Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1040-1048
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134109

基于Sugeno测度半一致模Choquet积分的特性

李巧霞[1,2*], 杨雨荷[1,2], 辛 珍[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院, 新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所, 新疆 伊宁

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘 要

本文在基于Sugeno 测度半一致模的Choquet积分的基础上, 结合基于半一致模有序加权平均算子的特点, 讨论了基于Sugeno 测度半一致模的Choquet积分的沙普值、否决和喜爱指数.

关键词

Sugeno测度，Choquet积分，沙普值，否决和喜爱指数

The Character of the Choquet Integral of Semi-Uninorm Based on Sugeno Measures

Qiaoxia Li[1,2*], Yuhe Yang[1,2], Zhen Xin[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Mar. 20^{th}, 2023; accepted: Apr. 21^{st}, 2023; published: Apr. 28^{th}, 2023

Abstract

In this paper, the Shapley, the veto and favor indices of the Choquet Integral of semi-uninorm based on Sugeno measures are discussed and combine the characteristics of the the semi-uninorm ordered weighted averaging operators.

* 通讯作者。

文章引用: 李巧霞, 杨雨荷, 辛珍. 基于Sugeno测度半一致模Choquet积分的特性[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1040-1048. DOI: 10.12677/pm.2023.134109

Keywords

Ugeno Measures, Choquet Integral, The Shapley, The Veto and Favor Indices

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 前言

聚合算子是各个科学领域的强大工具, Choquet积分因其通用性而扮演着重要的角色. 值得一提的是Choquet积分 [1]推广了两个著名的算子族, 加权平均（WA)算子和有序加权平均(OWA)算子 [2]. 事实上, 在信息集成时, 加权平均(WA) 算子和有序加权平均(OWA) 算子是不同的. 加权平均算子根据每个信息源的重要性(属性权重)来加权在系统中的重要性, 而有序加权平均(OWA)算子则根据它们的相对位置的重要性(位置权重) 来加权其在系统中的重要性.两者在机器人、模糊逻辑控制器、约束、满意度问题、多准则聚集问题等方面 [3–5] 进行了谈论和研究. 而后, 很多学者在不同背景下将 OWA 算子在不同赋值集成系统上进一步拓展、讨论和研究 [6, 7]. 2015 年, Llamazares 提出了基于半一致模的有序加权平均算子 (SUOWA 算子) [8], 通过半一致模将两组权重向量联系起来, 系统研究了既考虑属性权重又考虑位置权重的集成方法, 并应用于不确定多属性决策中, 其特点是在信息集成算子中包括两组权重向量 [9]. 1974 年, 日本学者Sugeno 推广了经典的概率测度的可列可加性, 以约束条件较弱的单调性取代了经典概率中的可加性条件, 提出了模糊测度的概念, 这为我们提供了一个能够有效描述现实问题中存在的相互依赖, 相互关联现象的工具 [10, 11]. 2019年, 巩、李借助于 Sugeno 测度和三角模推广的一致模和半一致模的定义, 提出了基于Sugeno 测度半一致模的Choquet积分以及与之相关联的orness 测度的定义及其性质 [12], 并对其进行了举例说明. 本文对基于 Sugeno 测度半一致模的Choquet积分的沙普值、否决和喜爱指数进行谈论与研究.

2. 定义及说明

设 X 为非空集合, $\mathcal{A}$ 是由 X 的子集构成的 $\sigma-$ 代数, 称集函数 $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ 为正规的模糊测度(Sugeno测度), 是指 [10, 11]:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) $\mu(X) = 1$;

(3) 对于$A, B \in \mathcal{A}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$.

定义 1.1 设 X 为有限集, μ 是 $\mathcal{A}$ 上的 Sugeno 测度. 定义 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 X 上基于模糊测度 μ 的 Choquet 积分为

$$(C)\int_A \mathbf{x} d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})).$$

不难计算

$$(C)\int_A \mathbf{x} d\mu = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})\mu(A_i).$$

其中, $X=(1,2,\cdots,n), A\subseteq X, A_i=\{i,i+1,\cdots,n\}$, $i=1,2,\cdots,n$, $A_{n+1}=\emptyset, x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$.

