Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1079-1082
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134114

Hans 汉斯

关于极大线性无关组和线性空间中基的扩充问题的讨论

杨晓梅，孟吉翔，赵　飚

新疆大学数学与系统科学学院，新疆　乌鲁木齐

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘　要

线性空间是线性代数中一个重要的研究对象，基与维数又能决定一个线性空间的结构，因此在已知的线性空间中找到满足要求的基是一个值得探讨的问题。本文根据线性空间中的扩充基定理，讨论了由给定线性无关的向量组扩充成一个极大线性无关组，以及在线性空间扩充成一组基的一般解法，旨在加深学生对极大线性无关组以及线性空间中基的理解。

关键词

线性空间，线性无关，极大线性无关组，基

Discussion on the Expansion of Maximum Linear Independent Groups and Bases in Vector Space

Xiaomei Yang, Jixiang Meng, Biao Zhao

College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

Linear space is an important research object in linear algebra, and the basis and dimension can determine the structure of a linear space. So it is a worthwhile problem to find the required basis in a linear space. In this paper, according to the expansion basis theorem in the linear space, we discuss how to find the maximum linear independent vector group or the basis for a given linear

文章引用：杨晓梅，孟吉翔，赵飚．关于极大线性无关组和线性空间中基的扩充问题的讨论[J]．理论数学，2023，13(4)：1079-1082．DOI: 10.12677/pm.2023.134114

independent list in the linear space. It can promote the students' understanding of the maximum linear independent vector group and the bases in the linear space.

Keywords

Linear Space, Linear Independent, Maximum Linear Independent Group, The Basis of Linear Space

1. 引言

线性空间是线性代数中的一个重要概念，是我们研究线性代数的核心，在现代数学研究中有着广泛的应用[1] [2]。在一个线性空间中，基与维数决定了它的结构，描述了它的很多属性，所以按照实际应用的需要选定满足要求的基是一个值得探讨的问题[3] [4]，线性空间上的扩充基定理正是解决这个问题的重要依据，文献[1] [2]都对扩充基定理给出了证明，但是对于给定线性空间上一组线性无关的向量组，如何将该向量组扩充为线性空间的具体算法并没有一般的解法。本文就这个问题从向量组的极大线性无关组的扩充到线性空间上基的扩充问题提出了一个一般且有效的解法。

定理 1：(扩充基定理)设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 t 维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是 W 的一组基，那么这组向量必定可扩充为整个空间的基，也就是说，在 V 中必定可以找到 $n-t$ 个向量 $\alpha_{t+1},\alpha_{t+2},\cdots,\alpha_n$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基。

引理 1 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与它的任意置换 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$ 等价，故极大无关组相同。

首先，我们讨论将含有有限个向量的向量组中任意给定线性无关的部分组扩充为该向量组的极大无关组。

2. 向量组中极大无关组的扩充问题

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r$，其中 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$，$(s\le r)$ 线性无关，将 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$ 扩充成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组。

方法：根据引理 1 可知，考虑 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组，仅需考虑

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s},\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i_1-1},\alpha_{i_1+1},\cdots,\alpha_{i_2-1},\alpha_{i_2+1},\cdots,\alpha_{i_s-1},\alpha_{i_s+1},\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组。

例 1 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(3,0,7,14)$，$\alpha_3=(1,-1,2,0)$，$\alpha_4=(2,1,5,6)$，$\alpha_5=(0,3,1,2)$，把 α_1,α_5 扩充成一个极大无关组。

由引理 1 可知，本问题可以转化为求解 $\alpha_1,\alpha_5,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大无关组。

解：$$\left(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_5^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^{\mathrm{T}}\right)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故 所求极大无关组可以是 $\alpha_1,\alpha_5,\alpha_3$ 或者 $\alpha_1,\alpha_5,\alpha_4$。

这里我们依然利用矩阵的初等变换求解极大线性无关组，注意到用这一方法选择向量组的极大线性无关组时，通常进入备选队列的向量都排在向量组的前面，故只须将必选向量调换顺序，即可找到满足

条件的极大线性无关组。

3. 数域 P 上的 n 维向量空间 P^n 的子空间中基的扩充问题

已知数域 P 上的 n 维向量空间 P^n，W 是其线性子空间，$\dim W = r$，若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \in W(s \le r)$，且线性无关，将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 扩充为 W 的一组基。

方法：根据引理 1 可知，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是子空间 W 的一组基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \in W(s \le r)$ 线性无关，显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的极大无关组也是子空间 W 的一组基。

