Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 712-715
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133075

从一道例题看积分中值定理的应用

寇冰煜，马凤丽，黄丽芹

陆军工程大学基础部，江苏 南京

收稿日期：2023年2月23日；录用日期：2023年3月24日；发布日期：2023年3月31日

摘 要

积分中值定理是积分学中的最基本理论和性质之一，无论在极限的计算还是积分的计算中都起着至关重要的作用，但是在实际应用中，往往由于对其由来的理解不够全面和深刻而导致用错、算错的情况出现。本文通过一道常见例题的求解来剖析一元函数积分中值定理的应用过程中需要注意和关注的问题。

关键词

积分中值定理，介值定理，拉格朗日中值定理

Application of Mean Value Theorem of Integral from an Example

Bingyu Kou, Fengli Ma, Liqin Huang

Department of Basic Courses, The Army Engineering University of PLA, Nanjing Jiangsu

Received: Feb. 23rd, 2023; accepted: Mar. 24th, 2023; published: Mar. 31st, 2023

Abstract

The mean value theorem of integral is one of the most basic theories and properties in Integral calculus. It plays a vital role in both limit calculation and integral calculation. However, in practical application, it is often misused and miscalculated because the understanding of its origin is not comprehensive and profound. This paper analyzes the problems which need to pay attention in the application of the mean value theorem of integral for the functions of one variable, by the process of solving a common example.

Keywords

The Mean Value Theorem of Integral, Intermediate Value Theorem, Lagrange Mean Value

文章引用: 寇冰煜, 马凤丽, 黄丽芹. 从一道例题看积分中值定理的应用[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 712-715.
DOI: 10.12677/pm.2023.133075

Theorem

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

积分中值定理是积分基本性质之一，在积分的计算和应用中起着至关重要的作用，是微积分学中的重要理论结果和有效工具之一。近年来，关于积分中值定理[1]有很多的推广形式和结果，文献[2]作者对函数条件加以放宽得到推广的积分中值定理，文献[3] [4]作者们从ξ的渐进性方面讨论了积分中值定理的推广，文献[5] [6]作者归纳了积分中值定理及其推广形式的结论并对其通过典型例题和考研试题加以应用。无论是微分中值定理还是积分中值定理，其综合应用性强且广泛，解题思路也非常灵活和多样(见文献[7] [8])。但是，在实践教学中，笔者发现很多题目正是由于对微积分中值定理理解的脱节和使用条件的疏忽而导致错解漏解时有发生。本文首先介绍积分中值定理的内容及其推广形式，再通过一道常见例题的求解来剖析一元函数积分中值定理的应用过程中需要注意和关注的问题。

2. 积分中值定理

在高等数学教材[1]中，积分中值定理表述如下：

定理1 [1] 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一个点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明 由估值定理可知，$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M$，再由闭区间上连续函数的介值定理，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

上述定理中，中值ξ属于闭区间而不是开区间，这一弱化的结论不但与微分中值定理缺乏协调而且限制了使用范围。实际上积分中值定理的中值可以在开区间内取得，即

定理1′[1] 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一个点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(x)$是$[a,b]$上的可微函数，即函数$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间$(a,b)$内可导，且$F'(x)=f(x)$，由拉格朗日中值定理，至少存在一个点$\xi\in(a,b)$使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$$

其中，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，$F(a)=0$，$F'(\xi)=f(\xi)$，从而可得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$。

进一步，我们可以得到如下积分中值定理

定理2 [6] 设$f(x),g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$g(x)$在闭区间$[a,b]$上不变号，则至少存在一个点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上取得最小值 m，最大值 M，即 $m \le f(x) \le M$，又 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不变号，不妨设 $g(x) \ge 0$，则有 $m \le f(x)g(x) \le M$，且 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，

1) 若 $g(x)=0$，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$，结论显然成立。

2) 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$，则 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，即

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$，即证。

定理2′ 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x) \ne 0$，则至少存在一个点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$，$G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，因为 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)$，$G(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $G'(x) = g(x) \ne 0$，故由柯西中值定理，至少存在一个点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

其中，$F'(\xi) = f(\xi)g(\xi)$，$G'(\xi) = g(\xi)$，$G(b) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ 从而可得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

3. 举例与解析

例 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$。

解 由定理1，至少存在一个点 $\xi \in [0,1]$ 使得 $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\xi^n}{1+\xi}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi} = 0$。

事实上，这种解法是错误的，因为当被积函数改变或者积分上下限改变时，定理1中 ξ 的值都有可能改变。即定理1中 ξ 的值依赖于被积函数和积分上下限。随着 n 的改变，被积函数发生改变不再固定，这时 ξ 也依赖于 n 的改变而改变。如果记 $\xi = \xi_n$，则由积分中值定理可知，对于任意的自然数 n，一定存在满足定理1的 $\xi_n \in [0,1]$，但是 ξ_n 的具体大小并不知道，也就是说，当 $n \to \infty$ 时，$\xi = \xi_n$ 是有可能是零的，这样 ξ^n 就有可能是 1^∞，这是未定型的一种，从而就不能确定 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi} = 0$。

正确解法一 利用夹逼准则可以求解，由于 $x \in [0,1]$，故 $0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$，从而

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n} = 0$，故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$。

正确解法二 利用定理2′可以求解，存点 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\xi)(1+n)} = 0$。

4. 结语

对于本文所用例题的类型还有很多，都是不能直接利用定理1的结论进行求解的，例如$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \sin x\mathrm{d}x$等，其错误的本质原因如本文在第二部分所分析，其正确的求解方法也和第二部分例题的求解方法类似。

基金项目

陆军工程大学基础部教育教学课题，陆军工程大学基础学科培育基金重点项目(KYJBJQZL2003)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.
[2] 吴运恢. 关于微分与积分中值定理的推广[J]. 武汉交通管理干部学院学报, 1994, 3(4): 106-109.
[3] 潘杰, 黄有度, PAN, 等. 积分中值定理的推广及其应用(英文) [J]. 大学数学, 2007, 23(4): 144-147.
[4] 杨彩萍, 等. 关于积分中值定理的一个一般性结果[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(4): 698-670.
[5] 王振友, 金朝永, 温洁嫦, 等. 积分中值定理的几个相关应用[J]. 高等数学研究, 2016, 19(4): 77-79.
[6] 俞兰芳. 关于积分中值定理的一些见解[J]. 皖西学院学报, 2006, 22(2): 24-29.
[7] 魏光美. 一道积分极限题的七种解法[J]. 高等数学研究, 2022, 25(6): 41-42.
[8] 刘鑫旺, 沈艳. 一道有关积分中值定理的全国大学生数学竞赛试题的探讨[J]. 大学数学, 2022, 38(16): 96-100.