Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 445-452
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133049

Hans汉斯

涉及高阶导数分担值的正规族

王皓然，杨　祺*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年2月8日；录用日期：2023年3月8日；发布日期：2023年3月16日

摘　要

分析了两类涉及变动分担值以及高阶导数的函数族正规性。应用Pang-Zalcman引理，分别讨论了两个涉及高阶导数的全纯函数f以及亚纯函数g分担值的正规定则，并且将固定分担值推广到了依赖于f与g的分担值，得到了两类新的正规定则。令$\mathfrak{F}$为D上一全纯函数族，a_f, b_f, c_f为3个非零有穷复数，$a_f \neq b_f$，满足：1) $\min\left\{\sigma\left(0,a_f\right),\sigma\left(0,b_f\right),\sigma\left(a_f,b_f\right)\right\} \geq \varepsilon$；2) $\frac{b_f}{a_f},\frac{c_f}{a_f}$相对于$f$独立；若对于任意的$f \in \mathfrak{F}$，$f$的零点重级至少为$k$，且$f(z)=0 \Leftrightarrow f^{(k)}(z)=a_f$，$f^{(k)}(z)=b_f \Rightarrow f(z)=c_f$，则$\mathfrak{F}$在复数域$D$内正规。

关键词

正规族，全纯函数，分担值，亚纯函数

Involving Normal Families of Sharing Values of Higher-Order Derivative

Haoran Wang, Qi Yang*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 8th, 2023; accepted: Mar. 8th, 2023; published: Mar. 16th, 2023

Abstract

Two classes of function family regularity involving higher-order derivative variable sharing values are discussed. Applying the Pang-Zalcman lemma, normality criterions for sharing values of holomorphic functions *f* and meromorphic functions *g* which involving higher-order derivatives are discussed respectively, and the fixed sharing values are generalized to the sharing values which depen-

*通讯作者。

文章引用: 王皓然, 杨祺. 涉及高阶导数分担值的正规族[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 445-452.
DOI: 10.12677/pm.2023.133049

dent on f and g, hence two normality criterion are obtained. Let $\mathfrak{F}$ be a family of holomorphic function in a domain D, for every $f \in \mathfrak{F}$, the zeros of f have multiplicities at least k. a_f, b_f, c_f are three finite non-zero complex numbers and $a_f \neq b_f$. And satisfied 1) $\min\{\sigma(0,a_f),\sigma(0,b_f),\sigma(a_f,b_f)\} \geq \varepsilon$; 2) $\frac{b_f}{a_f},\frac{c_f}{a_f}$ are independent of f; and $f(z)=0 \Leftrightarrow f^{(k)}(z)=a_f$, $f^{(k)}(z)=b_f \Rightarrow f(z)=c_f$. Then $\mathfrak{F}$ is normal in D.

Keywords

Normal Families, Holomprphic Functions, Sharing Value, Meromorphic Functions

1. 引言及主要结果

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个区域，$M(D)$ 是定义在 D 上所有亚纯函数的集合。设 $\{f,g\} \subset M(D)$，$\{f,g\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，若当 $f(z)=a$ 时，有 $g(z)=b$，我们记为

$$f(z)=a \Rightarrow g(z)=b$$

如果 $f(z)=a \Rightarrow g(z)=b$ 且 $g(z)=b \Rightarrow f(z)=a$，我们记为

$$f(z)=a \Leftrightarrow g(z)=b$$

当 $a=b$ 时，我们称 f，g 在 D 上 IM 分担 a。

本文，我们用 $\sigma(x,y)$ 表示 x 与 y 的球面距离[1]。

本文主要分为三个部分，第一部分介绍国内研究现状，第二部分给出本文所需要用到的引理，第三部分给出了对于定理的证明。

2000 年，庞学诚和 Zalcman [2]研究了分担值的正规定则，得到如下结论：

定理 A 令 $\mathfrak{F}$ 是复数域 D 内的一个亚纯函数族，a，b，c 和 d 是有限复常数，满足 $c \neq a$ 及 $b \neq d$，假如对任意函数 $f \in \mathfrak{F}$，都有 $f(z)=a \Leftrightarrow f'(z)=b$，$f(z)=c \Leftrightarrow f'(z)=d$，则 $\mathfrak{F}$ 在 D 内正规。

