Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 669-682
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133072

一类拟线性Schrödinger方程正解的存在性

周 敏

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年2月22日；录用日期：2023年3月23日；发布日期：2023年3月30日

摘 要

本文讨论如下一类拟线性Schrödinger方程

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{\gamma}{2}\Delta(u^2)u = f(u),\ x \in \mathbb{R}^N,$$

其中$V(x): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$为位势函数，$\gamma > 0$，且$N \geq 3$．当$\gamma \in (0, \gamma_0)$时，我们得到了上述问题的正解．此外当位势函数$V(x) \equiv V_\infty > 0$，我们在$H^2(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$上证明了经典径向正解$u_\gamma$的存在性，且$\gamma \to 0^+$时，满足$u_\gamma \to u_0$，其中$u_0$是以下半线性问题的基态解：

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

关键词

拟线性Schrödinger方程，变分方法，L^∞-估计，Morse迭代

Existence of Positive Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations

Min Zhou

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 22^{nd}, 2023; accepted: Mar. 23^{rd}, 2023; published: Mar. 30^{th}, 2023

文章引用: 周敏. 一类拟线性Schrödinger方程正解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 669-682.
DOI: 10.12677/pm.2023.133072

Abstract

This paper focuses on a class of quasilinear Schrödinger equations:

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{\gamma}{2}\Delta(u^2)u = f(u),\ x \in \mathbb{R}^N,$$

where $V(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a given potential, $\gamma > 0$ and $N \geq 3$. Firstly, we obtain a positive solution for the above problem in $\gamma \in (0, \gamma_0)$. The potential function $V(x)$ is considered in $V(x) \equiv V_\infty > 0$. We prove the existence of a positive classical radial solution u_γ and up to a subsequence, $u_\gamma \to u_0$ in $H^2(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ as $\gamma \to 0^+$, where u_0 is the ground state of the following semilinear problem:

$$\Delta u + V_\infty u = f(u),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Keywords

Quasilinear Schrödinger Equations, Variational Methods, L^∞-Estimate, Mores Iteration

1. 引言

本文研究如下拟线性Schrödinger方程的驻波解的存在性:

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - l(|z|^2)z + \frac{\gamma}{2}[\Delta\rho(|z|^2)]\rho'(|z|^2)z,\ x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

其中$z : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个给定的位势, γ 是一个实常数, l, ρ为实函数. 众所周知, 方程(1)的驻波解满足下列拟线性Schrödinger方程

$$-\Delta u + V(x)u + \frac{\gamma}{2}[\Delta\rho(|u|^2)]\rho'(|u|^2)u = f(u),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

其中$V(x)=W(x)-E$, $f(t):=l(|t|^2)t$ 为新的非线性项. 形如(2)的拟线性Schrödinger方程已广泛应用于物理等多个领域(见 [1]). 例如当$\rho(t)=1$ 时, 方程退化为如下的半线性情况:

$$-\Delta u+V(x)u=l(u),\ x\in\mathbb{R}^N.$$

在过去的30年里, 上述方程得到了广泛的研究, 参见文献 [2,3]. 当$\rho(t)=t$ 时, 即

$$-\Delta u+V(x)u+\frac{\gamma}{2}\Delta(u^2)u=f(u),\ x\in\mathbb{R}^N, \tag{3}$$

它模拟了等离子体物理学中的超流体薄膜方程; 当$\rho(t)=(1+t)^{1/2}$ 时, 上述方程建立了高功率超短激光器在物质中的自通道方程, 参见文献 [4,5].

在过去的几十年里, 有许多学者利用变分方法, 得到了大量关于方程 (2) 解的存在性和多重性结果. 当$\gamma<0$时, 一方面通过约束最小化证明了(3)的正解的存在性. 这方面成果可以参见文献 [6–8]. 另一方面, 常数γ代表不同的物理效应, 因此研究当$|\gamma|\to 0$时, 基态解的存在性及其渐近行为是十分重要的. 在文献 [1]中, Adachi研究了以下方程:

$$-\Delta u+\lambda u+\frac{\gamma}{2}\Delta(u^2)u=|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbb{R}^3, \tag{4}$$

结果表明, 在空间$H^2(\mathbb{R}^3)\cap C^2(\mathbb{R}^3)$上, 方程(4)的基态解$u_\gamma$满足当$\gamma\to 0^-$时, 有$u_\gamma\to u_0$, 其中$u_0$是如下方程的唯一基态解:

$$-\Delta u+\lambda u=|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbb{R}^3.$$

在文献 [9]中，王友军证明了在$p\in(2,4)$的情况下方程(4)正解的渐近行为, 完善了Adachi等人在 [1]中给出的结果. 在文献 [10–13] 中Adachi等人应用爆破分析和变分方法, 得到了当非线性项具有H^1临界增长和H^1 超临界增长时, 方程(4)的基态解的渐近行为.