定义 1.2 [12] 设二元函数 $U:[0,1]^2\to[0,1]$. 称 U 是一个半一致模, 是指 U 对每个变量具有单调性且存在单位元 $e\in[0,1]$, 即对任意的 $x\in[0,1]$, 存在 $e\in[0,1]$, 有 $U(e,x)=U(x,e)=x$.

以下为两个连续的半一致模：

例1.1.

$$U_{\bar{P}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in[1/n,1]^2,\\ nxy & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$U_{T_{\mathrm{L}}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in(1/n,1]^2,\\ \max(x+y-1/n,0) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

由于 $U_{\bar{P}}$ 和 $U_{T_{\mathrm{L}}}$ 都是连续的,则上面的两个半一致模可以写成：

$$U_{T_{\mathrm{L}}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in(1/n,1]^2,\\ \max(x+y-1/n,0) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$U_{\bar{P}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in(1/n,1]^2,\\ nxy & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定义 1.3 [?] 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 半一致模 $U\in\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$. 对于 $A\subseteq X$, 定义 $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}:2^X\to R$ 为

$$\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A)=|A|U\Big(\frac{\mu^{(1)}(A)}{|A|},\frac{\mu^{(2)}(A)}{|A|}\Big).$$

若 $A=\varnothing$, 记 $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\varnothing)=0$. $|A|$ 表示集合 A 的基数. 其中, $\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}=\{U\in\mathcal{U}^{\frac{1}{n}}|\ U(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\leq\frac{1}{k},\forall k\in X\}$. 显然地, $\mathcal{U}_i^{\frac{1}{n}}\subseteq\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$.

容易计算:

(1) $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\varnothing)=0$;

(2) $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(X)=|X|U(\frac{\mu^{(1)}(X)}{|X|},\frac{\mu^{(2)}(X)}{|X|})=1$;

(3) $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}$ 的单调覆盖 $\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A)=\max\limits_{B\subseteq A}\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(B)$ 满足单调性.

3. 基于Sugeno测度半一致模的Choquet 积分及特性

定义 2.1 [?] 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, $U\in\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$. $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 基于 Sugeno 测度半一致模的 Choquet 积分 $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}:R^n\to R$ 定义为

$$C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^n(\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A_{[i]})-\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A_{[i-1]}))x_{[i]},\tag{1}$$

其中 $A_{[i]}=\{[1],[2],\cdots,[i]\}$, $A_{[0]}=\emptyset$, $x_{[i]}(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 $\mathbf{x}$ 中第 i 个大的数, 即 $x_{[1]}\geq x_{[2]}\geq\cdots\geq x_{[n]}$.

不难计算

$$C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A_{[i]})(x_{[i]}-x_{[i+1]}).$$

R^n上的一个加权向量 $\mathbf{q}$ 是指 $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\in[0,1]^n$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}q_i=1$. $\mathcal{W}$ 表示 R^n 上所有加权向量的集合.

注 2.1 由 (1) 式可知, 设 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n),\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A)=\sum\limits_{i\in A}p_i$, $\mu^{(2)}(A)=\sum\limits_{i=1}^{|A|}\omega_i$ 时, $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})$ 退化为基于权重向量 $\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}$ 的半一致模有序加权平均(SUOWA)算子 $S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}$：

$$S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\upsilon}^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(A_{[i]})-\hat{\upsilon}^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(A_{[i-1]}))x_{[i]}.$$

注 2.2 由 (1) 式可知, 设 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n),\boldsymbol{\eta}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A)=\sum\limits_{i\in A}p_i$, $\mu^{(2)}(A)=|A|/n$ 时, $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})$ 退化为基于权重向量 $\mathbf{p}$ 的加权平均算子 $\mathbf{M_p}$：

$$\mathbf{M_p}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i.$$

注 2.3 由 (1) 式可知, 设 $\boldsymbol{\eta}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}),\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A)=|A|/n$, $\mu^{(2)}(A)=\sum\limits_{i=1}^{|A|}\omega_i$ 时, $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})$ 退化为基于 $\boldsymbol{\omega}$ 的有序加权平均算子(OWA 算子) $\mathbf{O}_{\boldsymbol{\omega}}$：

$$\mathbf{O}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\omega_ix_{[i]}.$$

