Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 766-780
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134080

Hans汉斯

更高分数阶Laplacian方程的径向解

杨　飒，魏公明

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年3月6日；录用日期：2023年4月5日；发布日期：2023年4月12日

摘　要

主要研究了一类分数阶Laplacian方程的径向解问题。在分数阶径向Sobolev空间$W_r^{s,2}\left(R^N\right)$中，通过相关定理获得所取极小化序列的估计，对方程的泛函利用变分法、约束极值获得了解的对称性结果。获得的结果与经典的p-Laplacian方程以及Schrödinger方程一致。

关键词

Fourier变换，嵌入定理，径向函数，约束极值

Radial Solutions of Fractional Laplacian Equations

Sa Yang, Gongming Wei

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 6th, 2023; accepted: Apr. 5th, 2023; published: Apr. 12th, 2023

Abstract

This paper mainly studies the radial solution of a class of fractional Laplacian equations. In the fractional radial Sobolev space $W_r^{s,2}\left(R^N\right)$, the estimation of the minimization sequence is obtained by using the correlation theorem, and the symmetry results of the solution are obtained by using the variational method and constrained extremum for the functional of the equation. The results obtained are consistent with the classical p-Laplacian equation and Schrodinger equation.

Keywords

Fourier Transform, Embedding Thereom, Radial Function, Constrained Minimization Method

文章引用: 杨飒, 魏公明. 更高分数阶 Laplacian 方程的径向解[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 766-780.
DOI: 10.12677/pm.2023.134080

1. 引言

本文将研究方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u-\Delta u+u=|u|^{p-1}u, & x\in R^N,\\ u\in H_r^s\left(R^N\right), & u\neq 0,\end{cases} \tag{1}$$

的径向解，其中$1<p<\dfrac{N+2s}{N-2s}, 1<s<2$。

在最近的几十年里，关于分数阶拉普拉斯算子$(-\Delta)^s u$，$s\in(0,1)$的相关研究已经有很多，可见[1] [2] [3] [4]。分数阶拉普拉斯算子有关的方程也被应用到很多方面，例如金融模型，生态学，物理模型，图像加工等等。同时关于该算子的正则性、对称性以及其他性质也被广泛研究。首先回顾一下施瓦茨空间$\mathscr{S}$的定义，即R^N上满足急速衰减的C^∞函数，其范数形式由

$$p_N(\varphi)=\sup_{x\in R^N}(1+|x|)^N\sum_{|\alpha|\le N}\left|\nabla^\alpha\varphi(x)\right|, N=0,1,2,\cdots,$$

产生，其中$\varphi\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$。由[1]可得到分数阶拉普拉斯算子的定义形式，即对于$u\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$，$s\in(0,1)$，

$$(-\Delta)^s u(x):=C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y,$$

$P.V.$代表柯西主值，$C_{N,s}:=\left(\int_{R^N}\dfrac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}}\mathrm{d}\xi\right)^{-1}=2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{N+2s}{2}\right)}{|\Gamma(-s)|}$，可将其视为常数值。出于对算子奇异性的考虑，[1，引理 3.2]通过变量代换给出了算子的等价形式，

$$(-\Delta)^s u(x):=-\frac{1}{2}C_{N,s}\int_{R^N}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}\mathrm{d}y,\quad \forall x\in R^N.$$

并且，通过[1]可得傅里叶变换之下的空间$\hat{H}^s\left(R^N\right)=W^{s,2}\left(R^N\right)$

$$\hat{H}^s\left(R^N\right)=\left\{u\in L^2\left(R^N\right):\int_{R^N}\left(1+|\xi|^{2s}\right)\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi<+\infty\right\},$$

以及在该变换下算子具有等价形式

$$\left(-\hat{\Delta}\right)^s u(\xi)=|\xi|^{2s}\hat{u}(\xi),\quad \xi\in R^N, s>0.$$

其中，对于任意的$\varphi\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$，

$$\mathscr{F}\varphi(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{R^N}\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

表示的是φ的 Fourier 变换。

同时由于[5]的贡献，作者给出对于$s\in(0,1)$时的分数阶 Polya-Szegö 不等式

$$\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{s/2} f^*(x)\right|^2 \mathrm{d}x \le \int_{R^N}\left|(-\Delta)^{s/2} f(x)\right|^2 \mathrm{d}x,$$

其中 f^* 代表 f 的对称径向递减重排[6]，通过此不等式，[7]得到了问题

$$\begin{cases}-\Delta u+\eta u=\lambda|u|^{p-1}u, & x\in R^N,\\ u\in H^1\left(R^N\right), & u\ne 0,\end{cases}$$

的径向解。通过约束极值等方法，在[8]中作者得到了方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+u=|u|^{p-1}u, & x\in R^N,\\ u\in H^s\left(R^N\right), & u\ne 0,\end{cases}$$

解的存在性以及对称性质。

另一方面随着极大值原理、移动平面法的完善和发展，也对研究分数阶拉普拉斯算子的径向解起到了很大的作用，有兴趣的可参考[9] [10] [11] [12]。在[13]中，作者研究了非局部非线性分数阶 *g-Laplacian* 算子

$$\left(-\Delta_g\right)^s u(x) P.V.\int_{R^N} g\left(\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^s}\right)\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{n+s}},$$

的极大值原理、*Liouville* 定理以及对称结果，其中 g 是 *Young* 函数的导数。

关于分数阶拉普拉斯算子本身在近几年也得到了发展。由[14]，作者提出了 $s=1+\sigma$ 时 $(-\Delta)^s u$ 的相关问题。由 $s\in(0,1)$ 时 $(-\Delta)^s u$ 的定义可知，对于 $u\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$，算子 $(-\Delta)^s u(x)$ （$s=1+\sigma$）的定义为