关于问题(3)的研究主要集中在$\gamma<0$. 对于$\gamma>0$, 解的存在性结果还比较少. 注意到, 当$\gamma>0$, 我们不能直接用 [6]中的变量变换法研究问题. 为了克服这一困难，通过变分方法结合修正技巧, Alves在文献 [7] 中证明了下列方程解的存在性

$$-\Delta u+V(x)u+\frac{\gamma}{2}\Delta(u^2)u=|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbb{R}^N, \tag{5}$$

其中$2<p<2^*$, $\gamma>0$为足够小的实数. 在文献 [14]中, 王友军建立的是有临界增长非线性项的拟线性Schrödinger方程解的存在性. 对于$\gamma>0$和$\gamma\to 0^+$的情况下, 方程(5)的正解的渐近行为尚未被考虑.

本文的主要工作是对$\gamma>0$ 研究(3)基态解的存在性.

本文将研究以下具有一般非线性的单参数椭圆方程的正解

$$-\Delta u+V(x)u+\frac{\gamma}{2}\Delta(u^2)u=f(u),\ x\in\mathbb{R}^N \tag{6}$$

的存在性, 其中$N\geq 3$, $\gamma>0$, $V(x)\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, 且满足:
(V_0) 当$x\in\mathbb{R}^N$ 时, $V(x)\geq V_0>0$;

(V_1) $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty$ 且$V(x) \le V_\infty$.

对于非线性项f, 设$f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, 并满足

(f_1) 对于$t \le 0$, 有$f(t) = 0$, 且存在$p \in (2, 2^*)$, 使得

$$|f(t)| \le C(1 + |t|^{p-1}),$$

其中$2^* = \frac{2N}{N-2}$为临界指数;

(f_2)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = 0;$$

(f_3) 存在$\theta > 2$, 使得对于 $t > 0$, 成立

$$0 < \theta F(t) \le tf(t),$$

其中$F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

方程(6)对应的自然泛函I 为

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 - \gamma u^2)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x,$$

其在空间$H^1(\mathbb{R}^N)$ 中可能不是良定义的, 所以本文的主要困难是: 首先, 由于$I(u)$在$H^1(\mathbb{R}^N)$中可能不是良定义的, 因此能量泛函$I(u)$不是光滑的, 更棘手的问题是如何保证主部分的正性, 即$1 - \gamma u^2 > 0$; 其次, 在整个空间$\mathbb{R}^N$ 中, 紧致性一般不成立.

受到文献 [7]和 [14]的启发, 我们对泛函I 进行以下修正

$$-\mathrm{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = f(u),\ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

其中$g(t) = \sqrt{1 - \gamma t^2}$, 当$\gamma > 0$, 有$|t| < \frac{1}{\sqrt{3\gamma}}$. 由(7)式有一个正解$u_\gamma$, 然后通过Morse迭代得到弱解的一致$L^\infty$-估计(与$\gamma$无关). 我们将证明, 当$\gamma$足够小时, u是原问题(6) 的解. 首先利用Morse迭代, 给出u_γ H^1-范数的一致有界性, 之后应用u_γ 的一致估计来证明其在空间$H^1(\mathbb{R}^N)$上的强收敛性. 一旦我们能得到其在空间H^1上的收敛性, 我们就可以应用椭圆估计来得到u_γ 在空间$H^2(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$上的收敛性.

本文主要结果如下

定理 1.1 假设条件(V_0), (V_1) 及$(f_1)-(f_3)$ 成立, 则存在$\gamma_0 > 0$, 使得问题(6) 对于所有的$\gamma \in [0, \gamma_0)$都存在正解u_γ, 且存在与γ无关的常数$C > 0$, 使得

$$|u_\gamma|_\infty \le C.$$

2. 预备知识

受文献 [14]的启发, 我们研究以下拟线性Schrödinger方程

$$-\mathrm{div}(g_\gamma^2(u)\nabla u) + g_\gamma(u)g'_\gamma(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = f(u),\ \ x \in \mathbb{R}^N \tag{8}$$

其中$g_\gamma(t):[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 定义如下

$$g_\gamma(t)=\begin{cases}\sqrt{1-\gamma t^2}, & \text{if } 0\le t<\frac{1}{\sqrt{3\gamma}},\\ \frac{1}{3\sqrt{2\gamma}t}+\frac{1}{\sqrt{6}}, & \text{if } t\ge\frac{1}{\sqrt{3\gamma}},\end{cases}$$

对于$t<0$, 有$g_\gamma(t)=g_\gamma(-t)$, $g_\gamma(t)\in C^1(\mathbb{R},(\sqrt{1/6},1])$, 且在$[0,+\infty)$上单减.

