Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 968-975
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134102

第一类柯西奇异积分方程的有效配置求解法

陈 锐[1]，陈 冲[2*]

[1]西华师范大学数学与信息学院，四川 南充
[2]西华师范大学公共数学学院，四川 南充

收稿日期：2023年3月19日；录用日期：2023年4月20日；发布日期：2023年4月27日

摘 要

本文提出了求解第一类柯西奇异积分方程的一种有效配置法，即基于q-Bessel多项式并结合第一类、第二类高斯－切比雪夫求积公式的离散配置法将第一类柯西奇异积分方程转化为线性方程组进行近似求解，结合插值理论对该方法进行误差分析。通过数值算例验证了该方法的可行性和有效性。

关键词

柯西奇异积分方程，q-Bessel多项式，高斯－切比雪夫求积公式，误差分析

The Efficient Collocation Method for Solving the First Kind of Cauchy Singular Integral Equation

Rui Chen[1], Chong Chen[2*]

[1]College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan
[2]College of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Mar. 19th, 2023; accepted: Apr. 20th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

This paper presents an efficient collocation method to solve Cauchy singular integral equations of the first kind. Namely, based on the q-Bessel polynomial and the discrete collocation method of the first and second Gauss-Chebyshev quadrature formulas, the first Cauchy singular integral equation is transformed into a linear system of equations for approximate solution, and the error

*通讯作者。

文章引用: 陈锐, 陈冲. 第一类柯西奇异积分方程的有效配置求解法[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 968-975.
DOI: 10.12677/pm.2023.134102

analysis of the method is carried out by combining the interpolation theory. The effectiveness and feasibility of the method are verified by numerical examples.

Keywords

Cauchy Singular Integral Equation, q-Bessel Polynomial, Gauss-Chebyshev Quadrature Formula, Error Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

奇异积分方程按照核函数可分为弱奇异积分方程、柯西奇异积分方程和超奇异积分方程[1]。其中，柯西奇异积分方程中的积分是在柯西主值意义下讨论积分的存在问题。随着科学技术的发展，柯西奇异积分方程也越来越广泛地应用到实际生活中，比如：断裂力学、接触辐射、分子传导、弹性动力学、电磁学、电子工程、生物力学、自动控制理论、博弈论，甚至在医药学和经济学等[2]-[7]诸多领域都发挥着极其重要的作用。

某些柯西奇异积分方程很难找到解析解，因此众多研究者已经开发了几种精度较高的数值方法来求解这些奇异积分方程。例如配置法，其中使用 Lagrange 插值与 Guass-Jacobi 求积样条法[8]、Hermite 插值方法[9]以及多项式，如：Jacobi 多项式[10]，第二类 Chebyshev 多项式[11]，正交 Legendre 多项式[12]，Bernstein 多项式[13] [14]，以及 Bessel 多项式[15]等逼近待求函数，进而求解柯西奇异积分方程。

柯西型奇异积分方程定义如下

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-s}\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}k(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(s),\quad -1<s<1, \tag{1}$$

这里 $\varphi(s)$ 为未知函数， $f(s)$ 为已知函数。若核函数 $k(s,t)=0$ 时，则方程(1)被称为广义翼型方程，在空气动力学中，它可以简化为如下的翼型方程

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-s}\mathrm{d}t=f(s),\quad -1<s<1. \tag{2}$$

本文将基于 q-Bessel 多项式的配置法求解第一类柯西奇异积分方程。文献[16]中给出了方程(2)的各类情况下解析解的形式，即

$$\varphi(s)=\varphi_j(s), \tag{3}$$

这里 $j=1,2,3,4$，分别对应四种情况，具体如下：

(*i*) 当 $\varphi(s)$ 在 $s=\pm1$ 上有界时，则

$$\varphi_1(s)=-\frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-s)}\mathrm{d}t, \tag{4}$$