2004 年，方明亮和 Zalcman [3]证明了：

定理 B 令 $\mathfrak{F}$ 是复数域 D 内的一个亚纯函数族，a，b 为两个非零有限复数，k 为正整数，假如对任意函数 $f \in \mathfrak{F}$，f 的零点重数最少为 $k+1$，且满足 $f(z)=a \Leftrightarrow f^{(k)}(z)=b$，则 $\mathfrak{F}$ 在 D 内正规。

2018 年，廖华婷[4]在毕业论文中分别推广了定理 A 与定理 B，得到了定理 C 与定理 D：

定理 C 令 $\mathfrak{F}$ 是复数域 D 内的一个亚纯函数族，假如对任意函数 $f \in \mathfrak{F}$，有复数 $a_f(\neq 0)$，b_f，c_f，d_f （$a_f \neq c_f$，$b_f \neq d_f$），满足以下条件：

1) $\min\{\sigma(b_f,a_f),\sigma(c_f,b_f),\sigma(a_f,c_f)\} \geq \varepsilon$；（$\varepsilon$ 为正实数)

2) $\frac{b_f}{a_f},\frac{c_f}{a_f},\frac{d_f}{a_f}$ 相对函数 f 独立，使得 $f(z)=a_f \Leftrightarrow f'(z)=b_f$，$f(z)=c_f \Leftrightarrow f'(z)=d_f$，则 $\mathfrak{F}$ 在 D 内是正规的。

定理 D 令 $\mathfrak{F}$ 是区域 D 内的一个亚纯函数族，k 为正整数，假如对任意函数 $f\in\mathfrak{F}$，f 的零点重数最少为 $k+1$，存在复数 $a_f(\neq 0)$，b_f 满足条件：

1) $\min\left\{\sigma\left(0,a_f\right),\sigma\left(0,b_f\right),\sigma\left(a_f,b_f\right)\right\}\geq\varepsilon$；($\varepsilon$ 为正实数)

2) $\dfrac{b_f}{a_f}$ 相对于 f 独立，使得 $f(z)=a_f\Leftrightarrow f^{(k)}(z)=b_f$，则 $\mathfrak{F}$ 在 D 内正规。

2006 年刘礼培[5]得到了：

定理 E 令 $\mathfrak{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一个全纯函数族，a，$b(\neq 0)$，$c(\neq 0)$ 为 3 个有限复数，并且满足 $a\neq b$，假如对任意函数 $f\in\mathfrak{F}$，f 零点重数最少为 k，并且 $f(z)=0\Leftrightarrow f^{(k)}(z)=a$，$f^{(k)}(z)=b\Rightarrow f(z)=c$，则 $\mathfrak{F}$ 在单位圆盘 Δ 内正规。

2016 年，吕凤姣等人[6]证明了：

定理 F 令 $\mathfrak{F}$ 是单位圆盘 Δ 内的一个亚纯函数族，a 和 b 是两个非零有限复常数，k 为正整数。假如对任意函数 $f\in\mathfrak{F}$，f 零点重数至少是 $k+1$，极点重数最少为 2，且 $f^{(k)}(z)=a\Rightarrow\left|f(z)\right|\geq b$，则 $\mathfrak{F}$ 在单位圆盘 Δ 内正规。