设$G_\gamma(t)=\int_0^t g_\gamma(s)\mathrm{d}s$. 由定义, $G_\gamma(t)$ 是给定的奇函数, 且存在反函数$G_\gamma^{-1}(t)$. 容易证明, $G_\gamma^{-1}(t)$具有如下性质.

引理 2.1
(1) $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{G_\gamma^{-1}(t)}{t}=1$;
(2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{G_\gamma^{-1}(t)}{t}=\sqrt{6}$;
(3) 对于$t\ge0$, 有$t\le G_\gamma^{-1}(t)\le\sqrt{6}t$;
(4) 对于$t\ge0$, 有$-\frac{1}{2}\le\frac{t}{g_\gamma(t)}g_\gamma'(t)\le0$.

易知方程(8)的能量泛函为

$$\widetilde{I}(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}g_\gamma^2(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

我们的方法是证明方程(9)的非平凡临界点u且$|u(x)|_\infty<\frac{1}{\sqrt{3\gamma}}$的存在性, 它是方程(9)的非平凡解. 若满足$|u(x)|_\infty<\frac{1}{\sqrt{3\gamma}}$, u 便为方程(6)的一个非平凡的解.

之后, 设如下变量

$$v=G_\gamma(u)=\int_0^u g_\gamma(s)\mathrm{d}s,$$

方程(9)的能量泛函可以改写成如下

$$J_\gamma(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(v)|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(G_\gamma^{-1}(v))\mathrm{d}x.$$

由引理2.1和条件(V_0), (V_1) 及$(f_1)-(f_3)$, 我们可得方程$J_\gamma(v)$ 在空间$H^1(\mathbb{R}^N)$上是良定义的, $J_\gamma\in C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$且对于$v\in H^1(\mathbb{R}^N)$有

$$J_\gamma'(v)\varphi=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\frac{G_\gamma^{-1}(v)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))}\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(G_\gamma^{-1}(v))}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))}\varphi\mathrm{d}x.$$

引理 2.2 若$v\in H^1(\mathbb{R}^N)$是J_γ的临界点, 则$u=G_\gamma^{-1}(v)\in H^1(\mathbb{R}^N)$ 且u是方程(8)的弱解.

证明 假设$v\in H^1(\mathbb{R}^N)$是J_γ的临界点, 由引理2.1可以直接计算得到$u=G_\gamma^{-1}(v)\in H^1(\mathbb{R}^N)$. 对于所有$\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\frac{G_\gamma^{-1}(v)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))}\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(G_\gamma^{-1}(v))}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))}\varphi\mathrm{d}x=0,$$

DOI: 10.12677/pm.2023.133072

取$\varphi = g_\gamma(u)\psi$ 其中$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla u g'_\gamma(u)\psi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \psi g_\gamma(u)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\psi \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\psi \mathrm{d}x = 0,$$

或

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(-\mathrm{div}(g_\gamma^2(u)\nabla u) + g_\gamma(u)g'_\gamma(u)|\nabla u|^2 + V(x)u - f(u)\right)\psi \mathrm{d}x = 0.$$

综上, 求方程(8)非平凡解的存在性, 只需要研究如下方程非平凡解的存在性

$$-\Delta v + V(x)\frac{G_\gamma^{-1}(v)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))} = \frac{f(G_\gamma^{-1}(v))}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))},\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{10}$$

3. 定理1.1的证明

定义$H^1(\mathbb{R}^N)$空间的范数为

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

及如下方程

$$-\Delta v + V_\infty \frac{G_\gamma^{-1}(v)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))} = \frac{f(G_\gamma^{-1}(v))}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v))} \tag{11}$$

其对应的能量泛函如下

$$J^\infty(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V_\infty |G_\gamma^{-1}(v)|^2\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} F(G_\gamma^{-1}(v))\mathrm{d}x.$$

定义

$$d^\infty = \inf\{J^\infty(v) |\ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},\ J^{\infty\prime}(v) = 0\}.$$

为了证明上述问题, 我们首先回顾Berestycki-Lions [2] 和Colin-Jeanjean [6]对如下方程的几个经典结论

$$-\Delta v = k(v),\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{12}$$

方程(12)对应的能量泛函为

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(v)\mathrm{d}x,$$

其中$K(s) = \int_0^s k(t)dt$.