前提是 $\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=0$。

(ii) 当 $\varphi(s)$ 在 $s=\pm1$ 上无界时，则

$$\varphi_2(s)=-\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-s^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-s}f(t)\mathrm{d}t+\frac{w}{1-s^2},\tag{5}$$

这里 $w=\int_{-1}^{1}\varphi_2(t)\mathrm{d}t$。

(iii) 当 $\varphi(s)$ 在 $s=1$ 上有界，在 $s=-1$ 上无界时，则

$$\varphi_3(s)=-\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{f(t)}{(t-s)}\mathrm{d}t.\tag{6}$$

(iv) 当 $\varphi(s)$ 在 $s=-1$ 有界，在 $s=1$ 上无界时，则

$$\varphi_4(s)=-\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{f(t)}{(t-s)}\mathrm{d}t.\tag{7}$$

2. q-Bessel 多项式及函数逼近

n 阶 q-Bessel 多项式 $y_{n,q}(x)$ 的显示公式定义如下[17]

$$\begin{cases} y_{0,q}(x)=1, \\ y_{n,q}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{[n+k]_q!}{2^k[n-k]_q![k]_q!}x^k, \end{cases}\tag{8}$$

这里 $k=0,1,\cdots,n$ 和 $0<q<1$，并且上式在[−1, 1]上一致绝对收敛。

接下来，构造方程(2)在(i)、(ii)、(iii)和(iv)四种情况下截断的 q-Bessel 多项式级数形式，即

$$\begin{aligned}&\text{(i) } x(s)\simeq x_n(s)=\sum_{i=0}^{n}x_{1,j}y_{i,n}(s),\quad \text{(ii) } x(s)\simeq x_n(s)=\sum_{i=0}^{n}x_{2,j}y_{i,n}(s),\\ &\text{(iii) } x(s)\simeq x_n(s)=\sum_{i=0}^{n}x_{3,j}y_{i,n}(s),\quad \text{(iv) } x(s)\simeq x_n(s)=\sum_{i=0}^{n}x_{4,j}y_{i,n}(s).\end{aligned}\tag{9}$$

这里 $x_{j,i},(i=0,1,\cdots,n),(j=1,2,3,4)$ 是未知的 q-Bessel 系数。当 $n\to\infty$ 时，有 $x(s)=x_n(s)$。

对于方程(2)解析解的近似解可由下列关系所表示[18]

$$\varphi_j(s)=\omega_j(s)x(s),\quad j=1,2,3,4,\tag{10}$$

其中 $x(s)$ 是区间[−1, 1]上基于 q-Bessel 多项式的函数，具体形式见等式(9)，且四种情况下所对应的权函数为

$$\omega_1(s)=\frac{1-s^2}{\sqrt{1-s^2}},\omega_2(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}},\omega_3(s)=\frac{1-s}{\sqrt{1-s^2}},\omega_4(s)=\frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}}.\tag{11}$$

3. 方法构造

由于柯西奇异积分方程存在奇异性，需将方程(2)转换成等价的积分方程，则(i)通过(3)、(10)和(11)可得

$$\varphi_1(s)=\frac{1-s^2}{\sqrt{1-s^2}}x(s)=\sqrt{1-s^2}x(s),\quad s\in[-1,1].\tag{12}$$

将(12)代入方程(2)，有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)}{t-s}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)-x(s)}{t-s}\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(s)}{t-s}\mathrm{d}t=f(s). \tag{13}$$

由于 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(s)}{t-s}\mathrm{d}t=-\pi sx(s)$，消除其奇异性，则方程(13)转换成

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)-x(s)}{t-s}\mathrm{d}t-\pi sx(s)=f(s),\quad s\in[-1,1] \tag{14}$$

(ii) 同理将 $\varphi_2(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}x(s)$ 代入方程(2)有

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x(t)-x(s)}{t-s}\mathrm{d}t=f(s),\quad s\in(-1,1). \tag{15}$$