定义 2.2 [?] 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, $U\in\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$. 基于半一致模 Sugeno 测度的 Choquet 积分的 orness 测度 $orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})$ 定义为

$$orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{t}}\sum_{T\subseteq X|T|=t}\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T).\tag{2}$$

注 2.4 由(2)式可知, 设 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n),\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A)=\sum\limits_{i\in A}p_i,\mu^{(2)}(A)=\sum_{i=1}^{|A|}\omega_i$ 时, $orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})$ 退化基于权重向量 $\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}$ 的半一致模的有序加权平均算子(SUOWA 算子)的 orness测度 $orness(S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}})$：

$$orness(S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}})=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{t}}\sum_{T\subseteq X|T|=t}\upsilon^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(T).$$

注 2.5 由(2)式可知, 设 $\boldsymbol{\eta}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}),\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A)=\frac{|A|}{n}$, $\mu^{(2)}(A)=\sum_{i=1}^{|A|}\omega_i$ 时, $orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})$ 退化为基于 $\boldsymbol{\omega}$ 的有序加权平均算子(OWA 算子)的 orness 测度 $orness(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\omega}})$：

$$orness(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\omega}})=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\omega_i.$$

定义 2.3 [9] 设 X 为有限集, μ 是 X上的标准容量, $j \in X$. j关于 μ的沙普值定义为:

$$\phi(\mu, j) = \sum_{T \subseteq X \setminus j\}} \frac{(n-t-1)!t!}{n!}(\mu(T \cup \{j\}) - \mu(T)).$$

其另一个表达式为:

$$\phi(\mu, j) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}} \sum_{\substack{T \subseteq X \setminus \{j\} \\ |T|=t}} (\mu(T \cup \{j\}) - \mu(T)).$$

定义 2.4 [9] 设 X 为有限集, μ 是 X上的标准容量,则 $j \in X$. j 关于 μ 的否决和喜爱值定义为:

$$\operatorname{veto}(C_\mu, j) = 1 - \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq X \setminus \{j\}} \frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}} \mu(T)$$

$$\operatorname{favor}(C_\mu, j) = \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq X \setminus \{j\}} \frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}} \mu(T \cup \{j\}) - \frac{1}{n-1}$$

不难计算,另一种表达式为:

$$\operatorname{veto}(C_\mu, j) = 1 - \frac{1}{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}} \mu(T)$$

$$\operatorname{favor}(C_\mu, j) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}} \sum_{\substack{T \subseteq X \setminus \{j\} \\ |T|=t}} \mu(T \cup \{j\}) - \frac{1}{n-1}.$$

引理 2.1 [9] 设 X 为有限集, μ 是 X上的标准容量, 则有

$$\operatorname{veto}(C_\mu, j) + \operatorname{favor}(C_\mu, j) = 1 + \frac{n\phi(\mu, j) - 1}{n-1}$$

定理 2.1 设 X 为有限集, $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 对于所有的 $j \in X$,若$\sum_{i=1}^{j} \mu^{(2)} \leq j/n$ 且 $\min_{i \in X} \mu^{(1)} + \min_{i \in X} \mu^{(2)} \geq 1/n$, 则对于任意的 $j \in X$, 有

$$\phi\left(v_{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}, j\right) = \mu^{(1)}(j),$$

$$\operatorname{veto}\left(S_{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}, j\right) = \frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{2(n-1)} + 1 - \operatorname{orness}\left(S_{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}\right),$$

$$\operatorname{favor}\left(S_{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}, j\right) = \frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{2(n-1)} + \operatorname{orness}\left(S_{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}\right).$$