根据上述将固定分担值推广至变动分担值这一思路，可得到本文的主要定理。

定理 1 令 $\mathfrak{F}$ 为一全纯函数族，a_f,b_f,c_f 为 3 个有限非零复数，$a_f\neq b_f$，满足：

1) $\min\left\{\sigma\left(0,a_f\right),\sigma\left(0,b_f\right),\sigma\left(a_f,b_f\right)\right\}\geq\varepsilon$；($\varepsilon$ 为正实数)

2) $\dfrac{b_f}{a_f},\dfrac{c_f}{a_f}$ 相对于 f 独立；

若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$，f 的零点重级至少为 k，且 $f(z)=0\Leftrightarrow f^{(k)}(z)=a_f$，$f^{(k)}(z)=b_f\Rightarrow f(z)=c_f$，则 $\mathfrak{F}$ 在复数域 D 内正规。

定理 2 令 $\mathfrak{F}$ 是一亚纯函数族，a_f 和 b_f 为两个非零有穷复数，k 为正整数，满足：

1) $\min\left\{\sigma\left(0,a_f\right),\sigma\left(0,b_f\right),\sigma\left(a_f,b_f\right)\right\}\geq\varepsilon$；($\varepsilon$ 为正实数)

2) $\dfrac{b_f}{a_f},\dfrac{c_f}{a_f}$ 相对于 f 独立；

加入对任意函数 $f\in\mathfrak{F}$，f 零点重数最少是 $k+1$，极点重数最少为 2，并且满足 $f^{(k)}(z)=a_f\Rightarrow\left|f(z)\right|\geq b_f$，则 $\mathfrak{F}$ 在 D 内正规。

2. 主要引理

引理 2.1 [1]令 $\mathfrak{F}$ 是一族亚纯函数，$\mathfrak{F}$ 包含于单位圆盘，且 $\mathfrak{F}$ 中的每个函数的零点重级最少是 k，并且

1) 若 $f(z)=0$，必有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\leq A$；

2) 假如 $\mathfrak{F}$ 在单位圆内不正规，那么对于每一个 α，$0\leq\alpha\leq k$，存在

a) 实数 r，$0<r<1$；

b) 点列 z_n，$\left|z_n\right|<r$；

c) 函数列 $f_n\in\mathfrak{F}$；

d) 正数列 $\rho_n\to 0^+$

使得函数 $\left\{\dfrac{f_n\left(z_n+\rho_n\zeta\right)}{\rho_n^\alpha}\right\}$ 在单位圆上按照球距内闭一致收敛到一亚纯函数 $g(\zeta)$，满足

$g^{\#}(\zeta) \le g^{\#}(0) = kA+1$

引理 2.2 [7]令 $f(z)$ 为复平面上不为常数的有限级亚纯函数，复常数 b，a 为非零，$k(\ge 3)$ 为正整数，假如 $f(z)$ 的零点重数最少为 k， $f(z)=0 \Leftrightarrow f^{(k)}(z)=a$， $f^{(k)}(z)\ne b$，则

$$f(z)=\frac{a(z-c)^k}{k!}$$

引理 2.3 [8] 令 ε 为一正整数，Möbius 变换 L 满足：

$$\min\left\{\sigma\left(L_f(b),L_f(a)\right),\sigma\left(L_f(c),L_f(b)\right),\sigma\left(L_f(a),L_f(c)\right)\right\}\ge\varepsilon$$

其中 a,b,c 为三个常数，则 L 满足李普希茨条件，即

$$\sigma\left(L_f(z),L_f(w)\right)\le k_\varepsilon\sigma(z,w)$$

这里 k_ε 是与 ε 有关的常数。

引理 2.4 [9]令 $f(z)$ 为复平面上不恒为常数的有限级亚纯函数，复常数 b 非零，k 为正整数，假如 $f(z)$ 的零点重数最少为 $k+1$，极点重数最少为 2，且 $f^{(k)}(z)\ne b$，则 $f(z)$ 恒为常数。