(iii) 同理将 $\varphi_3(s)=\sqrt{\frac{1-s}{1+s}}x(s)$ 代入方程(2)有

$$\frac{1}{1+s}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)-x(s)}{t-s}\mathrm{d}t-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)}{1+t}\mathrm{d}t\right)-\frac{\pi sx(s)}{1+s}=f(s),\quad s\in(-1,1]. \tag{16}$$

(iv) 同理将 $\varphi_4(s)=\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}x(s)$ 代入方程(2)有

$$\frac{1}{1-s}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)-x(s)}{t-s}\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{x(t)}{1-t}\mathrm{d}t\right)-\frac{\pi sx(s)}{1-s}=f(s),\quad s\in[-1,1). \tag{17}$$

综上，此时方程(14)、(15)、(16)和(17)，由于 $\frac{x(t)-x(s)}{t-s}=x'(s)$，当 $t=s$ 时，原方程的奇异性被消除。选取配置点

$$s_m=-1+\frac{2}{a+2}(m+1),\quad m=0,1,\cdots,a, \tag{18}$$

其中，s_m 表示选取 $a+1$ 个根中的第 m 个节点。

对于方程(14)、(15)、(16)和(17)左端积分项，则选取高斯－切比雪夫求积公式进行离散，即：情况(ii)选取第一类高斯－切比雪夫求积公式，情况(i)、(iii)、(iv)则选取第二类高斯－切比雪夫求积公式，同时将(9)和(18)代入方程(14)、(15)、(16)和(17)可得

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}w_k\frac{y_{i,q}(t_k)-y_{i,q}(s_m)}{t_k-s_m}-y_{i,q}(s_m)\pi s_m\right]x_{1,i}=f(s_m),\\
&\text{(ii)}\ \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}w_k\frac{y_{i,q}(t_k)-y_{i,q}(s_m)}{t_k-s_m}\right]x_{2,i}=f(s_m),\\
&\text{(iii)}\ \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\sum_{k=1}^{N}w_k\frac{y_{i,q}(t_k)-y_{i,q}(s_m)}{t_k-s_m}-\sum_{k=1}^{N}w_k\frac{y_{i,q}(t_k)}{1+t_k}}{1+s_m}-\frac{\pi s_m y_{i,q}(s_m)}{1+s_m}\right]x_{3,i}=f(s_m),\\
&\text{(iv)}\ \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\sum_{k=1}^{N}w_k\frac{y_{i,q}(t_k)-y_{i,q}(s_m)}{t_k-s_m}-\sum_{k=1}^{N}w_k\frac{y_{i,q}(t_k)}{1+t_k}}{1-s_m}-\frac{\pi s_m y_{i,q}(s_m)}{1-s_m}\right]x_{4,i}=f(s_m),
\end{aligned} \tag{19}$$

其中对于(i)、(iii)、(iv)有

$$t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right),\quad w_k = \frac{\pi}{N+1}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right)^2, \tag{20}$$

对于(ii)有

$$t_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right),\quad w_k = \frac{\pi}{N},\quad k = 1,2,\cdots,N, \tag{21}$$

其中，t_k 表示为 Chebyshev 多项式 T_N 的第 k 阶根，w_k 为相应权函数。

计算线性方程组(19)可求得相应的未知系数 $x_{j,i}, i = 0,1,\cdots,n; j = 1,2,3,4$，再代入式(9)，将所得结果和式(11)一并代入式(10)，便可得到四种情况下的近似解 φ_n。

4. 误差分析

本节将对上述方法进行误差分析。由于四种情况下证明误差分析的方法是一致的，故对情形(i)给出证明，对于情形(ii)、情形(iii)和情形(iv)证明一致。

定理 1. [14]设 g 是 $C^{n+1}[-1,1]$ 上的函数，p_n 是一个不超过 n 阶的多项式，且为 g 的插值多项式。函数 g 有 $n+1$ 个节点 $s_0, s_1, \cdots, s_n \in [-1,1]$，则存在一个数 $\xi_s \in [-1,1]$ 有

$$g(s) - p_n(s) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(s - s_i)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi_s).$$