证明 根据定义 2.3, 可得

$$\phi\left(v_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}},j\right)=\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{1}{\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}}\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}\left(\mu^{(1)}(j)+\mu^{(2)}(t+1)-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\mu^{(1)}(j)+\mu^{(2)}(t+1)-\frac{1}{n}\right)=\mu^{(1)}(j).$$

进一步, 有定义 2.4, 可得否决和喜爱值为:

$$\operatorname{veto}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}},j\right)=1-\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}}\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}v_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}(T)$$

$$=1-\frac{1}{n-1}\left(\left(\frac{1-\mu^{(1)}(j)}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n-1}t+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right)$$

$$=1-\frac{1-n\mu^{(1)}(j)}{2(n-1)}-\operatorname{orness}\left(O_{\mu}^{(2)}\right)$$

$$=\frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{2(n-1)}+1-\operatorname{orness}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}\right).$$

$$\operatorname{favor}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}},j\right)=1-\operatorname{veto}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}},j\right)+\frac{n\phi\left(v_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}},j\right)-1}{n-1}$$

$$=-\frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{2(n-1)}+\operatorname{orness}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}\right)+\frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{n-1}$$

$$=\frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{2(n-1)}+\operatorname{orness}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{T_{\mathbf{L}}}}\right).$$

定理 2.2 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 对于所有的 $j\in X$,$\sum_{i=1}^{j}\mu^{(2)}\leq j/n$. 若 $v_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{\tilde{p}}}$ 是 X上的标准容量,则对于 $j\in X$, 有

$$\phi\left(v_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{\tilde{p}}},j\right)=\frac{1}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)+\left(n\mu^{(1)}(j-1)\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)\right),$$

$$\operatorname{veto}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{\tilde{w}}},j\right)=1-\frac{n}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\ \operatorname{orness}\ \left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{\tilde{\tilde{p}}}}\right),$$

$$\operatorname{favor}\left(S_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}^{U_{\tilde{p}}},j\right)=1-\operatorname{veto}\left(S_{p,w}^{U_{\tilde{p}}},j\right)+\frac{n}{(n-1)^2}$$

$$\cdot\left(1-\mu^{(1)}(j)+\left(n\mu^{(1)}(j)-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)\right)-\frac{1}{n-1}.$$

证明 根据定义 2.4和注 2.5, 对于 $j \in X$,我们可得

$$\text{veto}\left(S^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}, j\right) = 1 - \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}}\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}} v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)$$

$$= 1 - \frac{1}{n-1}\frac{n}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)$$

$$= 1 - \left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\frac{n}{n-1}\,\text{orness}\left(O_w\right)$$

$$= 1 - \left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\frac{n}{n-1}\,\text{orness}\left(S^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}\right).$$

同理, 对于 $t \geq 1$, 可得

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}} v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T\cup\{j\}) = \sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\T|=t}}\frac{n}{t+1}\left(\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)+\mu^{(1)}(j)\right)\left(\sum_{i=1}^{t+1}\mu^{(2)}(i)\right)$$

$$= \frac{n}{t+1}\left(\sum_{i=1}^{t+1}\mu^{(1)}(i)\right)\begin{pmatrix} n-1 \\ t \end{pmatrix}\left(\frac{t\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)}{n-1}+\mu^{(1)}(j)\right).$$

注意到,当 $t=0$时,以下结论也成立,

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=0}} v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T\cup\{j\}) = v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\{j\}) = n\mu^{(1)}(j)\mu^{(2)}(1).$$

因此,根据定义 2.4,可得

$$\text{favor}\left(S^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}, j\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{n}{t+1}\left(\sum_{i=1}^{t+1}\mu^{(2)}(i)\right)\left(\frac{t\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)}{n-1}+\mu^{(1)}(j)\right) - \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{n}{(n-1)^2}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(n-1-t)\mu^{(1)}(j)+t}{t+1}\left(\sum_{i=1}^{t+1}\mu^{(2)}(i)\right) - \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{n}{(n-1)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{(n-t)\mu^{(1)}(j)+t-1}{t}\left(\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right) - \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{(n-t)\mu^{(1)}(j)+t-1}{t}\right)\mu^{(2)}(i) - \frac{1}{n-1}.$$