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x)&=C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{-\Delta u(x)-(-\Delta u(y))}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y\\ &=C_{N,s}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathscr{C}B_{\varepsilon(x)}}\frac{-\Delta u(x)-(-\Delta u(y))}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{2}$$

$$C_{N,s}=C_{N,\sigma}=\left(\int_{R^N}\frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}\xi\right)^{-1}.\tag{3}$$

此外，作者通过 Fourier 变换得到了 s 为更高阶数时算子 $(-\Delta)^s u$ 的等价形式，可见[14，命题 2.1]。由于问题的需要，这里取命题中的 $m=1$，即对于给定的 $u\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$，$s=1+\sigma$，$\sigma\in(0,1)$ 时 $(-\Delta)^s u=-div(-\Delta)^\sigma \nabla u$。

在得到更高的分数阶 Laplacian 算子的形式以后，关于该算子对应的问题的径向解便自然而然被提出，这也正是想要研究的问题。在这篇文章中我们将考虑分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}\left(R^N\right)$ 中的满足径向对称的空间 $W_r^{s,p}\left(R^N\right)$，即 $W_r^{s,p}\left(R^N\right)=H_r^s\left(R^N\right)\subset W^{s,p}\left(R^N\right)$。

下面回忆一下分数 Sobolev 空间 $W^{s,p}\left(R^N\right)$ （也记为 $H^s\left(R^N\right)$）的定义及其范数形式。基于问题的需要，这里只出示 $p=2$ 时空间的定义，更普遍的定义形式可以参考[1] [15] [16]。

$0<s<1$ 时，

$$W^{s,2}\left(R^N\right):=\left\{u\in L^2\left(R^N\right):\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}\in L^2\left(R^N\times R^N\right)\right\},$$

其范数形式为

$$\|u\|_{W^{s,2}\left(R^N\right)}:=\left(\int_{R^N}|u|^2\,\mathrm{d}x+\iint_{R^N\times R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$s=1$ 时，

$$W^{1,2}\left(R^N\right):=\left\{u\,\middle|\,u\in L^2\left(R^N\right),\nabla u\in L^2\left(R^N\right)\right\},$$

其范数形式为

$$\|u\|_{W^{1,2}\left(R^N\right)}=\left(\int_{R^N}|u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{R^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$1<s<2$ 时，记 $s=1+\sigma$，其中 $\sigma\in(0,1)$

$$W^{s,2}\left(R^N\right):=\left\{u\in W^{1,2}\left(R^N\right):\nabla^{\alpha}u\in W^{\sigma,2}\left(R^N\right)\right\},$$

其范数形式为

$$\|u\|_{W^{s,2}\left(R^N\right)}:=\left(\|u\|^2_{W^{1,2}\left(R^N\right)}+\|\nabla u\|^2_{W^{\sigma,2}\left(R^N\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记 $[u]_{W^{s,2}\left(R^N\right)}=\left(\iint_{R^N\times R^N}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$。

无特殊说明外，以下均为 $1<s<2$。

现在根据空间 $W^{s,2}\left(R^N\right)$ 的定义以及性质给出在空间 H_r^s 下(1)的变分。简单说，主要研究对象就是(1)所对应的变分的解的存在性和对称性质，主要结果为：

定理 3.1 当 $s\in(1,2)$，$p\in(1,(N+2s)/(N-2s))$ 其中 $N\geq 2$，问题(1)存在一个属于 $H_r^s\left(R^N\right)$ 正且为球对称的解 u。

由于极大值原理等定理的缺失，关于此定理的具体证明，将选择继续沿用[8] [17]的办法，即对(1)的泛函进行条件约束。虽然该定理的证明沿用了[8] [17]的思想，但由于我们研究的是更高阶 $s\in(1,2)$ 的算子 $(-\Delta)^s u$ 所对应的方程的径向解，为了能够继续利用 Polya-Szegö 不等式等的相关性质，我们将给出 $s\in(1,2)$ 时算子 $(-\Delta)^s u$ 的所需的性质的证明。此外，出于对[8，引理 2.6]相同的考虑，为了证明本文所定义的空间 $W_r^{s,2}$ 中的一些估计，由于阶数 s 的提高，命题的证明将重新定义算子 $w_R(x)$ 来说明极小值集合的非空，具体证明过程将在引理 2.8 给出。

本文的结构安排如下：

在第二部分当中将给出所需要的空间以及与定理 3.1 的证明有关的定理，在第三部分将给出定理 3.1 的证明过程。最后一部分给出总结。

2. 预备知识

首先给出在 R^N 中

$$(-\Delta)^s u-\Delta u+u=|u|^{p-1}u,\ u\neq 0, \tag{4}$$

的解 $u\in H_r^s\left(R^N\right)$ 的定义，其中 $p>1$。

对任意的 $s\in(1,2)$，可测函数 $u:R^N\to R$ 称为是(4)变分问题的解，当

$$\frac{C_{N,\sigma}}{2}\iint\limits_{R^N\times R^N}\frac{\left(\nabla u(x)-\nabla u(y)\right)\left(\nabla v(x)-\nabla v(y)\right)}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int\limits_{R^N}\nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{R^N}u(x)v(x)\mathrm{d}x \\ =\int\limits_{R^N}|u(x)|^{p-1}u(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

对任意的 $v\in C_0^1(R^N)$ 成立。

正如前述，为了解决(4)就是在 $W_r^{s,2}(R^N)$ 中寻找与之相关的泛函 J 的临界点，

$$J(u)=\frac{C_{N,\sigma}}{4}[u]_{H_r^s}^2+\frac{1}{2}\int\limits_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int\limits_{R^N}G(u)\mathrm{d}x,$$

