Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1056-1061
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134111

几类闭凸曲线的曲率积分不等式

张泽源*，**赵会文**

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘 要

Green-Osher不等式是一般严格凸函数的曲率积分不等式，本文则考虑一些常见的特殊凸函数在Green-Osher不等式中得到的曲率积分不等式，本文通过在Green-Osher不等式中，取平面闭凸曲线四类凸函数，得到了关于这些凸函数在曲率积分的精确下界，这些下界仅与弧长和面积有关。

关键词

凸函数，Green-Osher不等式，Steiner多项式

Curvature Integral Inequalities for Some Classes of Closed Convex Curves

Zeyuan Zhang*, **Huiwen Zhao**

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 张泽源, 赵会文. 几类闭凸曲线的曲率积分不等式[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1056-1061.
DOI: 10.12677/pm.2023.134111

Abstract

Green-Osher inequality is the integral of curvature for strictly convex functions in general, some special convex functions get curvature integral inequalities in Green-Osher inequality. In this paper, we apply four types of convex functions of plane closed convex curve to Green-Osher inequality. We get some exact lower bounds on the integration of these convex functions over the curvature. These lower bounds depend only on arc length and area.

Keywords

Convex Function, Green-Osher Inequality, Steiner Polynomial

1. 引言及主要结果

1999年, Mark Green和Stanley Osher在文 [1] 中研究了凸平面曲线曲率（即Wulff曲率）的凸函数积分的一些新不等式.此外还表明, 当区域在单位速度向外法向（分别为Wulff）流下流动时, 不等式两边之间的差异单调减小.

给定有界平面区域K, 当区域K是凸的时候, 有一个简单的封闭形式表达式来描述这些流动第一种情况下, 该区域收敛为圆盘, 第二种情况下收敛为Wulff 形状.当初始区域K是凸的时, 区域的面积是t中的多项式, 分别称为Steiner多项式或Wulff-Steiner 多项式.

这个方法的一个新特点是, 研究了Steiner和Wulff-Steiner多项式的根, 它们出现在t的负值.这两种情况下的经典等周不等式都表明, 这些多项式具有（负）实根$t_1 \geq t_2$, 并且当且仅当K不是圆盘（分别不是Wulff形状）时, 它们是不同的.

2014年, 马磊和曾春娜在文 [2]中研究平面卵形线的曲率积分不等式利用积分几何中凸集的支持函数以及外平行集的性质得到了等周不等式与曲率的熵不等式的一个积分几何的简化证明, 其中运用了文 [1]中Green-Osher给出的一系列关于曲率积分的等周不等式.

2015年, 涂康在文 [3]中研究了Wulff流情形下的积分不等式, 利用平面凸集的支持函数的性质

与分析方法, 得到了Wulff流情形下的一个新的积分不等式.

2022年，王亚玲, 董旭和曾春娜在文 [4]中研究了平面凸曲线的高次幂的曲率积分不等式，这些不等式为Green-Osher 不等式的改进形式, 其下界仅与弧长和面积有关.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{k} ds \geq \frac{15L^2 - 44\pi A}{8\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} k^n d\theta \geq \frac{\pi L^n + \pi[(2^{n-1} - 2)L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}](\sqrt{L^2 - 4\pi A})^{n-1}}{2^{n-1} A^n}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k^n} d\theta \geq \frac{L^n + [(2^{n-1} - 2)L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}](\sqrt{L^2 - 4\pi A})^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}}$$

Γ为严格凸的光滑曲线, 其周长记作L, 所围面积记作A, 曲率记作k, 对于$n \in N^+$, 且$n \geq 2$, 当且仅当Γ为圆周时等号成立.

本文不考虑Wullf形状，主要研究了在有界凸区域上的严格凸函数应用到Green-Osher不等式中得出的结果, 取平面闭凸曲线四类凸函数, 得到了关于这些凸函数在曲率积分的精确下界, 这些下界仅与弧长和面积有关.

本文的主要定理叙述如下:

定理1.1 设K是平面一有界凸域, 其周长记作L, 所围面积记作A, 设Γ为R^2中一闭凸曲线, 其曲率半径为$\frac{1}{k}$, 则

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{k}} d\theta \geq 2\pi e^{\frac{L}{2\pi}}, \tag{1.1}$$

当且仅当Γ为圆周时等号成立.