当$k(s)$满足以下条件时

(k_0) $k(s) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(k_1) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0^+} \frac{k(s)}{s} \le \limsup\limits_{s\to 0^+} \frac{k(s)}{s} = -C < 0$;
(k_2) $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{|k(s)|}{s^{2^*-1}} = 0$;
(k_3) 存在$s_0 > 0$, 使得$K(s_0) > 0$,
可以得到以下命题(见 [2,15,16]).

命题 3.1 设$b = \inf\{J(w) \mid w$ 为方程(12)的非平凡弱解$\}$. 若$(k_0) - (k_3)$成立, 则$b > 0$ 且正函数$w \in H^1(\mathbb{R}^N)$. 对于任意$x \in \mathbb{R}^N$, 存在路径$\eta \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$, 使得$\eta(t)(x) > 0$ 且

$$\max_{t\in[0,1]} J(\eta(t)) = J(w).$$

因此由方程(11)及$-\Delta v = k(v)$可得

$$k(s) = \frac{f(G_\gamma^{-1}(s))}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(s))} - V_\infty \frac{G_\gamma^{-1}(s)}{g(G_\gamma^{-1}(s))}.$$

易得$k(s)$满足$(k_0) - (k_3)$. 因此, 存在$w^\infty \in H^1(\mathbb{R}^N)$使得$d^\infty > 0$. 此外, 我们可以找到路径$\eta \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$, 对于所有$x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (0,1]$ 且$\eta(0) = 0$, 有$J^\infty(\eta(1)) < 0$, $w^\infty \in \eta([0,1])$及

$$\max_{t\in[0,1]} J^\infty(\eta(t)) = J^\infty(w^\infty).$$

为研究J_γ, 定义

$$d_\gamma = \inf_{\eta\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\gamma(\eta(t)),$$

其中$\Gamma = \{\eta \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) \mid \eta(0) = 0,\ J_\gamma(\eta(1)) < 0\}$.

接下来将验证J_γ的山路定理几何条件, 并证明PS序列的有界性.

引理 3.1 假设$(f_1) - (f_3)$, (V_0) 及(V_1)成立. 则存在$\rho > 0$ 及$e \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 使得对于$\|v\| = \rho$, 有

$$J_\gamma(v) > 0,$$

且$J_\gamma(e) < 0$

证明 由引理2.1, (V_0), (f_1), (f_2) 及Sobolev嵌入, 有

$$\begin{aligned}
J_\gamma(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G_\gamma^{-1}(v)|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} F(G_\gamma^{-1}(v))\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon|G_\gamma^{-1}(v)|^2 + C_\varepsilon|G_\gamma^{-1}(v)|^p\right)\mathrm{d}x \\
&\ge \min\{1, V_0\}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right)\mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \mathrm{d}x \\
&\ge \min\{1, V_0\}\frac{1}{4}\|v\|^2 - C\|v\|^p.
\end{aligned}$$

因此, 当$p > 2$时, $J_\gamma(v)$在$v = 0$处有局部最小值.

另一方面, 由条件(f_3)可得, 对于$t>0$有

$$F(t)\geq Ct^{\theta},$$

其中$w\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}(w)=\overline{B_1}$ 且$w(x)\geq 0$,

$$\begin{aligned}
J_\gamma(tw)&=\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(tw)|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(G_\gamma^{-1}(tw))\mathrm{d}x\\
&=\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(tw)|^2\mathrm{d}x-\int_{\overline{B_1}}F(G_\gamma^{-1}(tw))\mathrm{d}x\\
&\leq\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(tw)|^2\mathrm{d}x-\int_{\overline{B_1}}(C_1(G_\gamma^{-1}(tw))^{\theta}-C_2)\mathrm{d}x\\
&\leq\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\mathrm{d}x+3t^2\int_{\mathbb{R}^N}V_\infty|w|^2\mathrm{d}x-Ct^{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{\theta}\mathrm{d}x+C.
\end{aligned}$$

由于$\theta>2$, 当$t\to\infty$时, 有$J_\gamma(tw)\to-\infty$

引理 3.2 设$(f_1)-(f_3)$, (V_0) 及(V_1) 成立. 则J_γ 的PS序列是有界的.