其中，$G(u)=\frac{1}{p+1}|u|^{p+1}-\frac{1}{2}|u|^2$。因此，以下将研究具有约束的变分问题：

$$\min\left\{\|\nabla u\|_{L^2(R^N)}^2+[u]_{H_r^s(R^N)}^2:u\in H_r^s(R^N),\int\limits_{R^N}G(u)=1\right\}. \tag{6}$$

引理 2.1 $s\in(1,2)$，$(-\Delta)^s u$ 为(2)所定义的分数阶 Laplacian 算子，则对于任意的 $u\in\mathscr{S}$，

$$(-\Delta)^s u(x)=\frac{1}{2}C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+y)+\Delta u(x-y)-2\Delta u(x)}{|y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y. \tag{7}$$

证明：事实上，通过变量代换 $z=y-x$，则有

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u&=C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{-\Delta u(x)-\left(-\Delta u(y)\right)}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y,\ 1<s<2,\ s=1+\sigma\\&=C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+z)-\Delta u(x)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

在上述的最后一个等式中通过 $z=-\tilde{z}$ 可以得到

$$C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+z)-\Delta u(x)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z=C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x-\tilde{z})-\Delta u(x)}{|\tilde{z}|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}\tilde{z},$$

则对重新定义以后的 $\tilde{z},z$，

$$\begin{aligned}&2P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+z)-\Delta u(x)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z\\&=P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+z)-\Delta u(x)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z+P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x-\tilde{z})-\Delta u(x)}{|\tilde{z}|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}\tilde{z}\\&=P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+z)-\Delta u(x)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z+P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x-z)-\Delta u(x)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

因此，重新命名 y，分数阶的拉普拉斯算子(2)则可写为

$$(-\Delta)^s u(x)=\frac{1}{2}C_{N,s}P.V.\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+y)+\Delta u(x-y)-2\Delta u(x)}{|y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y.$$

对于 $\int_{R^N}\frac{\Delta u(x+y)+\Delta u(x-y)-2\Delta u(x)}{|y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y$ 部分可积性说明：

因为 $u\in\mathscr{S}$ 利用其 C^∞ 及其快速衰减性可得对 $s\in(1,2)$，有

$$\frac{\Delta u(x+y)+\Delta u(x-y)-2\Delta u(x)}{|y|^{N+2\sigma}}\leq\frac{\left\|\nabla^2(\Delta u(x))\right\|_{L^\infty(R^N)}}{|y|^{N+2\sigma-2}},$$

因此，对 $u\in\mathscr{S}$，就不在需要 $P.V.$，并将其写为(7)。

命题 2.2 $s\in(1,2)$，$(-\Delta)^s u:\mathscr{S}\to L^2(R^N)$ 为(2)所定义的分数阶的拉普拉斯算子，则对于任意的 $u\in\mathscr{S}$，

$$(-\Delta)^s u=\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u)\right),\forall\xi\in R^N. \tag{8}$$

证明：通过[14，命题 2.1]，$s\in(1,2)$ 时 $(-\Delta)^s u=-div(-\Delta)^\sigma\nabla u$，则

$$\mathscr{F}\left(-div(-\Delta)^\sigma\nabla u\right)=|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u),\forall\xi\in R^N,$$

即得对 $\forall\xi\in R^N$，$(-\Delta)^s u=\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u)\right)$。

命题 2.3 $s\in(1,2)$，则分数阶 Sobolev 空间 $H^s(R^N)$ 可等价于 $\hat{H}^s(R^N)$。特别地，对任意的 $u\in H^s(R^N)$

$$[u]^2_{H^s(R^N)}=2C^{-1}_{N,\sigma}\int_{R^N}|\xi|^{2s}\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi,$$

其中 $C_{N,\sigma}$ 如(3)所定义。

证明：对于每一个固定的 $y\in R^N$，通过令 $z=x-y$，可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|\nabla u(z+y)-\nabla u(y)|^2}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&=\int_{R^N}\left\|\mathscr{F}\left(\frac{\nabla u(z+\bullet)-\nabla u(\bullet)}{|z|^{\frac{N}{2}+\sigma}}\right)\right\|^2_{L^2(R^N)}\mathrm{d}z\\
&=\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\xi^2\left|\mathrm{e}^{i\xi z}-1\right|^2}{|z|^{N+2\sigma}}\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}\xi\\
&=2\int_{R^N}\xi^2\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2\left(\int_{R^N}\frac{1-\cos(\xi\cdot z)}{|z|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

由(3)得

$$\begin{aligned}
&=2\int_{R^N}\xi^2\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2C^{-1}_{N,s}|\xi|^{2\sigma}\mathrm{d}\xi\\
&=2C^{-1}_{N,s}\int_{R^N}\xi^2|\xi|^{2\sigma}\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\\
&=2C^{-1}_{N,s}\int_{R^N}\xi^{2s}\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

命题 2.4 $s\in(1,2)$，$u\in H^{s}\left(R^{N}\right)$，则

$$[u]_{H^{s}\left(R^{N}\right)}^{2}=2C_{N,\sigma}^{-1}\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|_{L^{2}\left(R^{N}\right)}^{2},$$

其中 $C_{N,\sigma}$ 如(3)所定义。

证明：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C_{N,\sigma}[u]_{H^{s}\left(R^{N}\right)}^{2}&=\int_{R^{N}}\xi^{2s}\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|^{2}\mathrm{d}\xi\\&=\left\||\xi|^{s}\left|\mathscr{F}u(\xi)\right|\right\|_{L^{2}\left(R^{N}\right)}^{2}\\&=\left\|\mathscr{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(\xi)\right\|_{L^{2}\left(R^{N}\right)}^{2}\\&=\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|_{L^{2}\left(R^{N}\right)}^{2}.\end{aligned}$$

