 只兔。

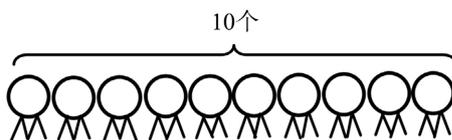


Figure 4. First draw the 10 rabbits

图 4. 先画 10 只兔

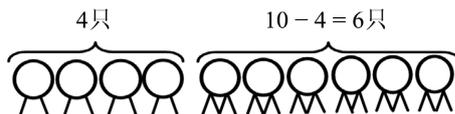


Figure 5. Four chickens and six rabbits

图 5. 4 只鸡与 6 只兔

### 3) 既画 2 只足的鸡，又画 4 只足的兔

生 6: 我们组喜欢鸡也喜欢兔，所以既画了 2 只足的鸡，又画了 4 只足的兔。例如先在 5 个“○”下面添加 2 个“|”，然后在另外 5 个“○”下面添加 4 个“|”，也就是先画了 5 只鸡和 5 只兔(图 6)。

生 7: 这样总共添了  $5 \times 2 + 5 \times 4 = 30$  个“|”，还剩余  $32 - 30 = 2$  个“|”。同样，因为 1 只鸡比 1 只兔少 2 只足，所以这 2 个“|”就是少画的兔的足“|”，从而把其中的 1 只鸡再添加 2 个“|”变成兔(图 7)。看图说话，有  $5 - 1 = 4$  只鸡， $5 + 1 = 6$  只兔。



Figure 6. First draw the 5 chickens and 5 rabbits

图 6. 先画 5 只鸡与 5 只兔

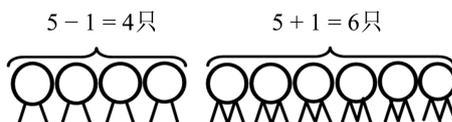


Figure 7. Four chickens and six rabbits

图 7. 4 只鸡与 6 只兔

### 4) 画 3 个“|”的“三脚怪”——既不是鸡也不是兔

生 8: 我们组的想法比较有创意，既没有画兔也没有画鸡，而是画了 3 只足“|”的“三脚怪”——既不是鸡也不是兔，也就是先在每个“○”下面添加 3 个“|”(图 8)。

生 9: 全部画 3 个“|”的“三脚怪”，总共添加了  $10 \times 3 = 30$  个“|”，进而把剩余的 2 个“|”添加给其中两只“三脚怪”，这样就得到 8 只“三脚怪”和 2 只兔(图 9)。

生 10: 调整 8 只“三脚怪”。擦掉“三脚怪”的 1 个“|”使其变成鸡，并将擦掉的 1 个“|”添加到对应的“三脚怪”上，使其变成兔(图 10)。看图说话，发现 8 只“三脚怪”最终恰好调整为 4 只兔和 4 只鸡，从而有 4 只鸡和  $4 + 2 = 6$  只兔(图 11)。

**【设计意图】** 通过用喜闻乐见的四种画图方式(先全部画成鸡、先全部画成兔子、既画鸡也画兔、画 3 个“|”的“三脚怪”)直观解答“鸡兔同笼”问题，可以激发学生探究新知的动机，培养其数形结合意识，更为重要的意图

在于为后续通过“想象画图”列式解答，进而发现“假设法”奠定心理和思维基础。同时通过有创意的“三脚怪”，达到培养学生想象力和创造力的目的。

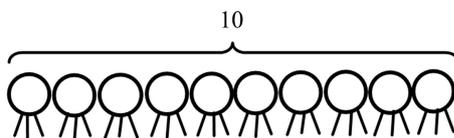


Figure 8. First draw the 10 “The three-legged monsters”

图 8. 先画 10 只“三脚怪”