证明 设$\{v_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$为$J_\gamma$的PS序列, 即

$$\begin{aligned}
J_\gamma(v_n)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(v_n)|^2\mathrm{d}x\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}F(G_\gamma^{-1}(v_n))\mathrm{d}x=d+o_n(1).
\end{aligned}\tag{13}$$

则对于任意$\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\langle J_\gamma'(v_n),\varphi\rangle=o_n(1)\|\varphi\|$, 即

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla v_n\nabla\varphi+V(x)\frac{G_\gamma^{-1}(v_n)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))}\varphi\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(G_\gamma^{-1}(v_n))}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))}\varphi\mathrm{d}x=o_n(1)\|\varphi\|.\tag{14}$$

取$\varphi=G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))$, 由引理2.1-(4)可得

$$|\nabla(G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n)))|\leq\left(1+\frac{G_\gamma^{-1}(v_n)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))}g_\gamma'(G_\gamma^{-1}(v_n))\right)|\nabla v_n|\leq|\nabla v_n|.\tag{15}$$

另一方面, 由引理2.1-(3), 我们有

$$|G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))|\leq\sqrt{6}|v_n|.\tag{16}$$

结合(15)和(16)可得

$$\|G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))\|\leq\sqrt{6}\|v_n\|.$$

我们可以选择$\varphi=G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))$. 就有$\langle J_\gamma'(v_n),G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))\rangle=o_n(1)\|v_n\|$ 我们有

$$
\begin{aligned}
o_n(1)\|v_n\| &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(1+\frac{G_\gamma^{-1}(v_n)}{g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))}g_\gamma'(G_\gamma^{-1}(v_n))\right)|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(v_n)|^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}f(G_\gamma^{-1}(v_n))G_\gamma^{-1}(v_n)\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(v_n)|^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}f(G_\gamma^{-1}(v_n))G_\gamma^{-1}(v_n)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{17}
$$

因此, 由(f_3), (13), (14), (17)及引理2.1, 我们可得

$$
\begin{aligned}
\theta d + o_n(1) + o_n(1)\|v_n\| &= \theta J_\gamma(v_n) - \langle J_\gamma'(v_n), G_\gamma^{-1}(v_n)g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_n))\rangle \\
&\ge \frac{\theta-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x + \frac{\theta-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G_\gamma^{-1}(v_n)|^2\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{\theta-2}{2}\min\{1,V_0\}\|v_n\|^2,
\end{aligned}
$$

即$\|v_n\|$一致有界的.

借助文献 [17]中的结论, 我们得到J_γ的PS序列有界的以下表示.

命题 3.2 设$(f_1)-(f_3)$, (V_0) 及(V_1)成立, 设$\{v_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 为J_γ的PS序列. 则存在$\{v_n\}$的子序列(也用$\{v_n\}$表示). 对于整数$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 序列$\{y_n^i\}\subset\mathbb{R}^N$, $w^i\in H^1(\mathbb{R}^N)$有

(1) 对于$i\neq j$, 当$n\to\infty$时, 有$|y_n^i|\to\infty$ 且$|y_n^i-y_n^j|\to\infty$,

(2) 在空间$H^1(\mathbb{R}^N)$上, 有$v_n\rightharpoonup v_0$ 及$J_\gamma'(v_0)=0$,

(3) 对于$0\le i\le m$, 有$w^i\neq 0$ 且$(J^\infty)'(w^i)=0$,

(4) $\|v_n-v_0-\sum_{i=0}^m w^i(\cdot-y_n^i)\|\to 0$,

(5) $J_\gamma(v_n)\to J_\gamma(v_0)+\sum_{i=0}^m J^\infty(w^i)$.

为了利用命题3.2得到J_γ的PS序列的紧性, 我们需要证明以下引理.