设 $\omega_j g, j = 1,2,3,4$ 是方程(2)的精确解，p_n 为 g 的插值多项式。若 g 足够光滑，可把 g 写成 $g = p_n + R_n$，这里 R_n 是误差函数，即

$$R_n(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)\cdots(s-s_n)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi_s),\quad \xi_s \in (-1,1).$$

定理 2. 对于情形(i)，设 $x(s)$ 和 $g(s)$ 是方程(14)的 q-Bessel 多项式级数解和精确解，则 $\varphi_n(s) = \omega_1(s)x(s)$ 和 $\omega_1(s)g(s)$ 是方程(2)的 q-Bessel 多项式级数解和精确解。$P_n(s)$ 表示 $g(s)$ 的插值多项式，且 $g(s)$ 足够光滑，则

$$\left|\omega_1(s)g(s) - \varphi_n(s)\right| \le M_1\left(\left|R_n(s)\right| + M_2\right),$$

这里 $\max\limits_{-1\le s\le 1}\left|\omega_1(s)\right| \le M_1$ 和 $\max\limits_{0\le i\le n}\left|x_{1,i} - \overline{x}_{1,i}\right| \le M_2$，其中 $\overline{x}_{1,i}$ 是 $x_{1,i}$ 关于基函数的展式。

证明 基于给定假设，有

$$\begin{aligned}
\left|\omega_1(s)g(s) - \varphi_n(s)\right| &= \left|\omega_1(s)g(s) - \omega_1(s)p_n(s) + \omega_1(s)p_n(s) - \varphi_n(s)\right| \\
&\le \left|\omega_1(s)g(s) - \omega_1(s)p_n(s)\right| + \left|\varphi_n(s) - \omega_1(s)p_n(s)\right| \\
&\le \left|\omega_1(s)R_n(s)\right| + \left|\omega_1(s)\sum_{i=0}^{n} x_{1,i}y_{i,q}(s) - \omega_1(s)\sum_{i=0}^{n}\overline{x}_{1,i}y_{i,q}(s)\right| \\
&\le \left|\omega_1(s)\right|\left|R_n(s)\right| + \left|\omega_1(s)\right|\left|\sum_{i=0}^{n}\left(x_{1,i} - \overline{x}_{1,i}\right)y_{i,q}(s)\right| \\
&\le M_1\left|R_n(s)\right| + M_1M_2\left|\sum_{i=0}^{n} y_{i,q}(s)\right|,
\end{aligned}$$

这里 $-1 < s < 1$。

同理，对于情形(ii)、情形(iii)和情形(iv)证明类似。

5. 数值算例

例[18]求解如下的第一类柯西奇异积分方程

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-s}\mathrm{d}t=f(s),\quad -1<s<1, \tag{22}$$

其中 $f(s)=s^4+5s^3+2s^2+s-\frac{11}{8}$。四种情况下方程(22)的解析解分别如下

$$\text{(i)}\ \varphi(s)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{1-s^2}\left(s^3+5s^2+\frac{5}{2}s+\frac{7}{2}\right),\quad \text{(ii)}\ \varphi(s)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-s^2}}\left(s^5+5s^4+\frac{3}{2}\left(s^3-s^2\right)-\frac{5}{2}s-\frac{7}{2}\right),$$

$$\text{(iii)}\ \varphi(s)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\left(s^4+6s^3+\frac{15}{2}s^2+6s+\frac{7}{2}\right),\quad \text{(iv)}\ \varphi(s)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}\left(s^4+4s^3-\frac{5}{2}s^2+s-\frac{7}{2}\right).$$

对于方程(22)，首先基于 q-Bessel 多项式构造近似函数，然后对四种情况下的未知函数 $\varphi(s)$ 基于所构造的近似函数和所对应的权函数进行离散，结合高斯－切比雪夫求积公式对积分项进行近似，取 $n=3$，$\boldsymbol{N}=6$，为了计算统一，取 $q=\frac{1}{2}$。此时四种情况下，方程(22)在所对应节点处的准确解、近似解、绝对误差以及与文献[18]中的方法作比较的结果见表 1~4。由表中数据可得，该方法具有较小误差，良好的计算效果。

