Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1135-1141
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134118

基于Sugeno测度半一致模Choquet积分

李巧霞[1,2*]，徐苏苏[1,2]，辛　珍[1,2]，杨雨荷[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘　要

基于半一致模的有序加权平均(SUOWA)算子是加权平均(WA)算子和有序加权平均(OWA)算子的推广，本文在基于Sugeno 测度半一致模的Choquet积分的基础上，结合基于半一致模有序加权平均算子的特点，讨论了基于Sugeno 测度半一致模的Choquet积分的相关性质，从而对多元数据进行更好地集成。

关键词

Sugeno测度，Choquet 积分，SUOWA算子

The Choquet Integral of Semi-Uninorm Based on Sugeno Measures

Qiaoxia Li[1,2*], Susu Xu[1,2], Zhen Xin[1,2], Yuhe Yang[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

The semi-uninorm ordered weighted averaging (SOWA) operators is generalize of weighted means and OWA operators. In this paper, the Choquet Integral of semi-uninorm based on Sugeno

* 通讯作者。

文章引用: 李巧霞, 徐苏苏, 辛珍, 杨雨荷. 基于Sugeno测度半一致模Choquet积分[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1135-1141. DOI: 10.12677/pm.2023.134118

measures are discussed and combine the characteristics of the the semi-uninorm ordered weighted averaging operators.

Keywords

Sugeno Masures, Choquet Integral, SUOWA Operators

1. 前言

聚合运算符是聚合多个科学领域值的强大工具. 在现有的大量算子中, Choquet积分因其通用性而扮演着重要的角色 [1]. 值得一提的是Choquet积分推广了两个著名的算子, 加权均值算子和有序加权平均(OWA)算子 [2]，它们在文献中被频繁使用. 事实上, 在信息集成时, 加权平均(WA) 算子和有序加权平均(OWA) 算子是不同的. 加权平均算子根据每个信息源的重要性(属性权重)来加权在系统中的重要性, 而有序加权平均(OWA)算子则根据它们的相对位置的重要性(位置权重) 来加权其在系统中的重要性. 加权平均(WA) 算子和有序加权平均(OWA) 算子在模糊逻辑控制器、满意度问题、多准则聚集问题等方面 [3–5]进行了广泛的研究. 而后, 很多学者在不同背景下将 WA算子和 OWA 算子进一步拓展、讨论和研究 [6]. 2015 年, Llamazares 提出了基于半一致模有序加权平均 (SUOWA) 算子. 系统研究了既考虑属性权重又考虑位置权重的集成方法, 并应用于不确定多属性决策中, 其特点是在信息集成算子中包括两组权重向量 [7]. 1974 年, 日本学者Sugeno 推广了经典的概率测度的可列可加性, 以约束条件较弱的单调性取代了经典概率中的可加性条件, 提出了模糊测度的概念, 这为我们提供了一个能够有效描述现实问题中存在的相互依赖, 相互关联现象的工具 [8–11]. 集成算子理论的另一个重要内容是集结信息的权重确定问题信息, 权重体现了决策者给出的决策信息的重要性程度, 其大小直接关系到最终的决策效果和集结结果.如何将两组测度结合起来, 对多元数据进行更好地集成(如既考虑属性权重又考虑位置权重的集成方法等), 作为三角模推广的一致模或半一致模是经常考虑的. 2019 年, 巩、李借助于 Sugeno 测度和三角模推广的一致模和半一致模的定义 [12], 提出了基于Sugeno 测度半一致模的Choquet 积分以及与之相关联的orness 测度的定义及其性质 [13], 并对其进行了举例说明. 本文第一部分收集了模糊测度、半一致模等定义; 第二部分根据基于 Sugeno 测度半一致模的Choquet 积分的定义及其他性质, 对基于 Sugeno 测度半一致模的Choquet 积分的其他性质进一步谈论和研究.

2. 定义及说明

设 X 为非空集合, $\mathcal{A}$ 是由 X 的子集构成的 $\sigma-$ 代数, 称集函数 $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty)$ 为正规的模糊测度(Sugeno测度), 是指 [8–11]:

(1) $\mu(\varnothing)=0$;

(2) $\mu(X)=1$;

(3) 对于$A,B\in\mathcal{A}$, 若 $A\subseteq B$, 则 $\mu(A)\leq\mu(B)$.