定理1.2 设K是平面一有界凸域, 其周长记作L, 所围面积记作A, 设Γ为R^2中一闭凸曲线, 其曲率半径为$\frac{1}{k}$, 则

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{k}} - e^{-\frac{1}{k}} d\theta \geq 2\pi(e^{\frac{L}{2\pi}} - e^{-\frac{L}{2\pi}}), \tag{1.2}$$

当且仅当Γ为圆周时等号成立.

定理1.3 设K是平面一有界凸域, 其周长记作L, 所围面积记作A, 设Γ为R^2中一闭凸曲线, 其曲率半径为$\frac{1}{k}$, 则

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{k}} + e^{-\frac{1}{k}} d\theta \geq 2\pi(e^{\frac{L}{2\pi}} + e^{\frac{-L}{2\pi}}), \tag{1.3}$$

当且仅当Γ为圆周时等号成立.

定理1.4 取固定周长的闭凸曲线, 设K是平面一有界凸域, 其周长记作L, 所围面积记作A, 设Γ为R^2 中一闭凸曲线, 其曲率半径为$\frac{1}{k}$, 则

$$\int_0^{2\pi} -k \ln \frac{1}{k} d\theta \geq 4\pi^2(1 - L) + \frac{\pi L}{A} \ln 2\pi, \tag{1.4}$$

当且仅当Γ为周长为1的圆时等号成立.

本文的结构安排

本文分为三个部分, 第一部分为引言和主要定理, 这部分主要介绍了Green-Osher不等式的研究背景及结果, 同时给出本文的研究目的和主要结果; 第二部分为预备知识, 这部分主要回顾了Green-Osher不等式与Steiner多项式的基础知识; 第三部分为主要定理的证明, 这部分主要利用Green-Osher不等式和Steiner多项式给出本文的主要定理证明.

2. 预备知识

定义2.1 [1, 4]设K是平面一有界凸域, 其周长记作L, 所围面积记作A. 记$A_K(t)$为$K+tB$的面积, 则对所有$t \geq 0$, 有

$$A_K(t) = A + Lt + \pi t^2; \tag{2.1}$$

此时，区域的面积是关于时间t的一个多项式, $A_K(t) = A + Lt + \pi t^2$称为$K$的Steiner多项式

设$t_1 \geq t_2$是Steiner多项式的两个根, 则

$$t_1 = \frac{-L+u}{2\pi}; \tag{2.2}$$

$$t_2 = \frac{-L-u}{2\pi}; \tag{2.3}$$

其中

$$u = \sqrt{L^2 - 4\pi A}.$$

定义2.2 [1, 4]设Γ为R^2中一光滑的闭凸曲线, 其曲率半径函数为$\rho(\theta)$.记$F(x)$是R^+ 上一严格凸函数, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} F(\rho(\theta))d\theta \geq \frac{1}{2}(F(-t_1)+F(-t_2)); \tag{2.4}$$

也可写做

$$\int_{S^1} F(\rho(\theta))d\theta \geq \pi(F(-t_1)+F(-t_2)); \tag{2.5}$$

当且仅当Γ为圆周时等号成立.其中, t_1和t_2是K的Steiner多项式的根.

3. 主要定理的证明

定理1.1的证明 将凸函数$F(x) = e^x$代入(2.5)的不等式中, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{k}} d\theta &\geq \pi(e^{-t_1} + e^{-t_2}) \\ &= \pi(e^{\frac{L-u}{2\pi}} + e^{\frac{L+u}{2\pi}}) \\ &= \pi e^{\frac{L}{2\pi}}(e^{\frac{-u}{2\pi}} + e^{\frac{u}{2\pi}}) \\ &\geq 2\pi e^{\frac{L}{2\pi}}\end{aligned} \tag{3.1}$$

最后一步运用均值不等式进行缩放, 得到了最终结果.当且仅当Γ为圆周时等号成立.