例 2 设 $W = P^4$，$\beta_1 = (1,-1,2,4),\beta_2 = (3,0,7,14) \in P^4$，把 β_1,β_2 扩充成 W 的一组基。

显然

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,0),\quad \varepsilon_2 = (0,1,0,0),\quad \varepsilon_3 = (0,0,1,0),\quad \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$$

是 W 的一组基。要求找到包含 β_1,β_2 的一组基，仅需考虑 $\beta_1,\beta_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 的包含 β_1,β_2 的极大无关组。

$$\left(\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\varepsilon_1^{\mathrm{T}},\varepsilon_2^{\mathrm{T}},\varepsilon_3^{\mathrm{T}},\varepsilon_4^{\mathrm{T}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

故 所求包含 β_1,β_2 的基可以是 $\beta_1,\beta_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3$，或者 $\beta_1,\beta_2,\varepsilon_1,\varepsilon_4$，或者 $\beta_1,\beta_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，或者 $\beta_1,\beta_2,\varepsilon_2,\varepsilon_4$。

通过分析与例 2，我们可以看出，事实上，考虑到子空间 $W = L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，因此，寻找线性子空间 W 的满足条件的一组基，就是求解向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中含有向量 β_1,β_2 的极大线性无关组。

4. 数域 P 上的 n 维线性空间的子空间中基的扩充问题

已知数域 P 上的 n 维线性空间 V，W 是其线性子空间，$\dim W = r$，若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \in W(s \le r)$，且线性无关，将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 扩充为 W 的一组基。

引理 2 数域 P 上的任意一个 n 维线性空间都与向量空间 P^n 同构。

方法：同 2 的讨论，若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 是子空间 W 的一组基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 的极大无关组也是子空间 W 的一组基。

而

$$\beta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{r1}\varepsilon_r, \beta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{r2}\varepsilon_r, \cdots, \beta_s = a_{1s}\varepsilon_1 + a_{2s}\varepsilon_2 + \cdots + a_{rs}\varepsilon_r$$

那么求解 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 的极大无关组，仅需考虑向量组

$\beta_1 = (a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}),\beta_2 = (a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}),\cdots,\beta_s = (a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{rs})$，

$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0,0),\varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0,0),\cdots,\varepsilon_r = (0,0,\cdots,0,1)$ 的极大无关组。

例 3 设 $W = P[x]_4$，$g_1(x) = 1 + x$，$g_2(x) = 1 + x + x^2 \in W$。

把 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 扩充成 W 的一组基。

解：取 V 上的一组基 $f_1(x) = 1$，$f_2(x) = x$，$f_3(x) = x^2$，$f_4(x) = x^3$。

显然

$$g_1(x) = 1 + x = f_1(x) + f_2(x),\quad g_2(x) = 1 + x + x^2 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

于是仅需考虑 $g_1(x),g_2(x),f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$ 在基 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$ 下的坐标：

$\beta_1=(1,1,0,0)$，$\beta_2=(1,1,1,0)$，$\varepsilon_1=(1,0,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4=(0,0,0,1)$的极大无关组。

$$\left(\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\varepsilon_1^{\mathrm{T}},\varepsilon_2^{\mathrm{T}},\varepsilon_3^{\mathrm{T}},\varepsilon_4^{\mathrm{T}}\right)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故 所求包含$g_1(x),g_2(x)$的基可以是$g_1(x),g_2(x),f_1(x),f_4(x)$或者$g_1(x),g_2(x),f_2(x),f_4(x)$。

通过分析和例 3，对于比较抽象的线性空间，我们可以通过该线性空间中每个向量与坐标的一一对应关系，将问题利用线性空间的同构关系，转化为数域P上的n维向量空间P^n的子空间中基的扩充问题。

基金项目

新疆维吾尔自治区高等学习本科教育教学研究和改革项目“融入思政元素的《线性代数》混合式教学的探索与研究(XJU-2021JG13)”。

参考文献

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组，编，王萼芳，石生明，修订. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京：高等教育出版社, 2019:70-104, 160-174.

[2] 丘维声. 高等代数(下册)[M]. 北京：清华大学出版社, 2019: 1-10.

[3] 徐助跃. 关于扩充基定理的一个注记[J]. 数学学习与研究, 2021(12): 143-144.

[4] 方龙飞，王兵. 浅谈线性映射在不同基下的矩阵表示及应用[J]. 数学学习与研究, 2021(13): 10-11.