在介绍下一个引理之前先回顾一下有关知识。如果 $u:R^{N}\to R$ 是可测函数，则 u 的分布函数[18] [19]被定义为

$$\mu_{u}(t)=\left|x\in R^{N}:u(x)>t\right|,$$

其中 $|\cdot|$ 表示勒贝格测度。并且 μ_{u} 是非增的，右连续的。u 的递减重排为

$$u^{*}(s)=\sup\left\{t\geq 0:\mu_{u}(t)\geq s\right\}.$$

函数

$$u^{\#}(x)=u^{*}\left(\omega_{N}|x|^{N}\right),\ x\in R^{N},$$

被定义为 u 的施瓦茨对称化，它关于原点是球对称的，并且沿 $|x|$ 递减。此外在[5]，Polya-Szegö 不等式指出对称递减重排函数 f 在 L^{2} 范数下有

$$\int_{R^{N}}\left|\nabla f^{*}(x)\right|^{2}\mathrm{d}x\leq\int_{R^{N}}\left|\nabla f(x)\right|^{2}\mathrm{d}x,\tag{9}$$

成立。其中 f^{*} 表示 f 的径向递减重排。

引理 2.5 [5，定理 1.1] $0<s<1$. f^{*} 是 f 的径向对称径向递减重排函数，则有

$$\int_{R^{N}}\left|(-\Delta)^{s/2}f^{*}(x)\right|^{2}\mathrm{d}x\leq\int_{R^{N}}\left|(-\Delta)^{s/2}f(x)\right|^{2}\mathrm{d}x$$

成立。在这个意义上，右边的有限性意味着左边的有限性，并且可以得到径向递减函数以及最佳常数为 1。

引理 2.6 [17 引理 2.1] $0<s<1$。假设 u,v 是 R^{N} 中的可积函数，$g:R^{N}\to R$ 是非负非减函数，则

1) $\int_{R^{N}}g\left(|u(x)|\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}g\left(u^{*}(s)\right)\mathrm{d}s=\int_{R^{N}}g\left(u^{\#}(x)\right)\mathrm{d}x$.

2) 如果 $u,v\in L^{p}\left(R^{N}\right)(p>1)$，则

$$\left\|u^{\#}-v^{\#}\right\|_{L^{p}\left(R^{N}\right)}\leq\|u-v\|_{L^{p}\left(R^{N}\right)}.$$

3) 如果 $u \in W^{s,p}\left(R^N\right)(p>1)$，则 $u^{\#} \in W^{s,p}\left(R^N\right)$，并且

$$\iint\limits_{R^N \times R^N} \frac{\left|u^{\#}(x)-u^{\#}(y)\right|^p}{|x-y|^{n+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_{R^N \times R^N} \frac{\left|u(x)-u(y)\right|^p}{|x-y|^{n+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 u^* 代表的是 u 的径向对称递减重排。

注记 2.7 [5]以上说明分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}\left(R^N\right)(0<s<1)$ 对称递减重排的非扩张性。

引理 2.8 [8，引理 2.4]若 u 是 $L^2\left(R^N\right)$ 中的非负径向递减函数，则

$$|u(x)| \le \left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{N}{2}} \|u\|_{L^2\left(R^N\right)}, \forall x \ne 0,$$

其中 ω_{N-1} 表示的是单位球在 R^N 中的勒贝格测度。

引理 2.9 [8，引理 2.5] $P,Q:R \to R$ 是满足

$$\frac{P(t)}{Q(t)} \to 0,\ \text{当}|t| \to \infty,$$

的两个连续函数，$u_n : R^N \to R$ 是能够使得

$$\sup \int\limits_{R^N} \left|Q\left(u_n(x)\right)\right| \mathrm{d}x < +\infty,$$

和

$$P\left(u_n(x)\right) \to v(x), n \to +\infty,$$

在 R^N 上几乎处处成立的可测函数列，则对于任意一个有界的博雷尔集 B，有

$$\int\limits_B \left|P\left(u_n(x)\right)-v(x)\right| \mathrm{d}x \to 0,\ \ n \to +\infty.$$

进一步，如果假设

$$\frac{P(t)}{Q(t)} \to 0,\quad t \to 0,$$

及关于 n，有

$$u_n(x) \to 0,\quad |x| \to +\infty,$$

一致成立，则 $P\left(u_n\right)$ 在 $L^1\left(R^N\right)$ 内收敛到 v。

为证明下面的引理，先引入 $K_1\left(R^N\right)$，

$$K_1\left(R^N\right) = \left\{k(x): R^N \to R \,\middle|\, k(x) = c_0 + (c,x), \text{其中} c_0 \in R, c, x \in R^N\right\}.$$

引理 2.10 设 $\varsigma, R' > 0$，对 $k(x) \in K_1\left(R^N\right)$ 有

$$w_{R'}(x) = \begin{cases} \varsigma k(x), & |x| \le R', \\ \varsigma\left(R'+1-x\right)k(x), & 1<|x|<R'+1, \\ 0, & |x| \ge R'+1, \end{cases}$$

