Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 375-380
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133041

简单闭凸曲线曲率积分不等式的递推关系

李亚尊*，张永志

云南师范大学，云南 昆明

收稿日期：2023年1月24日；录用日期：2023年2月23日；发布日期：2023年3月2日

摘 要

本文主要研究平面上简单闭凸曲线的曲率积分不等式。利用单位速率外法向流对Green-Osher的结果进行了简化证明，发现了曲率积分不等式高阶和低阶情况的一个递推关系，对以前的结果进行了推广，并且发现了一个特殊的函数。

关键词

单位速率外法向流，曲率积分不等式，简单闭凸曲线

Recurrence Relation of Curvature Integral Inequalities for Simple Closed Convex Curves

Yazun Li*, Yongzhi Zhang

Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jan. 24^{th}, 2023; accepted: Feb. 23^{rd}, 2023; published: Mar. 2^{nd}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 李亚尊, 张永志. 简单闭凸曲线曲率积分不等式的递推关系[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 375-380.
DOI: 10.12677/pm.2023.133041

Abstract

In this paper, we mainly study the curvature integral inequality of simple closed convex curves on the plane. We use the unit-speed outward normal flow to simplify the proof of Green-Osher's results, find a recurrence relationship between the high-order and low-order cases of the curvature integral inequality, generalize the previous results, and find a special function.

Keywords

The Unit-Speed Outward Normal Flow, The Curvature Integral Inequality, Simple Closed Convex Curves

1. 引言及主要结果

命题1.1 (Gage等周不等式 [1])欧氏平面$\mathbf{R}^2$上闭凸曲线γ所围成的区域K的面积A，周长L满足不等式

$$\int_\gamma k^2 ds \geq \frac{\pi L}{A}, \tag{1.1}$$

其中k为γ的曲率，等号成立当且仅当γ为圆。

Gage等周不等式与曲率k有关，k属于域K外蕴不变量，此类几何不等式称为外在型几何不等式。1999年Green和Osher利用Green-Osher不等式对Gage的结果进行了推广得到了一系列新的外在型几何不等式

$$\int_\gamma k^3 ds \geq \frac{\pi L^2 - 2\pi^2 A}{A^2}, \tag{1.2}$$

$$\int_\gamma k^4 ds \geq \frac{\pi L^3 - 3\pi^2 AL}{A^3}. \tag{1.3}$$

2014年马磊和曾春娜利用凸几何分析中支撑函数和单位速率外法向流的方法对以上的几何不等式给出了简化证明 [2]。在此证明之中我们发现了一种特殊的函数，以及发现曲率高阶积分不等式和低阶的积分不等式之间存在递推关系。我们将递推关系推广到了更普遍的情况。曲率k的n阶情况满足便可以利用本文的辅助函数通过单位速率外法向流证明比n低的所有阶数都成立。

定义1.2设C为欧氏平面上的简单闭凸曲线，C作为单位速率外法向流的初始曲线，函数$G_n(t)$为

$$G_n(t)=\int_{S^1}k^n(t)d\theta-\frac{\pi}{2^nA^n(t)}[(L(t)+u(t))^n+(L(t)-u(t))^n],n\in N^+. \tag{1.4}$$

定理1.3函数$G_n(t)$满足以下关系

$$G_n(t)=\frac{(-1)^n}{n!}G_1^{(n)}(t),n\in N^+. \tag{1.5}$$

其中$G_1^{(n)}(t)$表示$G_1(t)$的n阶导数。

定理1.4曲率积分不等式中若k的阶数为n成立时，可得k的阶数小于n的情况都成立。

本文的结构安排

本文分为三个部分，第一部分为引言和主要定理，这部分主要介绍了前人对几何不等式的研究，同时给出了本文的研究目的和结果；第二部分为预备知识，这部分定义支撑函数以后利用支撑函数表达了曲线的曲率，周长，面积等几何量。介绍了单位外法向流各个几何量的演化情况，以及$Green-Osher$不等式的一个应用。第三部分为主要定义的证明，这部分通过构造函数的方法证明得到了函数$G_n(t)$的一个特点，并通过该函数得到了曲率积分不等式之间递推关系。