引理 2.5 [10]令 $\{f_n(z)\}$ 为复数域 D 内解析的函数序列，并且 $\{f_n(z)\}$ 内闭一致收敛到一个不恒为零的函数，γ 是复数域 D 内可求长的闭曲线，且曲线 γ 不经过 $f(z)$ 的零点，则存在正整数 N，当 $n\ge N$ 时，在 γ 内部 $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 的零点个数是相同。

引理 2.6 [1]令 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，如果 $f(z)$ 的球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界，则 $f(z)$ 的级最多为 2。

引理 2.7 [1] 令 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数，如果 $f(z)$ 的球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界，则 $f(z)$ 的级最多为 1。

3. 定理的证明

定理 1 的证明

由条件 2 可知，有非零常数 a,b,c 使得 $\frac{b_f}{a_f}=\frac{b}{a}$，$\frac{c_f}{a_f}=\frac{c}{a}$ 相对 f 独立。有莫比乌斯变换为 $L_f(z)=\frac{a_f}{a}z$，其逆变换为 $L_f^{-1}(z)=\frac{a}{a_f}z$，先证明函数族 $G=\left\{L_f^{-1}\circ f \mid f\in\mathfrak{F}\right\}$ 在 D 内正规。不失一般性，可设 D 为单位圆 Δ。用反证法，假设 G 在 Δ 内不正规，则由引理 2.1 可知存在函数列 $\left\{g_j=L_{f_j}^{-1}\circ f_j\right\}\subset G$，$\{f_j\}\subset\mathfrak{F}$，$\{z_j\}\subset\Delta$，正数列 $\{\rho_j\}$ 满足 $\rho_j\to 0^+$，使得

$$T_j(\zeta)=\rho_j^{-k}g_j(z_j+\rho_j\zeta) \tag{3.1}$$

在 Δ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的全纯函数 $T(\zeta)$，$T^{\#}(\zeta)\le T^{\#}(0)=k(|a|+1)+1$，$T$ 的级至多为 1。

断言：

1) $T(\zeta)=0\Leftrightarrow T^{(k)}(\zeta)=a$；

2) $T^{(k)}(\zeta)\ne b$

设 $T(\zeta_0)=0$，由赫尔维茨定理，存在点列 $\zeta_j\to\zeta_0$，满足 $T_j(\zeta_j)=\rho_j^{-k}g_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=0$，所以 $f_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=0$，即 $f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=a_f$，从而 $T_j^{(k)}(\zeta_j)=g_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=a$。所以 $T(\zeta)=0\Rightarrow T^{(k)}(\zeta)=a$。

再设 $T^{(k)}(\zeta_0)=a$，显然 $T^{(k)}(\zeta)\not\equiv a$，否则 $T(\zeta)=\frac{a}{k!}(\zeta-\zeta_1)^k$，经简单计算有

$$T^{\#}(0)\le\begin{cases}\frac{k}{2},|\zeta_1|\ge 1,\\ |a|,|\zeta_1|<1.\end{cases}\tag{3.2}$$

与 $T^{\#}(0)=k(|a|+1)+1$ 发生矛盾。所以由赫尔维茨定理，存在点列 $\zeta_j\to\zeta_0$，使得 $T_j^{(k)}(\zeta_j)=g_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=a$，即 $f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=a_f$，从而 $f_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=0$，所以 $T_j(\zeta_j)=\rho_j^{-k}g_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=0$，令 $j\to\infty$，则 $T(\zeta_0)=0$，所以 $T(\zeta)=0\Leftrightarrow T^{(k)}(\zeta)=a$。

设 $T^{(k)}(\zeta_0)=b$，则 $T^{(k)}(\zeta)\not\equiv b$，所以由 Hurwitz 定理，存在点列 $\zeta_j\to\zeta_0$，$T_j^{(k)}(\zeta_j)=g_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=b$，则 $f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=b_f$，由条件可得 $f_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=c_f$，所以 $T_j(\zeta_j)=\rho_j^{-k}g_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=\rho_j^{-k}c$，即 $T(\zeta_0)=\infty$，与 $T(\zeta)$ 为全纯函数矛盾。