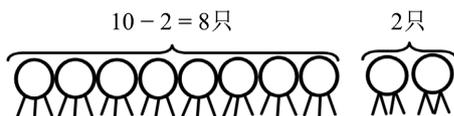


Figure 9. 8 “The three-legged monsters” and four rabbits

图 9. 8 只“三脚怪”与 2 只兔

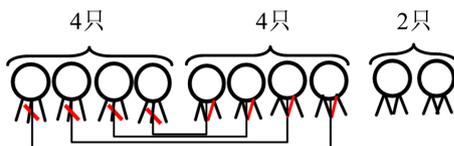


Figure 10. 8 “The three-legged monsters” turn into 4 rabbits and 4 chickens

图 10. 8 只“三脚怪”转为 4 只兔和 4 只鸡

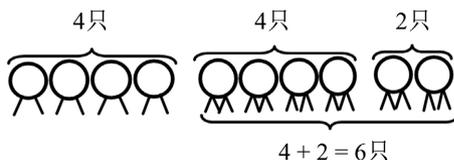


Figure 11. Four chickens and six rabbits

图 11. 4 只鸡与 6 只兔

### 4.3. 想象“画图”，直接列式

例 2 鸡兔同笼，一共有 35 个头，94 只脚，鸡兔各有几只？

教师启发：当鸡和兔子的头与足数比较多时，“直接画图”非常繁琐。同学们可以尝试先在头脑中“想象画图”，然后根据头脑中的“想象图形”列式求解例 2。

#### 1) 想象全都先画成 2 只足的鸡

生 11：我在头脑中想象 35 只全都先画成鸡，总共有  $35 \times 2 = 70$  只足，比 94 只足少了  $94 - 70 = 24$  只足。因为每只鸡比每只兔少  $4 - 2 = 2$  只脚，所以把  $24 \div 2 = 12$  只鸡变成兔，得到兔有 12 只，鸡有  $35 - 12 = 23$  只。

#### 2) 想象全都先画成 4 只足的兔

生 12：我在头脑中想象 35 只全都先画成兔，总共有  $35 \times 4 = 140$  只足，比 94 只足多出了  $140 - 94 = 46$  只足。注意到每只兔比每只鸡多  $4 - 2 = 2$  只足，从而只需把  $46 \div 2 = 23$  只兔变成鸡。同样有 23 只鸡，

$32 - 23 = 12$  只兔。

### 3) 想象既画 2 只足的鸡，又画 4 只足的兔

生 13：我在头脑中想象 35 只先分别画成 20 只鸡和 15 只兔，总共有  $20 \times 2 + 15 \times 4 = 100$  只脚，比 94 知足多了  $100 - 94 = 6$  只足。同样每只兔比每只鸡多  $4 - 2 = 2$  只足，只需把  $6 \div 2 = 3$  只兔变成鸡，就得到  $15 - 3 = 12$  只兔，鸡则为  $20 + 3 = 23$  只。

### 4) 想象全都先画成 3 个“|”的“三脚怪”——既不是鸡也不是兔

生 14：我在头脑中想象 35 只全都先画成 3 个“|”的“三脚怪”，总共有  $35 \times 3 = 105$  只足，比 94 只足多了  $105 - 94 = 11$  只足。因为每只“三脚怪”比每只鸡多  $3 - 2 = 1$  只足，所以把  $11 \div 1 = 11$  只“三脚怪”变成鸡，就得到  $35 - 11 = 24$  只“三脚怪”和 11 只鸡。

生 15：调整 24 只“三脚怪”。去掉“三脚怪”的 1 个“|”使其变成鸡，并将去掉的 1 个“|”添加到对应的“三脚怪”上，使其变成兔。24 只“三脚怪”最终恰好调整为 12 只兔和 12 只鸡，从而有 12 只兔和  $12 + 11 = 23$  只鸡。

**【设计意图】**从比较繁琐的“直接画图”到依据头脑中的“想象图形”列式解答“鸡兔同笼”问题，培养学生“以形助数”的数学思想方法，实现形象思维向半抽象思维的过渡，并为后续用“假设法”求解“鸡兔同笼”问题奠定思维基础。因此，数学教学的本质是推动数学思维的发展，在数学课堂中“让学生学会数学地思考”[5]。

## 4.4. 解答“鸡兔同笼”问题的“假设法”

### 1) 假设全都是鸡或者全部都是兔

**教师启发：**我们前面用“直接画图”法解答“鸡兔同笼”问题时，先在每个“○”下面添加 2 个“|”，或者想象全都先画成 2 只足的鸡，实际隐含着“所有的头都是鸡的头”，也就是在心里已经假设笼子里装的都是 2 个“|”的鸡。

这样，我们就可以把“直接画图”或“想象画图”过程中隐含的“假设”思想直接显性化，直接用“假设法”解答“鸡兔同笼”问题。

假设 35 只全为鸡，则共有足  $35 \times 2 = 70$  只，而已知足 94 只，少了  $94 - 70 = 24$  只，因为每只鸡比每只兔少 2 只足，于是兔有  $24 \div 2 = 12$  只，鸡有  $35 - 12 = 23$  只。根据运算过程可列出：兔数 = (总足数 - 鸡足数 × 总头数) ÷ (兔足数 - 鸡足数)。

对先在每个“○”下面添加 4 个“|”的情形，实际就是假设 35 只全为兔，请大家课后完成具体解答过程。

### 2) 假设既有鸡也有兔

生 18：如果先在每个“○”下面既添加 2 个“|”又添加 4 个“|”，或者想象既画 2 只足的鸡又画 4 只足的兔，实际隐含着“所有的头既有鸡的头又有兔子的头”，也就是假设笼子里装的既有鸡也有兔。因此我们就可以把“直接画图”或“想象画图”过程中隐含的“假设”思想直接显性化，直接用“假设法”解答“鸡兔同笼”问题。