2. 预备知识

设C为平面上的简单闭凸曲线，任意选取坐标系xOy，p为从原点O到曲线C上一点处切线的定向垂直距离，θ 为从x轴正方向到这条垂直射线的有向角。显然，p是θ的单值函数且以2π为周期，通常称(θ，$p(\theta)$)为曲线C的切线极坐标，$p(\theta)$为C的Minkowski支撑函数。此外，设C的周长为L，围成面积为A，则(参见文献 [3])

$$k=\frac{1}{p+p^{''}}, \tag{2.1}$$

$$L=\oint ds=\int_0^{2\pi}\frac{1}{k}d\theta=\int_0^{2\pi}p+p^{''}d\theta, \tag{2.2}$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p^{'2})d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(p+p^{''})d\theta, \tag{2.3}$$

引理2.1 [4]考虑单位速率外法向流$X(u,t):S^1\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^2$

$$\begin{cases}\frac{\partial X}{\partial t}(u,t)=\mathbb{N}_{out},\\ X(u,0)=C,\end{cases}$$

设其支撑函数为$p(\theta,t)=p(\theta)+t$，周长为$L(t)$，围成面积为$A(t)$，曲率为$k(t)$，则

$$k(t)=\frac{k}{1+tk}, \tag{2.4}$$
$$L(t)=\int_0^{2\pi} p+p^{''}+td\theta=L+2\pi t, \tag{2.5}$$
$$A(t)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p+t)(p+t+p^{''})d\theta=A+tL+\pi t^2, \tag{2.6}$$
$$L^2(t)-4\pi A(t)=L^2-4\pi A, \tag{2.7}$$

因此

$$\frac{dL(t)}{dt}=2\pi,\quad \frac{dA(t)}{dt}=L(t),\quad \frac{dk(t)}{dt}=-k^2(t) \tag{2.8}$$

把凸函数$F(x)=\frac{1}{x^n}$带入Green-Osher不等式，得到下面的引理：

引理2.2 [5]设C为平面上的简单闭凸曲线，周长为L，围成面积为A，曲率为k，如果$n\in N^+$，$u=\sqrt{L^2-4\pi A}$，则

$$\int_{S^1}k^n d\theta\geq\frac{\pi}{2^nA^n}[(L+u)^n+(L-u)^n], \tag{2.9}$$

等号成立时当且仅当C为圆。当$n=1$时，(2.9)就是著名的Gage等周不等式，

$$\int_{S^1}k^2ds\geq\frac{\pi L}{A}.$$

3. 主要定理的证明

定理1.3函数$G_n(t)$满足以下关系

$$G_n(t)=\frac{(-1)^n}{n!}G_1^{(n)}(t),n\in N^+. \tag{3.1}$$

其中$G_1^{(n)}(t)$表示$G_1(t)$的n阶导数。

证 对$G_n(t)$进行求导

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G_n(t)&=\frac{d}{dt}(\int_{S^1}k^n(t)d\theta-\frac{\pi}{2^nA^n(t)}[(L(t)+u(t))^n+(L(t)-u(t))^n]),\\ \frac{d}{dt}G_n(t)&=n\int_{S^1}k^{n-1}\frac{dk(t)}{dt}d\theta-\frac{\pi}{2^n}\frac{n[L(t)+u(t)]^{n-1}\frac{d(L(t)+u(t))}{dt}}{A^n(t)}\\ &\quad-\frac{\pi}{2^n}\frac{n[L(t)-u(t)]^{n-1}\frac{d(L(t)-u(t))}{dt}}{A^n(t)}+\frac{n\frac{dA(t)}{dt}[(L(t)+u(t))^n+[L(t)-u(t)]^n]}{A^{n+1}(t)},\end{aligned}$$

(2.7)带入上式整理得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G_n(t)=&-n\int_{S^1}k^{n+1}d\theta-\frac{\pi}{2^n}\frac{n[L(t)+u(t)]^{n-1}(2\pi+\frac{du(t)}{dt})}{A^n(t)}\\ &+\frac{n[L(t)+2\pi t][(L(t)+u(t))^n+[L(t)-u(t)]^n]}{A^{n+1}(t)},\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{4\pi L(t)-4\pi L(t)}{2\sqrt{L^2(t)-4\pi A(t)}}=0,$$