引理 3.3 设$(f_1)-(f_3)$, (V_0) 及(V_1). 则$d_\gamma<d^\infty$

证明 根据命题3.1, 存在$w^\infty\in H^1(\mathbb{R}^N)$使得$J^\infty(w^\infty)=d^\infty>0$. 我们可以找到路径$\eta\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N))$, 使得对于所有的$x\in\mathbb{R}^N$及$t\in(0,1]$, $\eta(0)=0$, $J^\infty(\eta(1))<0$, $w^\infty\in\eta([0,1])$, 有$\eta(t)(x)>0$且

$$
\max_{t\in[0,1]}J^\infty(\eta(t))=J^\infty(w^\infty).
$$

其中固定点w^∞ 且η, 对于任意$t\in(0,1]$, 有

$$
J_\gamma(\eta(t))<J^\infty(\eta(t)),
$$

由此可得

$$
d\le\max_{t\in[0,1]}J_\gamma(\eta(t))<\max_{t\in[0,1]}J^\infty(\eta(t))=d^\infty,
$$

这就完成了证明.

接下来结合引理3.3和命题3.2, 证明J_γ有山路临界点.

引理 3.4 假设条件$(f_1)-(f_3)$, (V_0) 及(V_1) 成立. 则J_γ有正临界点.

证明 由引理3.1和3.2，存在一个有界的PS序列$\{v_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$. 由命题3.2存在$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$和$v_\gamma\in$

$H^1(\mathbb{R}^N)$, 使得在空间$H^1(\mathbb{R}^N)$上有

$$v_n \rightharpoonup v_\gamma \ J'_\gamma(v_\gamma) = 0$$

且

$$J_\gamma(v_n) \to J_\gamma(v_\gamma) + \sum_{i=1}^{m} J^\infty(w^i),$$

其中$\{w^i\}_{i=1}^m$是J^∞的非平凡临界点.
若$J_\gamma(v_\gamma) < 0$, 那便不用证明了. 若$J_\gamma(v_\gamma) \geq 0$, 则

$$d_\gamma = \lim_{n\to\infty} J_\gamma(v_n) = J_\gamma(v_\gamma) + \sum_{i=1}^{m} J^\infty(w^i) \geq m d^\infty.$$

由引理3.3, 可得$m = 0$. 因此由命题3.2-(4), 我们可得

$$v_n \to v_\gamma \text{ in } H(\mathbb{R}^N).$$

引理 3.5 设$(f_1) - (f_3)$, (V_0) 及(V_1) 成立, v_γ 为J_γ 满足$J_\gamma(v_\gamma) = d_\gamma$ 的一个临界点. 则存在$C > 0$ (与γ独立), 使得

$$\|v_\gamma\|^2 \leq C d_\gamma. \tag{18}$$

证明 根据条件(f_3), 我们可以得到以下估计

$$\begin{aligned}
\theta d_\gamma &= \theta J_\gamma(v_\gamma) - \langle J'_\gamma(v_\gamma), G_\gamma^{-1}(v_\gamma) g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_\gamma))\rangle \\
&= \frac{\theta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\gamma|^2 \mathrm{d}x + \frac{\theta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G_\gamma^{-1}(v_\gamma)|^2 \mathrm{d}x - \theta\int_{\mathbb{R}^N} F(G_\gamma^{-1}(v_\gamma))\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_\gamma \nabla\left(G_\gamma^{-1}(v_\gamma) g_\gamma(G_\gamma^{-1}(v_\gamma))\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G_\gamma^{-1}(v_\gamma)|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} f(G_\gamma^{-1}(v_\gamma)) G_\gamma^{-1}(v_\gamma)\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{\theta-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\gamma|^2 \mathrm{d}x + \frac{\theta-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G_\gamma^{-1}(v_\gamma)|^2 \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{\theta-2}{2}\min\{1, V_0\}\|v_\gamma\|^2.
\end{aligned}$$

这说明$\|v_\gamma\|^2 \leq C d_\gamma$.

此外, 为证明$\|v_\gamma\|$ H^1-范数的一致估计. 考虑如下能量泛函

$$P_\infty(v) = 3\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V_\infty v^2\right)\mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} |v|^\theta \mathrm{d}x + C$$

其中$\theta \in (2, 2^*)$, 我们用c^∞表示能量泛函P_∞的山路水平与γ独立. 由于$J_\gamma(v) \leq P_\infty(v)$, 考虑如下集

合

$$\Gamma_P = \{\eta \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)| \, \eta(0) = 0, P_\infty(\eta(1)) < 0\}.$$

其中$\Gamma_P \subset \Gamma$, 因此有

$$\begin{aligned} d_\gamma &= \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\gamma(\eta(t)) \leq \inf_{\eta \in \Gamma_P} \max_{t\in[0,1]} J_\gamma(\eta(t)) \\ &\leq \inf_{\eta \in \Gamma_P} \max_{t\in[0,1]} P_\infty(\eta(t)) := c^\infty. \end{aligned}$$

因此, 解v_γ必须满足如下估计

$$\|v_\gamma\|^2 \leq \frac{2\theta c^\infty}{(\theta-2)\min\{1, V_0\}}.$$

我们注意到, L^∞-范数不超过$\frac{1}{\sqrt{3\gamma}}$的问题(8)的弱解也是问题(6)的弱解. 所以下一步我们将研究J_γ临界点的L^∞估计, 这个证明也是Morse迭代的一个应用.