以及对任意固定的常数 $\alpha>0$，

$$w_{R',\alpha}(x)=w_{R'}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

那么对任意的 $\sigma\in(0,1)$，

$$w_{R'}(x),w_{R',\alpha}(x)\in W^{s,2}\left(R^N\right),$$

进一步可得

$$\left\|w_{R'}(x)\right\|_{W^{s,2}\left(R^N\right)}\le C(N,s,R')\varsigma.$$

证明：由于 $k(x)\in K_1\left(R^N\right)$，不妨设 $k(x)=C_0+C_1x$， C_0,C_1 为实数集中的常数。

首先声明

$$\begin{aligned}\left\|w_{R'}(x)\right\|_{L^2\left(R^N\right)}^2&=\int_{R^N}\left|w_{R'}(x)\right|^2\mathrm{d}x=\int_{B_{R'}(0)}\left|\varsigma k(x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_{B_{R'+1}(0)\setminus B_{R'}(0)}\left|\varsigma(R'+1-x)k(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&\le|\varsigma|^2\int_{B_{R'}(0)}\left|C_0+C_1x\right|^2\mathrm{d}x+|\varsigma|^2\int_{B_{R'+1}(0)}\left|C_0(R'+1)+(R'+1)C_1x-xk(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&\le C_2|\varsigma|^2\int_{B_{R'+1}(0)}|x|^4\mathrm{d}x\le\frac{C_2|\varsigma|^2\omega_N}{N+4}(R'+1)^{N+4},\end{aligned}$$

其中 $C_2(R')>2C_1$， $2C_0>0$。另一方面，

$$\nabla w_{R'}(x)=\begin{cases}C_1\varsigma, & |x|\le R',\\ C_1\varsigma(R'+1)-C_0\varsigma-2C_1\varsigma x, & R'<|x|<R'+1,\\ 0, & |x|\ge R'+1,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\left\|\nabla w_{R'}(x)\right\|_{L^2\left(R^N\right)}^2&=\int_{R^N}\left|\nabla w_{R'}(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&=\int_{B_{R'}(0)}\left|\nabla w_{R'}(x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_{B_{R'+1}(0)\setminus B_{R'}(0)}\left|\nabla w_{R'}(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&\le\left|C_1\varsigma\right|^2\omega_N R'^N+\int_{B_{R'+1}(0)}\left|C_3\varsigma R'+2C_1\varsigma x\right|^2\mathrm{d}x\\&\le C_4|\varsigma|^2\omega_N(R'+1)^{N+2}.\end{aligned}$$

其中， C_3,C_4 为实数集中的常数。

$$\begin{aligned}\left[w_{R'}(x)\right]_{W^{s,2}\left(R^N\right)}^2&=\iint_{R^N\times R^N}\frac{\left|\nabla w_{R'}(x)-\nabla w_{R'}(y)\right|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{B_{R'}\times B_{R'}}+\iint_{B_{R'}\times\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)}+\iint_{B_{R'}\times\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)}+\iint_{\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)\times B_{R'}}+\iint_{\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)\times\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)}\\&\quad+\iint_{\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)\times\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)}+\iint_{\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)\times B_{R'}}+\iint_{\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)\times\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)}+\iint_{\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)\times\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)}\\&=2\iint_{B_{R'}\times\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)}+2\iint_{B_{R'}\times\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)}+\iint_{\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)\times\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)}+2\iint_{\left(B_{R'+1}\setminus B_{R'}\right)\times\left(R^N\setminus B_{R'+1}\right)}\\&:=2M+2N+L+2K.\end{aligned}$$

从 $w_R(x)$ 的定义可得：

$$M=\iint_{B_{R'}\times(B_{R'+1}\setminus B_{R'})}\frac{|\nabla w_{R'}(x)-\nabla w_{R'}(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{B_{R'}\times(B_{R'+1}\setminus B_{R'})}\frac{|C_1\varsigma-C_1\varsigma(R'+1)+C_0\varsigma+2C_1\varsigma y|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{B_{R'}\times(B_{R'+1}\setminus B_{R'})}\frac{|-C_1\varsigma R'+C_0\varsigma+2C_1\varsigma y|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le|2C_1\varsigma|^2\iint_{B_{R'}\times(B_{R'+1}\setminus B_{R'})}\frac{|R'-y|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le C_5(N,\sigma)\varsigma^2R'^{N-2\sigma}.$$

$$N=\iint_{B_{R'}\times(R^N\setminus B_{R'+1})}\frac{|\nabla w_{R'}(x)-\nabla w_{R'}(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=|C_1\varsigma|^2\iint_{B_{R'}\times(R^N\setminus B_{R'+1})}\frac{1}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le|C_3\varsigma|^2\int_{B_{R'}}\left(\int_{R^N\setminus B_{R'}}\frac{1}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$\le C_6(N,\sigma)\varsigma^2R'^{N-2\sigma}.$$

$$L=\iint_{(B_{R'+1}\setminus B_{R'})\times(B_{R'+1}\setminus B_{R'})}\frac{|\nabla w_{R'}(x)-\nabla w_{R'}(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=|2C_1\varsigma|^2\iint_{(B_{R'+1}\setminus B_{R'})\times(B_{R'+1}\setminus B_{R'})}\frac{|x-y|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le C_7(N,\sigma)\varsigma^2(R'+1)^{N+2-2\sigma}.$$

$$K=\iint_{(B_{R'+1}\setminus B_{R'})\times(R^N\setminus B_{R'+1})}\frac{|\nabla w_{R'}(x)-\nabla w_{R'}(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le|C_3\varsigma|^2\iint_{(B_{R'+1}\setminus B_{R'})\times(R^N\setminus B_{R'+1})}\frac{|R'+1-x|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le|C_3\varsigma|^2\int_{B_{R'+1}\setminus B_{R'}}\left(\int_{R^N\setminus B_{R'+1}}\frac{|R'+1-x|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$\le C_9(N,\sigma)\varsigma^2(R'+1)^{N-2\sigma}.$$

综合上述不等式，得

$$\left[w_{R'}(x)\right]^2_{W^{s,2}(R^N)}=2M+2N+L+2K\le C(N,\sigma,R')\varsigma^2.$$