带入(3.3)得

$$\begin{aligned}\frac{dG_n(t)}{dt}&=-n(\int_{S^1}k^{n+1}(t)d\theta-\frac{\pi}{2^n}\frac{L(t)[L(t)+u(t)]^n+L(t)[L(t)-u(t)]^n}{A^{n+1}(t)}\\&\quad+\frac{\pi}{2^n}\frac{2\pi A(t)[L(t)+u(t)]^{n-1}+2\pi A(t)[L(t)-u(t)]^{n-1}}{A^{n+1}(t)}),\\&=-n(\int_{S^1}k^{n+1}(t)d\theta-\frac{\pi}{2^{n+1}}\frac{[L(t)+u(t)]^{n+1}+[L(t)-u(t)]^{n+1}}{A^{n+1}(t)}),\\&=-nG_{n+1}(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

由(3.3)并对$G_1(t)$求n阶导整理后可得

$$G_n(t)=\frac{(-1)^n}{n!}G_1^{(n)}(t),n\in N^+.$$

定理1.4曲率积分不等式中若k的阶数为n成立时，可得k的阶数小于n时都成立。

证由(3.4)和假设可得

$$\frac{dG_n(t)}{dt}=-nG_{n+1}(t)\leq 0.$$

将(2.4)-(2.6)带入(3.1)得

$$G_n(t)=\int_{S^1}(\frac{k}{1+tk})^n d\theta-\frac{\pi}{2^n}\frac{[L+2\pi t+u_0]^n+[L+2\pi t-u_0]^n}{(A+tL+\pi t^2)^n},$$

此处$u_0=\sqrt{L^2(t)-4\pi A(t)}=\sqrt{L^2-4\pi A}\geq 0$，只与初始曲线选取有关。

$$\lim_{t\to\infty}G_n(t)=0-0=0,$$

因此，对任意的$t\geq 0$，都有$G_n(t)\geq 0$。

特别的，当t=0时，

$$G_n(0)=\int_{S^1}k^n d\theta-\frac{\pi}{2^nA^n}[(L+u)^n+(L-u)^n]\geq 0,$$

即

$$\int_{S^1}k^n d\theta\geq\frac{\pi}{2^nA^n}[(L+u)^n+(L-u)^n],$$

等号成立当且仅当C为圆。

公式的应用，如$n=3$时曲率积分不等式成立，即

$$\int_{S^1} k^3 d\theta \geq \frac{\pi L(L^2-3\pi A)}{A^3}$$

要证明$n=2$时也成立可构造函数

$$G_2(t)=\int_{S^1} k^2(t)d\theta - \frac{\pi[L^2(t)-2\pi A(t)]}{A^2(t)}$$

对$G_2(t)$求导可得

$$\frac{dG_2(t)}{dt}=-2G_3(t)\leq 0$$

又

$$\lim_{t\to\infty} G_2(t)=0$$

可得对任意的$t\geq 0$，都有$G_2(t)\geq 0$，特别的取t=0。有

$$\int_{S^1} k^2 d\theta \geq \frac{\pi[L^2-2\pi A]}{A^2}$$

同理可以证明$n=1$时也成立。

参考文献

[1] Gage, M.E. (1983) An Isoperimetric Inequality with Application to Shortening. *Duke Mathematical Journal*, **50**, 1225-1229. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05052-4

[2] 马磊, 曾春娜. 关于曲率积分不等式得注记[J]. 数学杂志, 2014, 34(5): 925-930.

[3] Gao, L.Y., Pan, S.L. and Tsai, D.-H. (2021) On an Area-Preserving Inverse Curvature Flow of Convex Closed Plane Curve. *Journal of Functional Analysis*, **280**, Article ID: 108931. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.108931

[4] 潘生亮, 唐学远, 汪小玉. Gage等周不等式的加强形式[J]. 数学年刊, 2008, 29A(3): 301-306.

[5] Green, M. and Osher, S. (1999) Steiner Polnomials, Wulff Flow, and Some New Isoperimetric Inequalities for Convex Plane Curves. *The Asian Journal of Mathematics*, **3**, 659-676. https://doi.org/10.4310/AJM.1999.v3.n3.a5