Table 1. The result of the calculation of Equation (22) in case (i)
表 1. 方程(22)在情况(i)下的计算结果

节点	精确解	文中方法		文献[18]
		近似解	绝对误差	绝对误差
−0.9	−0.634217	−0.634217	9.410370e−16	4.497e−9
−0.6	−0.912658	−0.912658	1.567973e−15	2.429e−8
−0.3	−0.963476	−0.963476	1.390819e−15	1.105e−10
0.0	−1.11408	−1.11408	1.114084e−15	1.303e−9
0.3	−1.43535	−1.43535	1.019025e−15	7.120e−10
0.6	−1.78661	−1.78661	9.674807e−16	2.4470e−8
0.9	−1.46088	−1.46088	4.985279e−16	1.136e−8

Table 2. The result of the calculation of Equation (22) in case (ii)
表 2. 方程(22)在情况(ii)下的计算结果

节点	精确解	文中方法		文献[18]
		近似解	绝对误差	绝对误差
−0.9	−0.634217	−0.634217	1.468521e−15	9.001e−7
−0.6	−0.912658	−0.912658	2.247970e−15	1.382e−7
−0.3	−0.963476	−0.963476	1.780476e−15	2.289e−7
0.0	−1.11408	−1.11408	1.114084e−15	2.287e−7
0.3	−1.43535	−1.43535	3.058442e−16	2.499e−7
0.6	−1.78661	−1.78661	3.372817e−16	3.1964e−7
0.9	−1.46088	−1.46088	9.448995e−17	9.580e−7

Table 3. The result of the calculation of Equation (22) in case (iii)
表 3. 方程(22)在情况(iii)下的计算结果

节点	精确解	文中方法		文献[18]
		近似解	绝对误差	绝对误差
−0.9	−0.634217	−0.634217	2.127684e−15	9.949e−9
−0.6	−0.912658	−0.912658	9.635354e−16	4.933e−8
−0.3	−0.963476	−0.963476	6.325060e−16	1.892e−9
0.0	−1.11408	−1.11408	8.175145e−16	9.718e−10
0.3	−1.43535	−1.43535	1.338474e−15	9.611e−10
0.6	−1.78661	−1.78661	2.003232e−15	7.964e−7
0.9	−1.46088	−1.46088	2.591231e−15	1.154e−7

Table 4. The result of the calculation of Equation (22) in case (iv)
表 4. 方程(22)在情况(iv)下的计算结果

节点	精确解	文中方法		文献[18]
		近似解	绝对误差	绝对误差
−0.9	−0.634217	−0.634217	2.006178e−15	2.594e−8
−0.6	−0.912658	−0.912658	1.362669e−15	3.486e−7
−0.3	−0.963476	−0.963476	1.001508e−15	8.386e−9
0.0	−1.11408	−1.11408	8.175145e−16	7.021e−9
0.3	−1.43535	−1.43535	7.516857e−16	7.156e−9
0.6	−1.78661	−1.78661	6.421409e−16	2.385e−8
0.9	−1.46088	−1.46088	2.077789e−16	1.901e−8

6. 总结

在工程问题上，经常会将问题转化成第一类柯西奇异积分方程(即翼型积分方程)的形式，因此学者们尝试寻求对该方程更简便的求法。本文基于 q-Bessel 多项式构造近似函数，结合相应的权函数分别对四种情况下的待求函数进行离散，同时采用高斯－切比雪夫求积公式对积分项进行离散，即情况(ii)则采用第一类高斯－切比雪夫求积公式，情况(i)、(iii)、(iv)则采用第二类高斯－切比雪夫求积公式，最后得到相应的线性代数方程组。通过计算数值算例验证该方法具有有效性和可行性。

基金项目

国家自然科学青年基金项目：(11801456)。

博士启动基金项目：(17E083)。

参考文献

[1] 黄晋. 多维奇异积分方程的高精度算法[M]. 北京：北京科学出版社, 2007.