下面再分三种情况：

当 $k\ge 3$ 时，由引理 2.2 可知，$T(\zeta)=\frac{a}{k!}(\zeta-\zeta_2)^k$，经过上述讨论，与 $T^{\#}(0)=k(|a|+1)+1$ 矛盾。

当 $k=2$ 时，因为 $T(\zeta)$ 的级至多为 1，所以 $T^{(2)}$ 的级最多也为 1，又因为 $T^{(2)}\ne b$，所以

$$T^{(2)}=b+Ae^{\lambda\zeta}\tag{3.3}$$

其中 $A\ne 0$，λ 为有限常数。

当 $\lambda=0$ 时，我们有

$$T(\zeta)=\frac{1}{2}(b+A)\zeta^2+B_1\zeta+B_2\tag{3.4}$$

其中 B_1，B_2 为常数，显然 $b+A\ne 0$，不然 $T^{(2)}=0$，与 T 的零点重级为 2 矛盾。又由断言(1)，$b+A=a$，从而 $T(\zeta)=\frac{1}{2}a\zeta^2+B_1\zeta+B_2$ 且必有零点，不妨设 $T(\zeta_0)=0$，因为 T 的零点重级为 2，且有 $T^{(2)}=a$，所以

$$T(\zeta)=\frac{a}{2}(\zeta-\zeta_0)^2\tag{3.5}$$

由上述讨论，与 $T^{\#}(0)=2(|a|+1)+1$ 矛盾。

当 $\lambda\ne 0$ 时

$$T(\zeta)=\frac{1}{2}b\zeta^2+B_1\zeta+B_2+\frac{A}{\lambda^2}e^{\lambda\zeta}\tag{3.6}$$

其中 B_1，B_2 为常数。存在 ζ_0，使得 $T(\zeta_0)=0$，因为 $T(\zeta)=0\Leftrightarrow T^{(2)}(\zeta)=a$。所以 ζ_0 将满足以下两个方程：

$$\frac{1}{2}b\zeta_0^2+B_1\zeta_0+B_2+\frac{A}{\lambda^2}e^{\lambda\zeta_0}=0\tag{3.7}$$

$$b+Ae^{\lambda\zeta_0}=a\tag{3.8}$$

化简可得 $\frac{1}{2}b\zeta_0^2+B_1\zeta_0+B_2+\frac{a-b}{\lambda^2}=0$。所以满足断言的解只有两个，与 $T(\zeta)$ 本身矛盾。

当 $k=1$ 时，我们指出 $T(\zeta)=0 \Rightarrow T'(\zeta)=a$，以及 $T'(\zeta)\neq b$。同 $k=2$ 的情形，$T'(\zeta)$ 的级最多也为 1，又因为 $T'(\zeta)\neq b$，所以

$$T'(\zeta)=b+Ae^{\lambda\zeta} \tag{3.9}$$

若 $\lambda=0$，我们有

$$T(\zeta)=(b+A)\zeta+B_1 \tag{3.10}$$

其中 B_1 是一个有限常数。

因为 $T(\zeta)$ 非常数，所以

$$b+A\neq 0 \tag{3.11}$$

因为 $T(\zeta)=0 \Rightarrow T'(\zeta)=a$，我们可以得出

$$b+A=a \tag{3.12}$$

因此

$$T(\zeta)=a\zeta+B_1 \tag{3.13}$$

这与 $T^{\#}(0)=|a|+2$ 矛盾。

因此，一定有 $\lambda\neq 0$，所以

$$T(\zeta)=b\zeta+\frac{A}{\lambda}e^{\lambda\zeta}+B_1 \tag{3.14}$$

其中 B_1 是一个有限常数。

因为 $b\neq 0$，所以上式必有一根，不妨设 $T(\zeta_0)=0$，因为 $T(\zeta)=0 \Rightarrow T'(\zeta)=a$，所以