进一步

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{(n-t)\mu^{(1)}(j)+t-1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\left(\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)+\frac{n\mu^{(1)}(j-1)}{t}\right)\right)\mu^{(2)}(i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)(n-i+1)+\left(n\mu^{(1)}(j-1)\right)\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)$$
$$=\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(n-i)\mu^{(1)}(i)+1\right)+(np_j-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i),$$

由 $orness(O_\omega)$ 及 orness $\left(S^{U_{\bar{p}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}\right)$, 可得

$$\begin{aligned}\text{favor}\left(S^{U_{\bar{p}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}},j\right)=&\frac{n}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\ \text{orness}\ \left(S^{U_{\bar{p}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}},j\right)+\frac{n}{(n-1)^2}\\&\cdot\left(1-\mu^{(1)}(j)+\left(n\mu^{(1)}(j)-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)\right)-\frac{1}{n-1}\\=&1-\text{veto}\left(S^{U_{\bar{p}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}},j\right)+\frac{n}{(n-1)^2}\\&\cdot\left(1-\mu^{(1)}(j)+\left(n\mu^{(1)}(j)-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)\right)-\frac{1}{n-1}.\end{aligned}$$

根据引理 2.1,可得

$$\begin{aligned}\phi\left(v^{U_{\bar{p}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}},j\right)&=\frac{1}{n}\left((n-1)\left(\text{veto}\left(S^{U_{\cdot}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}},j\right)+\text{favor}\left(S^{U_{\cdot}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}},j\right)-1\right)+1\right)\\&=\frac{1}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)+\left(n\mu^{(1)}(j)-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=i}^{n}\frac{1}{t}\right)\mu^{(2)}(i)\right).\end{aligned}$$

本文通过提出的基于 Sugeno 测度半一致模的 Choquet 积分,对基于 Sugeno 测度半一致模的Choquet积分的沙普值、否决和喜爱指数进行谈论与研究. 然而, 为了更好的适应决策者不同形式的偏好信息以及信息融合的需要, 许多学者提出了很多拓展的算子. 因此, 我们下一步的工作是将粗糙集理论与基于 Sugeno 测度半一致模的 Choquet 积分结合起来, 应用其相关知识, 对基于 Sugeno 测度半一致模的 Choquet 积分做进一步的研究.

基金项目

伊犁师范大学校级项目(2021YSYB072)。

参考文献

[1] Grabisch, M. (1995) Fuzzy Integral in Multicriteria Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems*, **69**, 279-298. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)00174-6

[2] Yager, R.R. (1988) On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Muiticriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **18**, 183-190. https://doi.org/10.1109/21.87068

[3] Yager, R.R. (1993) Families of OWA Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **59**, 125-148. https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90194-M

[4] Dujmovic, J.J. (2008) Continuous Preference Logic for System Evaluation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **15**, 1082-1099. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2007.902041

[5] Jin, L.S. (2015) Some Properties and Representation Methods for Ordered Weighted Averaging Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **261**, 60-86. https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.04.019

[6] Yager, R.R. (2004) OWA Aggregation over a Continuous Interval Argument with Applications to Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, **34**, 1952-1963. https://doi.org/10.1109/TSMCB.2004.831154

[7] Li, D.F. (2011) The GOWA Operator Based Approach to Multiattribute Decision Making Using Intuitionistic Fuzzy Sets. *Mathematical and Computer Modelling*, **53**, 1182-1196. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.11.088

[8] Llamazares, B. (2016) SUOWA Operators: Constructing Semi-Uninorms and Analyzing Specific Cases. *Fuzzy Sets and Systems*, **278**, 119-136. https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.02.017

[9] Llamazares, B. (2018) Closed-Form Expressions for Some Indices of SUOWA Operators. *Information Fusion*, **41**, 80-90. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.08.010

[10] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[11] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M. (2000) Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Application. Physica-Verlag, Heidelberg.

[12] 巩增泰, 李巧霞. 基于Sugeno测度的半一致模有序加权平均算子及其递归集成器设计[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(6): 11-28.