[2] Wen, Q. and Du, Q.G. (2020) An Approximate Numerical Method for Solving Cauchy Singular Integral Equations Composed of Multiple Implicit Parameter Functions with Unknown Integral Limits in Contact Mechanics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **482**, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123530

[3] 崔智刚, 刘铁军. 压电涂层-功能梯度压电界面层-基底结构的二维接触问题研究[J]. 固体力学学报, 2022, 43(3): 284-295.

[4] 臧炜煜, 刘铁军. 功能梯度压电界面层在球形压头作用下的接触问题[J/OL]. 应用力学学报, 2023: 1-11. http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1112.O3.20221202.1250.001.html, 2023-04-24

[5] 小巴桑次仁, 多布杰, 德吉玉珍, 等. 基于电磁波反问题的一类非线性积分方程解的唯一性[J]. 高原科学研究, 2022, 6(2): 109-112.

[6] 戴世坤, 陈轻蕊, 凌嘉宣, 李昆. 空间-波数域三维大地电磁场积分方程数值模拟[J]. 地球物理学报, 2022, 65(6): 2294-2310.

[7] Zolotov, N.B. and Pozharskii, D.A. (2022) Periodic Contact Problems for a Half-Space with a Partially Fixed Boundary. *Mechanics of Solids*, **57**, 1758-1765. https://doi.org/10.3103/S0025654422070202

[8] Jin, X., Keer, L.M. and Wang, Q. (2008) A Practical Method for Singular Integral Equations of the Second Kind. *Engineering Fracture Mechanics*, **75**, 1005-1014. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.04.024

[9] Moghaddam, B.P., Tenreiro, J.A., Shajari, P.S., and Mostaghim, Z.S. (2020) A Numerical Algorithm for Solving the Cauchy Singular Integral Equation Based on Hermite Polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **49**, 974-983.

[10] Karczmarek, P., Pylak, D. and Sheshko, M.A. (2006) Application of Jacobi Polynomials to Approximate Solution of a Singular Integral Equation with Cauchy Kernel. *Applied Mathematics and Computation*, **181**, 697-707. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.01.054

[11] Eshkuvatov, Z.K., Nik Long, N.M.A. and Abdulkawi, M. (2009) Approximate Solution of Singular Integral Equations of the First Kind with Cauchy Kernel. *Applied Mathematics and Letter*, **22**, 651-657. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.08.001

[12] Setia, A., Sharma, V. and Liu, Y. (2015) Numerical Solution of Cauchy Singular Integral Equation with an Application to a Crack Problem. *Neural*, *Parallel and Scientific Computations*, **23**, 387-392.

[13] Setia, A. (2014) Numerical Solution of Various Cases of Cauchy Type Singular Integral Equation. *Applied Mathematics and Compution*, **230**, 200-207. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.114

[14] Seifi, A., Lotfi, T., Allahviranloo, T. and Paripour, M. (2017) An Effective Collocation Technique to Solve the Singular Fredholm Integral Equations with Cauchy Kernel. *Advances in Difference Equations*, **2017**, Article No. 280. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1339-3

[15] Seifi, A. (2020) Numerical Solution of Certain Cauchy Singular Integral Equations Using a Collocation Scheme. *Advances in Different Equations*, **2020**, Article No. 537. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02996-0

[16] Lifanov, I.K. (1996) Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Walter De Gruyter Incorporated, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110926040

[17] Mumtaz, R. and Subuhi, K. (2019) A Determinant Approach to q-Bessel Polynomials and Applications. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, *Físicas y Naturales*. *Serie A*. *Matemáticas*, **113**, 1571-1583. https://doi.org/10.1007/s13398-018-0568-y

[18] Dezhbord, A., Lotfi, T. and Mahdiani, K. (2016) A New Efficient Method for Cases of the Singular Integral Equation of the First Kind. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **296**, 156-169. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.09.029