$$T'(\zeta_0)=a \tag{3.15}$$

从而下面两个等式必然同时成立

$$b\lambda\zeta_0+Ae^{\lambda\zeta_0}+\lambda B_1=0 \tag{3.16}$$

以及

$$Ae^{\lambda\zeta_0}+b-a=0 \tag{3.17}$$

所以得到

$$\zeta_0=(b-\lambda B_1-a)/b\lambda \tag{3.18}$$

这说明 $T(\zeta)$ 只有一个零点满足条件，与 $T(\zeta)=b\zeta+\frac{A}{\lambda}e^{\lambda\zeta}+B_1$ 矛盾。

从而 $G=\{L_f^{-1}\circ f \setminus f\in\mathfrak{F}\}$ 在 Δ 内正规。即函数族 G 在 Δ 内等度连续。由定理条件知：

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \min\{\sigma(0,a_f),\sigma(0,b_f),\sigma(a_f,b_f)\}\\ &=\min\{\sigma(L_f(0),L_f(a)),\sigma(L_f(0),L_f(b)),\sigma(L_f(a),L_f(b))\}\end{aligned}$$

由引理 2.3 知，L_f 满足李普希茨条件 $\sigma(L_f(z),L_f(w))\leq k_\varepsilon\sigma(z,w)$，$k_\varepsilon$ 为取决于 ε 的常数。

任意取一点 $z\in\Delta$，对任意的 $\varepsilon>0$，T 在 $z\in\Delta$ 上等度连续，存在 $\delta>0$，当 $w\in D$ 满足 $\sigma(z,w)<\delta$，对任意 $f\in\mathfrak{F}$ 满足

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(f(z), f(w)\right) &= \sigma\left(\left(L_f \circ L_f^{-1} \circ f\right)(z), \left(L_f \circ L_f^{-1} \circ f\right)(w)\right) \\
&\le k_\varepsilon \sigma\left(\left(L_f^{-1} \circ f\right)(z), L_f^{-1} \circ f(w)\right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

即 $\mathfrak{F}$ 在点 z 也等度连续，因此 $\mathfrak{F}$ 在 Δ 内正规。

定理 2 的证明

与定理 1 类似，存在非零常数 a，b 使得 $\frac{b_f}{a_f} = \frac{b}{a}$ 相对 f 独立。有莫比乌斯变换 $L_f(z) = \frac{a_f}{a} z$，它的逆变换 $L_f^{-1}(z) = \frac{a}{a_f} z$，先证明函数族 $G = \left\{L_f^{-1} \circ f \setminus f \in \mathfrak{F}\right\}$ 在 D 内正规。不失一般性可设 D 为单位圆盘 Δ，假设 G 在 Δ 内不正规，由引理 2.1 可得，存在函数列 $\left\{g_j = L_{f_j}^{-1} \circ f_j\right\} \subset G$，$\left\{f_j\right\} \subset \mathfrak{F}$，$\left\{z_j\right\} \subset \Delta$，正数列 $\left\{\rho_j\right\}$ 满足 $\rho_j \to 0^+$，使得

$$
T_j(\zeta) = \rho_j^{-k} g_j\left(z_j + \rho_j \zeta\right) \tag{3.19}
$$

在复平面上按球距内闭一致收敛到非常数亚纯函数 $T(\zeta)$，其中 $T(\zeta)$ 的级最多为 2，其零点重级至少为 $k+1$，极点重级至少为 2。