引理 3.6 如果$v_\gamma \in H^1(\mathbb{R}^N)$是问题(8)的正弱解, 则$v_\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$且存在一个独立于$\gamma$的常数$C^* > 0$, 使得$|v_\gamma|_\infty \leq C^*$.

证明 这个问题的结果可以参考文献 [7]的证明. 为简单起见, 我们用g表示g_γ, G^{-1}表示G_γ^{-1} 且用v 表示v_γ. 设$v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是$-\Delta v + V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}$的弱解, 即对于任意的$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}\varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}\varphi \mathrm{d}x, \tag{19}$$

由引理3.4, 可得$v > 0$. 设$T > 0$, 并定义

$$v_T = \begin{cases} v, & 0 < v \leq T, \\ T, & v \geq T. \end{cases}$$

在方程(19)中, 令$\varphi = v_T^{2(\eta-1)}v$ $(\eta > 1)$, 可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \cdot v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x + 2(\eta-1)\int_{\{x|v(x)<T\}} v_T^{2(\eta-1)-1} v|\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}v_T^{2(\eta-1)}v\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}v_T^{2(\eta-1)}v\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由引理2.1-(3)结合上述方程左侧的第二项是非负的, 对于任意的$\eta > 0$可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))}v_T^{2(\eta-1)}v\mathrm{d}x \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))}v_T^{2(\eta-1)}v\mathrm{d}x \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} v^p v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{20}$$

另一方面, 利用Sobolev不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(vv_T^{\eta-1})^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(vv_T^{\eta-1})|^2\mathrm{d}x\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x+C(\eta-1)^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x\\ &\leq C\eta^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里我们用到了$(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ 及$\eta^2\geq(\eta-1)^2+1$.
由式子(20), Hölder不等式及Sobolev嵌入定理

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(vv_T^{\eta-1})^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C\eta^2\int_{\mathbb{R}^N}v^{p-2}v^2v_T^{2(\eta-1)}\mathrm{d}x\\ &\leq C\eta^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}v^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(vv_T^{\eta-1})^{\frac{22^*}{2^*-p+2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-p+2}{2^*}}\\ &\leq C\eta^2\|v\|^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}v^{\frac{\eta22^*}{2^*-p+2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-p+2}{2^*}},\end{aligned}$$

这里我们使用了$0\leq v_T\leq v$. 接下来, 记$\zeta=\frac{22^*}{2^*-p+2}$, 得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}(vv_T^{\eta-1})^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}\leq C\eta^2\|v\|^{p-2}|v|_{\eta\zeta}^{2\eta}.$$

由Fatou引理可得

$$|v|_{\eta 2^*}\leq(C\eta^2\|v\|^{p-2})^{\frac{1}{2\eta}}|v|_{\eta\zeta}. \tag{21}$$

我们定义$\eta_{n+1}\zeta=2^*\eta_n$, 其中$n=0,1,2,...$和$\eta_0=\frac{2^*+2-p}{2}$. 由(21) 有

$$|v|_{\eta_1 2^*}\leq(C\eta_1^2\|v\|^{p-2})^{\frac{1}{2\eta_1}}|v|_{2^*\eta_0}\leq(C\|v\|^{p-2})^{\frac{1}{2\eta_1}+\frac{1}{2\eta_0}}\eta_0^{\frac{1}{\eta_0}}\eta_1^{\frac{1}{\eta_1}}|v|_{2^*}.$$

由Morse迭代

$$|v|_{\eta_n 2^*}\leq(C\|v\|^{p-2})^{\frac{1}{2\eta_0}\sum_{i=0}^n(\frac{\zeta}{2^*})^i}(\eta_0)^{\frac{1}{\eta_0}\sum_{i=0}^n(\frac{\zeta}{2^*})^i}(\frac{2^*}{\zeta})^{\frac{1}{\eta_0}\sum_{i=0}^n i(\frac{\zeta}{2^*})^i}|v|_{2^*}.$$