生 19：我把 35 只分别假设为 20 只鸡和 15 只兔，总共有  $20 \times 2 + 15 \times 4 = 100$  只足，而已知足 94 只，多了  $100 - 94 = 6$  只足。同样每只兔比每只鸡多 2 只足，则有  $6 \div 2 = 3$  只兔各多了 2 只足，那么鸡有  $20 + 3 = 23$  只，兔则为  $15 - 3 = 12$  只。

### 3) 假设全都是 3 个“|”的“三脚怪”——既不是鸡也不是兔

生 20：如果先在每个“○”下面添加 3 个“|”，或者想象全都先画成 3 只足的“三脚怪”，实际隐含着“所有的头都是‘三脚怪’的头”，也就是假设笼子里装的都是 3 个“|”的“三脚怪”。因此

我们就可以把“直接画图”或“想象画图”过程中隐含的“假设”思想直接显性化，直接用“假设法”解答“鸡兔同笼”问题。

生 21：假设 35 只全都是 3 个“|”的“三脚怪”，则共有足  $35 \times 3 = 105$  只足，而已知足 94 只，多了  $105 - 94 = 11$  只足。因为每只“三脚怪”比每只鸡多 1 只足，则  $11 \div 1 = 11$  只“三脚怪”各多了 1 只足，去除这 11 只足使其变成鸡，从而鸡有 11 只。

生 22：调整剩余  $35 - 11 = 24$  只“三脚怪”。去掉“三脚怪”的 1 个“|”使其变成鸡，并将去掉的 1 个“|”添加到对应的“三脚怪”上，使其变成兔。24 只“三脚怪”调整为  $24 \div 2 = 12$  只兔和 12 只鸡，从而有 12 只兔和  $12 + 11 = 23$  只鸡。

**【设计意图】**“直接画图”和“想象画图”的过程实际隐含的就是“假设”思想，从而把隐含的“假设”思想直接显性化，生长出解答“鸡兔同笼”问题的“假设法”，从而使理解学习真正得以发生。

#### 4.5. 学以致用、拓展延伸

**教师启发：**实际上，“假设法”不仅可以求解直接呈现的“鸡兔同笼”问题，其他类似的应用题也可以用“假设法”解答。

**例 3** 小明和妈妈去市场从而买菜，已知白菜 5 元 1 斤，萝卜 8 元 1 斤，总共买了 10 斤白菜和萝卜，花了 62 元，那么白菜和萝卜各买了多少斤？

生 1：假设全部买的是白菜，则总价为： $5 \times 10 = 50$  (元)。

实际支出了 62 元，从而  $62 - 50 = 12$  (元)是把萝卜视为白菜少支出的钱。

已知白菜每斤比萝卜便宜  $8 - 5 = 3$  (元)，所以购买萝卜的斤数为： $12 \div 3 = 4$  (斤)，从而白菜的斤数为： $10 - 4 = 6$  (斤)。

生 2：假设全部买的是萝卜，则总价为： $8 \times 10 = 80$  (元)。

实际支出了 62 元，从而  $80 - 62 = 18$  (元)是购买白菜多支出的钱。

已知萝卜每斤比白菜贵  $8 - 5 = 3$  (元)，所以购买白菜的斤数为： $18 \div 3 = 6$  (斤)，从而萝卜的斤数为： $10 - 6 = 4$  (斤)。

**例 4** 一堆 2 分和 5 分的硬币共 39 枚，总共价值 1.5 元。请问 2 分和 5 分的各有多少枚？

**【设计意图】**通过用“假设法”解答其他类似的应用题，有助于学生理解“鸡兔同笼”问题的本质特征，并培养学生举一反三、触类旁通的迁移能力。

### 5. 结束语

本文引导学生用“直接画图”和“想象画图”的方式解答“鸡兔同笼”问题，发现“直接画图”和“想象画图”过程其实隐含的就是“假设”思想，从而把隐含的“假设”思想直接显性化，最终得到解答“鸡兔同笼”问题和其他类似问题的“假设法”。从而表明任何奇思妙想的解题方法都不应像变魔术般从天而降，其理应从学生已有的认知基础自然而然生长出来。

### 参考文献

- [1] 杨军. 追根溯源——数学中的为什么[M]. 西安: 世界图书出版西安有限公司, 2016: 32-35.
- [2] 马复. 试论数学理解的两种类型——从 R.斯根普的工作谈起[J]. 数学教育学报, 2001(3): 50-53.
- [3] 陈琼, 翁凯庆. 试论数学学习中的理解学习[J]. 数学教育学报, 2003(1): 17-19.
- [4] 李雪梅. 优化设计 凸显价值——例谈小学数学教学情境的创设[J]. 小学教学参考: 数学版, 2018(3): 57-58.
- [5] 薛惠华. 谈小学数学思维培养策略探究——以“鸡兔同笼”为例[J]. 数学学习与研究, 2021(16): 107-108.