注记 2.11 通过引理 2.10，(6)是非空的。事实上，如 $w_{R'}(x)\in W^{s,2}(R^N)$，则

$$\begin{aligned}\int_{R^N}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x&=\int_{B_{R+1}}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x=\int_{B_R}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x+\int_{B_{R'+1}\setminus B_{R'}}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x\\&=\int_{B_{R'}}\left(\frac{1}{p+1}|w_{R'}(x)|^{p+1}-\frac{1}{2}|w_{R'}(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{B_{R'+1}\setminus B_{R'}}\left(\frac{1}{p+1}|w_{R'}(x)|^{p+1}-\frac{1}{2}|w_{R'}(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{B_{R'}}\left(\frac{1}{p+1}|\varsigma k(x)|^{p+1}-\frac{1}{2}|\varsigma k(x)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{B_{R'+1}\setminus B_{R'}}\left(\frac{1}{p+1}|\varsigma(R'+1-x)k(x)|^{p+1}-\frac{1}{2}|\varsigma(R'+1-x)k(x)|^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以一定存在常数 $c_1,c_2>0$ 使得

$$\int_{R^N}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x\ge c_1G(\varsigma)|B_{R'}|-c_2\max G|B_{R'+1}\setminus B_{R'}|.$$

因此，当 R' 充分大时，$\int_{R^N}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x>0$。

由上述，现在做一个变换 $w_{R',\alpha}(x)=w_{R'}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$，并通过对 $\alpha\in(0,1)$ 的适当选择，能够使得

$$\int_{R^N}G(w_{R',\alpha}(x))\mathrm{d}x=\alpha^N\int_{R^N}G(w_{R'}(x))\mathrm{d}x=1.$$

定理 2.12 [15，定理 4.6]若 $0<p<q<r\le\infty$， $0<\lambda<1$，则 $L^p(\Omega)\cap L^r(\Omega)\subset L^q(\Omega)$，且

$$\|f\|_q\le\|f\|_p^{\lambda}\|f\|_r^{1-\lambda},$$

其中 $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}$。

3. 主要定理的证明

定理 3.1 当 $s\in(1,2)$， $p\in(1,(N+2s)/(N-2s))$ 其中 $N\ge2$，方程(1)存在一个属于 $H_r^s(R^N)$ 正且为球对称的解 u。

证明：第一步：极小化序列 u_n。考虑序列 $\{u_n\}\subseteq H_r^s(R^N)$，使其满足 $\int_{R^N}G(u_n)\mathrm{d}x=1$ 以及

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left([u_n]_{H_r^s(R^N)}^2+\int_{R^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\\&=\inf\left\{[u_n]_{H_r^s(R^N)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(R^N)}:u\in H_r^s(R^N),\int_{R^N}G(u)\mathrm{d}x=1\right\}\ge0.\end{aligned}\tag{10}$$

由于讨论空间为 $H_r^s(R^N)$，因此 $|u_n|$ 在空间 $H_r^s(R^N)$ 下的半范数不会超过 ∇u_n，可得 $\{u_n^*\}$ 也是极小化序列。

不失一般性，假设 u_n 是非负的， u_n^* 表示 u_n 的径向对称递减重排，则

$$\int_{R^N}G(u_n)\mathrm{d}x=\int_{R^N}G(u_n^*)\mathrm{d}x=1,$$

以上过程说明可以选择一组函数序列 $\{u_n\}(n\in N)$，并且 u_n 是非负的、球对称的以及在 $r=|x|$ 方向是

递减的。

第二步：对 u_n 的先验估计。通过获得 $\|u_n\|_{L^q(R^N)}$ 和 $\|u_n\|_{H^s(R^N)}$ 的有界性，得到 $\|u_n\|_{H_r^s(R^N)}$ 的有界性，其中 $2\le q\le\dfrac{2N}{N-2s}$。

由(10)得 $[u_n]_{H_r^s(R^N)}^2+\int_{R^N}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\le C$。因此以下主要证明 $\|u_n\|_{L^2(R^N)}$ 是有界的。为此，设

$$g_1(t)=|t|^{p-1}t,\quad g_2(t)=t,\quad G_1(t)=\frac{1}{p+1}|t|^{p+1},\quad G_2(t)=\frac{1}{2}|t|^2,$$

则

$$g(t)=g_1(t)-g_2(t),$$

以及

$$G(z)=\int_0^z g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^z g_1(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^z g_2(t)\,\mathrm{d}t=G_1(z)-G_2(z),\ \forall z\ge 0. \tag{11}$$

因为 $p<(N+2s)/(N-2s)$，所以对任意一个 $\varepsilon>0$ 存在一个正常数 C_ε 能够使得 $g_1(t)\le C_\varepsilon|t|^{\frac{N+2s}{N-2s}}+\varepsilon g_2(t)$，这可以推出 $G_1(z)\le C_\varepsilon|z|^{\frac{2N}{N-2s}}+\varepsilon G_2(z)$。取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，有

$$G_1(z)\le C|z|^{\frac{2N}{N-2s}}+\frac{1}{2}G_2(z). \tag{12}$$

现在由条件 $\int_{R^N}G(u_n)\,\mathrm{d}x=1$ 可以得到

$$\int_{R^N}G_1(u_n)\,\mathrm{d}x=\int_{R^N}G_2(u_n)\,\mathrm{d}x+1. \tag{13}$$

由(12)和(13)得到

$$\frac{1}{2}\int_{R^N}G_2(u_n)\,\mathrm{d}x+1\le C\int_{R^N}|u_n|^{\frac{2N}{N-2s}}\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