因此有

$$|v|_\infty\leq C\|v\|^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}\leq C^*.$$

定理 1.1的证明 由引理3.6及引理2.1-(3)有

$$|u_\gamma|_\infty=|G_\gamma^{-1}(v_\gamma)|_\infty\leq\sqrt{6}|v_\gamma|_\infty,$$

存在$\gamma_0 > 0$, 对任意$0 < \gamma < \gamma_0$有

$$|u_\gamma|_\infty = |G_\gamma^{-1}(v_\gamma)|_\infty \leq \sqrt{6}|v_\gamma|_\infty \leq \sqrt{6}C^* \leq \frac{1}{\sqrt{3\gamma}}.$$

因此, 对任意的$\gamma \in (0, \gamma_0)$, $u_\gamma = G^{-1}(v_\gamma)$是问题(6)的正解.

参考文献

[1] Adachi, S. and Watanabe, T. (2012) Asymptotic Properties of Ground States of Quasilinear Schrödinger Equations with H^1-Subcritical Exponent. *Advanced Nonlinear Studies*, **12**, 255-279. https://doi.org/10.1515/ans-2012-0205

[2] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 313-346. https://doi.org/10.1007/BF00250555

[3] Lions, P.L. (1984) The Concentration Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case. Part I and II. *Annales de l'Institut Henri Poincaré: Analyse Non Linéaire*, **109-145**, 223-283. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30422-x

[4] Borovskii, A. and Galkin, A. (1983) Dynamical Modulation of an Ultrashort High-Intensity Laser Pulse in Matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **77**, 562-573.

[5] Brandi, H., Manus, C., Mainfray, G., Lehner, T. and Bonnaud, G. (1993) Relativistic and Ponderomotive Self-Focusing of a Laser Beam in a Radially Inhomogeneous Plasma. *Physics of Fluids*, **5**, 3539-3550. https://doi.org/10.1063/1.860828

[6] Colin, M. and Jeanjean, L. (2004) Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equations: A Dual Approach. *Nonlinear Analysis*, **56**, 213-226. https://doi.org/10.1016/j.na.2003.09.008

[7] Alves, C., Wang, Y. and Shen, Y. (2015) Soliton Solutions for a Class of Quasilinear Schrödinger Equations with a Parameter. *Journal of Differential Equations*, **259**, 318-343. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.02.030

[8] Liu, J., Wang, Y. and Wang, Z.-Q. (2003) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations II. *Journal of Differential Equations*, **187**, 473-493. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00064-5

[9] Wang, Y. and Shen, Y. (2018) Existence and Asymptotic Behavior of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Schrödinger Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **18**, 131-150. https://doi.org/10.1515/ans-2017-6026

[10] Adachi, S., Shibata, M. and Watanabe, T. (2014) Asymptotic Behavior of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Elliptic Equations with General Nonlinearities. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **13**, 97-118. https://doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.97

[11] Adachi, S., Shibata, M. and Watanabe, T. (2020) Uniqueness of Asymptotic Limit of Ground States for a Class of Quasilinear Schrödinger Equation with H^1-Critical Growth in $\mathbb{R}^3$. *Applicable Analysis*, **101**, 671-691. https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1757079

[12] Adachi, S., Shibata, M. and Watanabe, T. (2014) Blow-Up Phenomena and Asymptotic Profiles of Ground States of Quasilinear Elliptic Equations with H^1-Supercritical Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **256**, 1492-1514. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.11.004

[13] Adachi, S., Shibata, M. and Watanabe, T. (2019) Asymptotic Property of Ground States for a Class of Quasilinear Schrödinger Equation with H^1-Critical Growth. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, Article No. 88. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1527-y

[14] Wang, Y. and Li, Z. (2018) Existence of Solutions to Quasilinear Schrödinger Equations Involving Critical Sobolev Exponent. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **22**, 401-420. https://doi.org/10.11650/tjm/8150

[15] Jeanjean, L. (1999) On the Existence of Bounded Palais-Smale Sequences and Application to a Landesman-Lazer Type Problem. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics*, **129**, 787-809. https://doi.org/10.1017/S0308210500013147

[16] Jeanjean, L. and Tanaka, K. (2003) A Remark on Least Energy Solutions in $\mathbb{R}^N$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 2399-2408. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06821-1

[17] Adachi, S. and Watanabe, T. (2011) G-Invariant Positive Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation. *Advances in Differential Equations*, **16**, 289-324. https://doi.org/10.57262/ade/1355854310