定理1.2的证明 将凸函数$F(x)=e^x-e^{-x}$代入(2.5)的不等式中, 同样运用一次均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{k}}-e^{-\frac{1}{k}}d\theta &\geq \pi[(e^{-t_1}+e^{-t_2})-(e^{t_1}+e^{t_2})]\\ &=\pi(e^{\frac{L-u}{2\pi}}+e^{\frac{L+u}{2\pi}}-e^{\frac{-L+u}{2\pi}}-e^{\frac{-L-u}{2\pi}})\\ &=\pi[e^{\frac{L}{2\pi}}(e^{\frac{-u}{2\pi}}+e^{\frac{u}{2\pi}})-e^{\frac{-L}{2\pi}}(e^{\frac{-u}{2\pi}}+e^{\frac{u}{2\pi}})]\\ &=\pi(e^{\frac{L}{2\pi}}-e^{\frac{-L}{2\pi}})(e^{\frac{-u}{2\pi}}+e^{\frac{u}{2\pi}})\\ &\geq 2\pi(e^{\frac{L}{2\pi}}-e^{\frac{-L}{2\pi}})\end{aligned} \tag{3.2}$$

当且仅当Γ为圆周时等号成立.

定理1.3的证明 将凸函数$F(x)=e^x+e^{-x}$代入(2.5)的不等式中, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{k}}+e^{-\frac{1}{k}}d\theta &\geq \pi[(e^{-t_1}+e^{-t_2})+(e^{t_1}+e^{t_2})]\\ &=\pi(e^{\frac{L-u}{2\pi}}+e^{\frac{L+u}{2\pi}}+e^{\frac{-L+u}{2\pi}}+e^{\frac{-L-u}{2\pi}})\\ &=\pi[e^{\frac{L}{2\pi}}(e^{\frac{-u}{2\pi}}+e^{\frac{u}{2\pi}})+e^{\frac{-L}{2\pi}}(e^{\frac{-u}{2\pi}}+e^{\frac{u}{2\pi}})]\\ &=\pi(e^{\frac{L}{2\pi}}+e^{\frac{-L}{2\pi}})(e^{\frac{-u}{2\pi}}+e^{\frac{u}{2\pi}})\\ &\geq 2\pi(e^{\frac{L}{2\pi}}+e^{\frac{-L}{2\pi}})\end{aligned} \tag{3.3}$$

当且仅当Γ为圆周时等号成立.

定理1.4的证明 将凸函数$F(x)=-\frac{\ln x}{x}$代入(2.5)的不等式中, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} -k\ln\frac{1}{k}d\theta &\geq \pi[-\frac{\ln(-t_1)}{-t_1}-\frac{\ln(-t_2)}{-t_2}]\\ &=-\pi(\frac{2\pi}{L-u}\ln\frac{L-u}{2\pi}+\frac{2\pi}{L+u}\ln\frac{L+u}{2\pi})\\ &=-2\pi^2[\frac{\ln(L-u)}{L-u}+\frac{\ln(L+u)}{L+u}-\frac{\ln 2\pi}{L-u}-\frac{\ln 2\pi}{L+u}]\\ &=2\pi^2[-\frac{\ln(L-u)}{L-u}-\frac{\ln(L+u)}{L+u}+\frac{2L}{4\pi A}\ln 2\pi]\\ &\geq 2\pi^2[-(L-u)+1-(L+u)+1+\frac{L}{2\pi A}\ln 2\pi]\\ &=4\pi^2(1-L)+\frac{\pi L}{A}\ln 2\pi\end{aligned} \tag{3.4}$$

此不等式应用了$-\frac{\ln x}{x}\geq -x+1$进行缩放.取固定周长的闭凸曲线, 当且仅当$\Gamma$为周长为1 的圆时等号成立.

本文优点

本文的结果在定义了Green-Osher不等式的基础上对之前的结果进行了推广, 相对于之前已有

的结果, 会更丰富一些.

展 望

本文不考虑Wullf形状，只研究了在有界凸区域上的严格凸函数应用到Green-Osher不等式中得出的结果, 但如果是Wullf流的情况下, 其曲率积分不等式会有怎样不同？

参考文献

[1] Green, M. and Osher, S. (1999) Steiner Polynomials, Wulff Flows, and Some New Isoperimetric Inequalities for Convex Plane Curves. *Asian Journal of Mathematics*, **3**, 659-676. https://doi.org/10.4310/AJM.1999.v3.n3.a5

[2] 马磊, 曾春娜. 关于曲率积分不等式的注记[J]. 数学杂志, 2014, 34(5): 925-930. https://doi.org/10.13548/j.sxzz.2014.05.040

[3] 涂康. Wulff流情形下的一个积分不等式[J]. 广东石油化工学院学报, 2015, 25(1): 67-68+73.

[4] 王亚玲, 董旭, 曾春娜, 王星星. 凸曲线的曲率积分不等式[J/OL]. 数学学报(中文版): 1-10. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2038.o1.20221108.1653.008.html