现在由[1，推论 2.3，定理 6.5]得

$$\|u_n\|_{L^{\frac{2N}{N-2s}}(R^N)}\le C[u_n]_{H^s(R^N)},$$

其中 C 是不依赖于 n 的常数。因为是极小化序列，可以得到 $\|u_n\|_{L^{\frac{2N}{N-2s}}(R^N)}$ 的有界性可以被 $[u_n]_{H^s(R^N)}$ 控制，即可以被 $[u_n]_{H_r^s(R^N)}$ 控制。另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{R^N}|u_n|^2\,\mathrm{d}x&=\int_{R^N}G_2(u_n)\,\mathrm{d}x=\int_{R^N}G_1(u_n)\,\mathrm{d}x-\int_{R^N}G(u_n)\,\mathrm{d}x=\int_{R^N}G_1(u_n)\,\mathrm{d}x-1\\&\le\int_{R^N}G_1(u_n)\,\mathrm{d}x\le\varepsilon\int_{R^N}G_2(u_n)\,\mathrm{d}x+C(\varepsilon)\int_{R^N}|u_n|^{\frac{np}{n-ps}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$，则对 $\|u_n\|_{L^2(R^N)}$ 的估计为

$$\|u_n\|_{L^2(R^N)}\le 4C(\varepsilon)\int_{R^N}|u_n|^{\frac{np}{n-ps}}\,\mathrm{d}x\le C.$$

由 $\|u_n\|_{L^2(R^N)}$ 和 $\|u_n\|_{L^{\frac{2N}{N-2s}}(R^N)}$ 的有界性以及定理 2.12 不等式得到 $\|u_n\|_{L^q(R^N)}\le C$，其中

$2\le q\le 2N/(N-2s)$。

第三步：因为u_n是$L^2(R^N)$中的非负径向递减函数，通过引理 2.8 得到

$$|u_n(x)|\le\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{2}}|x|^{-\frac{N}{2}}\|u_n\|_{L^2(R^N)},\tag{15}$$

由于u_n在$L^2(R^N)$中的有界性，所以在$|x|\to+\infty$时，$u_n(x)\to 0$。如前所证，可以得到u_n在$H_r^s(R^N)$中是有界的，所以u_n会在$H_r^s(R^N)$中弱收敛到$\bar{u}$，在R^N上几乎处处收敛到$\bar{u}$，并且$\bar{u}$是球对称的在 r 方向是递减的。现在为了应用引理 2.9，定义

$$Q(t):=t^2+|t|^{\frac{2N}{N-2s}},\quad P(t):=G_1(t).$$

由于u_n在$L^2(R^N)$和$L^{\frac{2N}{N-2s}}(R^N)$中的有界性，Q满足

$$\int_{R^N}|Q(u_n(x))\mathrm{d}x|=\int_{R^N}\left(|u_n(x)|^2+|u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2s}}\right)\mathrm{d}x\le C,\ \forall n\in N,$$

并由G_1的定义，对于$p\in\left(1,\frac{N+2s}{N-2s}\right)$，可得

$$\frac{G_1(t)}{Q(t)}\to 0,\ \text{当}t\to+\infty\text{和}t\to 0.$$

通过u_n在R^N上几乎处处收敛性，得到$G_1(u_n)\to G_1(\bar{u})$。最后通过事实$u_n(x)\to 0$，$|x|\to+\infty$以及引理 2.9，可得到当$n\to+\infty$时，

$$\int_{R^N}G_1(u_n(x))\mathrm{d}x\to\int_{R^N}G_1(\bar{u}(x))\mathrm{d}x.$$

对(13)使用 *Fatou* 引理，得

$$\int_{R^N}G_1(\bar{u}(x))\mathrm{d}x\ge\int_{R^N}G_2(\bar{u}(x))\mathrm{d}x+1,\tag{16}$$

也就是

$$\int_{R^N}G(\bar{u}(x))\mathrm{d}x\ge 1,$$

再用一次 *Fatou* 引理，

$$\begin{aligned}[\bar{u}]^2_{H^s(R^N)}&\le\liminf_{n\to+\infty}[u_n]^2_{H_r^s(R^N)}=\lim_{n\to+\infty}[u_n]^2_{H_r^s(R^N)}\\&\le\lim_{n\to+\infty}\left([u_n]^2_{H_r^s(R^N)}+\frac{1}{2}\int_{R^N}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)\\&=\inf\left\{[u_n]^2_{H_r^s(R^N)}+\|\nabla u\|_{L^2(R^N)}:u\in H_r^s(R^N),\int_{R^N}G(u)\mathrm{d}x=1\right\}.\end{aligned}\tag{17}$$

为完成证明，下面说明$\int_{R^N}G(\bar{u}(x))\mathrm{d}x>1$不成立。假设$\int_{R^N}G(\bar{u}(x))\mathrm{d}x>1$，则通过变量代换$\bar{u}_\alpha(x)=\bar{u}(x/\alpha)$，得

$$\int_{R^N}G(\bar{u}_\alpha(x))\mathrm{d}x=\alpha^N\int_{R^N}G(\bar{u}(x/\alpha))\mathrm{d}(x/\alpha)=1,\tag{18}$$

$$\alpha \in (0,1). \tag{19}$$

且由(17)

$$[\bar{u}_\alpha]^2_{H_r^s(R^N)} = \alpha^{N-2\sigma}[\bar{u}]^2_{H_r^s(R^N)} \le \alpha^{N-2\sigma} \inf\left\{[u]^2_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} : u \in H_r^s(R^N), \int_{R^N} G(u)\mathrm{d}x = 1\right\},$$

以及(18)，得

$$\inf\left\{[u]^2_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} : u \in H_r^s(R^N), \int_{R^N} G(u)\mathrm{d}x = 1\right\} \le [\bar{u}_\alpha]_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla \bar{u}_\alpha\|_{L^2(R^N)}.$$