断言 $T^{(k)}(\zeta) \ne a$ 。事实上，设 $\zeta_0 \in \Delta$，使得 $T^{(k)}(\zeta_0) = a$，$T(\zeta_0) \ne \infty$ 显然 $T^{(k)}(\zeta) \not\equiv a$，否则 $T(\zeta)$ 为一 k 次多项式，与其零点重级至少为 $k+1$ 矛盾。所以，由赫尔维茨定理可得，存在 $T_j(\zeta)$，和点列 $\zeta_j \to \zeta_0$，使得当 j 充分大时有 $T_j^{(k)}(\zeta_j) = a$，所以 $f_j^{(k)}\left(z_j + \rho_j \zeta_j\right) = a_f$，根据定理条件 $f^{(k)}(z) = a_f \Rightarrow \left|f(z)\right| \ge b_f$，所以 $\left|f_j\left(z_j + \rho_j \zeta_j\right)\right| \ge b_f$，即 $\left|T_j(\zeta_j)\right| = \left|\rho_j^{-k} g_j\left(z_j + \rho_j \zeta_j\right)\right| \ge \rho_j^{-k} \frac{a}{a_f} b_f = \rho_j^{-k} b \to \infty$（当 $j \to \infty$）。所以 $T(\zeta_0) = \infty$。矛盾，断言得证。

又 $T(\zeta)$ 的零点重级至少为 $k+1$，极点重级至少为 2，由引理 2.4 知，$T(\zeta)$ 为一常数，这与 $T(\zeta)$ 是非常数亚纯函数矛盾，从而 G 在 Δ 内正规，即 G 在 Δ 内等度连续。由定理条件(1)知，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\le \min\left\{\sigma\left(0, a_f\right), \sigma\left(0, b_f\right), \sigma\left(a_f, b_f\right)\right\} \\
&= \min\left\{\sigma\left(L_f(0), L_f(a)\right), \sigma\left(L_f(0), L_f(b)\right), \sigma\left(L_f(a), L_f(b)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

由引理 2.3，L_f 满足 Lipschitz’s 条件 $\sigma\left(L_f(z), L_f(w)\right) \le k_\varepsilon \sigma(z, w)$，其中 k_ε 为取决于 ε 的常数。

任意取一点 $z \in \Delta$，对任意 $\varepsilon > 0$，T 在 $z \in \Delta$ 等度连续，存在 $\delta > 0$，当 $w \in D$ 满足 $\sigma(z, w) < \delta$，对任意 $f \in \mathfrak{F}$ 满足

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(f(z), f(w)\right) &= \sigma\left(\left(L_f \circ L_f^{-1} \circ f\right)(z), \left(L_f \circ L_f^{-1} \circ f\right)(w)\right) \\
&\le k_\varepsilon \sigma\left(\left(L_f^{-1} \circ f\right)(z), L_f^{-1} \circ f(w)\right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

即 $\mathfrak{F}$ 在点 z 也等度连续，因此 $\mathfrak{F}$ 在 Δ 内正规。

基金项目

国家自然科学基金资助(11961068)。

参考文献

[1] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normality and Shared Values. *Arkiv for Matematik*, **38**, 171-182. https://doi.org/10.1007/BF02384496

[3] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2004) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions III. *Computational Methods and Function Theory*, **2**, 385-395. https://doi.org/10.1007/BF03321856

[4] 廖华婷. 涉及分担值的亚纯函数正规族理论[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 湖北大学, 2018.

[5] 刘礼培. 全纯函数涉及公共值的正规定则[J]. 重庆文理学院学报(自然科学版), 2007(2): 12-15.

[6] 吕凤姣, 蒋红敬. 分担值与正规族[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2016, 29(4): 78-80.

[7] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2001) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions II. *Computational Methods and Function Theory*, **1**, 289-299. https://doi.org/10.1007/BF03320991

[8] Beardon, A.F. (1991) Iteration of Rational Functions. Springer-Verlag, New York.

[9] Hayman, W.K. (1959) Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives. *Annals of Mathematics*, **70**, 9-42. https://doi.org/10.2307/1969890

[10] 方企勤. 复变函数教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 1996.