借助上述最后两个不等式，可得

$$\begin{aligned}&\inf\left\{[u]^2_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} : u \in H_r^s(R^N), \int_{R^N} G(u)\mathrm{d}x = 1\right\} \le C[\bar{u}_\alpha]^2_{H_r^s(R^N)}\\ &\le \alpha^{N-2\sigma} \inf\left\{[u]^2_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} : u \in H_r^s(R^N), \int_{R^N} G(u)\mathrm{d}x = 1\right\},\end{aligned}$$

$C > 1$。由(19)得

$$\inf\left\{[u]^2_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} : u \in H_r^s(R^N), \int_{R^N} G(u)\mathrm{d}x = 1\right\} = 0,$$

所以$[\bar{u}_\alpha]^2_{H_r^s(R^N)} = 0$，$\bar{u} \in K_1(R^N)$与(16)矛盾。

因此可以得到$\int_{R^N} G(\bar{u})\mathrm{d}x = 1$和$[\bar{u}]^2_{H_r^s(R^N)} = \inf\left\{[u]^2_{H_r^s(R^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} : u \in H_r^s(R^N), \int_{R^N} G(u)\mathrm{d}x = 1\right\}$，也就是说$\bar{u}$是问题(6)的极小值。

4. 总结

在本文中我们主要解决了一类径向解的问题。随着定义的分数阶 Laplacian 算子$(-\Delta)^s u$指标的提高，通过 Fourier 变换获得了$s \in (0,1)$和$s \in (1,2)$分数阶 Laplacian 算子$(-\Delta)^s u$之间的关系，进而探究了$s \in (1,2)$时相关分数阶 Laplacian 算子$(-\Delta)^s u$方程的径向解问题。关于更多的径向问题可参考[20] [21]。

参考文献

[1] Nezza, D.E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin of Mathematical Science*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[2] Bjorland, C., Caffarelli, L. and Figalli, A. (2012) Nonlocal Tug-of-War and the Infinity Fractional Laplacian. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65**, 337-380. https://doi.org/10.1002/cpa.21379

[3] Dipierro, S., Rosoton, X. and Valdinoci, E. (2017) Nonlocal Problems with Neumann Boundary Conditions. *Revista Matematica Iberoamericana*, **33**, 377-416. https://doi.org/10.4171/RMI/942

[4] Mugnai, D. and Lippi, E.P. (2019) Neumann Fractional p-Laplacian: Eigenvalues and Existence Results. *Nonlinear Analysis*, **188**, 455-474. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.06.015

[5] Park, Y.J. (2011) Fractional Polya-Szegö Inequality. *Journal of Chungcheong Mathematics Society*, **24**, 267-271.

[6] 宣本金. 变分法理论与应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.

[7] Berestychi, H. and Lios, P. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations, I. Existence of a Ground State. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 313-345. https://doi.org/10.1007/BF00250555

[8] Dipierro, S., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2013) Existence and Symmetry Results for a Schrödinger Type Problem

Involving the Fractional Laplacian. *Le Matematiche*, **68**, 201-216.

[9] Chen, W.X., Li, C.M. and Li, Y. (2017) A Direct Method of Moving Planes for the Fractional Laplacian. *Advances in Mathematics*, **308**, 404-437. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.11.038

[10] Zhang, L.H., Ahamd, B., Wang, G.T. and Ren, X.Y. (2020) Radial Symmetry of Solution for Fractional p-Laplacian System. *Nonlinear Analysis*, **196**, Article ID: 111801. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111801

[11] Li, C.M. and Wu, Z.G. (2018) Radial Symmetry for Systems of Fractional Laplacian. *Acta Mathematica Scientia B*, **38**, 1567-1582. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30832-4

[12] Chen, Y.G. and Liu, B.Y. (2019) Symmetry and Non-Existence of Positive Solutions for Fractional p-Laplacian Systems. *Nonlinear Analysis*, **183**, 303-322. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.02.023

[13] Monlina, S., Salort, A. and Vivas, A. (2021) Maximum Principles, Liouville Theorem and Symmetry Results for the Fractional g-Laplacian. *Nonlinear Analysis*, **212**, Article ID: 112465. https://doi.org/10.1016/j.na.2021.112465

[14] Barrios, B., Montoro, L., Peral, I. and Soria, F. (2020) Neumann Conditions for the Higher Order s-Fractional Laplacian with s > 1. *Nonlinear Analysis*, **193**, Article ID: 111368. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.10.012

[15] 贾高. 变分法基础与 Sobolev 空间[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2014.

[16] Willem, M. (2013) Functional Analysis. Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7004-5

[17] Xie, L.L., Huang, X.T. and Wang, L.H. (2018) Radial Symmetry for Positive Solutions of Fractional p-Laplacian Equations via Constrained Minimization Method. *Applied Mathematics and Computation*, **337**, 54-62. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.05.028

[18] Ciarlet, P.G. (2013) Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, University City.

[19] Carrier, G.F. and Pearson, C.E. (1976) Partial Differential Equations Theory and Technique Book. Academic Press, Cambridge.

[20] Yang, C., Gao, Z., Huang, X.M. and Kan, T. (2020) Hybrid Extended-Cubature Kalman Filters for Non-Linear Continuous-Time Fractional-Order Systems Involving Uncorrelated and Correlated Noises Using Fractional-Order Average Derivative. *IET Control Theory and Applications*, **14**, 1424-1437. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2019.1121

[21] Bradlaugh, A.A., Fedele, G., Munro, A.L., *et al*. (2023) Essential Elements of Radical Pair Magnetosensitivity in Drosophila. *Nature*, **615**, 111-116. https://doi.org/10.1038/s41586-023-05735-z