定义 1.1 设 X 为有限集, μ 是 $\mathcal{A}$ 上的 Sugeno 测度. 定义 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 X 上基于模糊测度 μ 的 Choquet 积分为

$$(C)\int_A \mathbf{x}d\mu=\sum_{i=1}^{n}x_i(\mu(A_i)-\mu(A_{i+1})).$$

不难计算

$$(C)\int_A \mathbf{x}d\mu=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})\mu(A_i).$$

其中, $X=(1,2,\cdots,n), A\subseteq X, A_i=\{i,i+1,\cdots,n\}$, $i=1,2,\cdots,n, A_{n+1}=\emptyset, x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$.

定义 1.2 [12] 设二元函数 $U:[0,1]^2\to[0,1]$. 称 U 是一个半一致模, 是指 U 对每个变量具有单调性且存在单位元 $e\in[0,1]$, 即对任意的 $x\in[0,1]$, 存在 $e\in[0,1]$, 有 $U(e,x)=U(x,e)=x$.

以下为两个连续的半一致模:

例1.1.

$$U_{\tilde{P}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in[1/n,1]^2,\\ nxy & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$U_{T_{\mathrm{L}}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in(1/n,1]^2,\\ \max(x+y-1/n,0) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

由于 $U_{\tilde{P}}$ 和 $U_{T_{\mathrm{L}}}$ 都是连续的,则上面的两个半一致模可以写成:

$$U_{T_{\mathrm{L}}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in(1/n,1]^2,\\ \max(x+y-1/n,0) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$U_{\tilde{P}}(x,y)=\begin{cases}\max(x,y) & \text{if } (x,y)\in(1/n,1]^2,\\ nxy & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定义 1.3 [13] 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 半一致模 $U\in\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$. 对于 $A\subseteq X$, 定义 $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}:2^X\to R$ 为

$$\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A)=|A|U\big(\frac{\mu^{(1)}(A)}{|A|},\frac{\mu^{(2)}(A)}{|A|}\big).$$

若 $A=\varnothing$, 记 $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\varnothing)=0$. $|A|$ 表示集合 A 的基数. 其中, $\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}=\{U\in\mathcal{U}^{\frac{1}{n}}|\ U(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\leq\frac{1}{k},\forall k\in X\}$. 显然地, $\mathcal{U}_i^{\frac{1}{n}}\subseteq\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$.

容易计算:

(1) $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\varnothing)=0$;

(2) $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(X)=|X|U(\frac{\mu^{(1)}(X)}{|X|},\frac{\mu^{(2)}(X)}{|X|})=1$;

(3) $\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}$ 的单调覆盖 $\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A)=\max\limits_{B\subseteq A}\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(B)$ 满足单调性.

3. 基于Sugeno测度半一致模的Choquet 积分及特性

定义 2.1 [13] 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, $U\in\tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$. $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 基于 Sugeno 测度半一致模的 Choquet 积分 $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}:R^n\to R$ 定义为

$$C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A_{[i]})-\hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A_{[i-1]}))x_{[i]}, \tag{1}$$

其中 $A_{[i]} = \{[1],[2],\cdots,[i]\}$, $A_{[0]} = \emptyset$, $x_{[i]}(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 $\mathbf{x}$ 中第 i 个大的数, 即 $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$.

不难计算

$$C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\upsilon}^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(A_{[i]})(x_{[i]} - x_{[i+1]}).$$

R^n上的一个加权向量 $\mathbf{q}$ 是指 $\mathbf{q} = (q_1,q_2,\cdots,q_n) \in [0,1]^n$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$. $\mathcal{W}$ 表示 R^n 上所有加权向量的集合.

注 2.1 由 (1) 式可知, 设 $\mathbf{p} = (p_1,p_2,\cdots,p_n), \boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A) = \sum\limits_{i\in A} p_i$, $\mu^{(2)}(A) = \sum\limits_{i=1}^{|A|} \omega_i$ 时, $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})$ 退化为基于权重向量 $\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}$ 的半一致模有序加权平均(SUOWA)算子 $S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}$:

$$S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(\hat{\upsilon}^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(A_{[i]}) - \hat{\upsilon}^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(A_{[i-1]}))x_{[i]}.$$

注 2.2 由 (1) 式可知, 设 $\mathbf{p} = (p_1,p_2,\cdots,p_n), \boldsymbol{\eta} = (\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A) = \sum\limits_{i\in A} p_i$, $\mu^{(2)}(A) = |A|/n$ 时, $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})$ 退化为基于权重向量 $\mathbf{p}$ 的加权平均算子 $\mathbf{M_p}$:

$$\mathbf{M_p}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

注 2.3 由 (1) 式可知, 设 $\boldsymbol{\eta} = (\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}), \boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A) = |A|/n$, $\mu^{(2)}(A) = \sum\limits_{i=1}^{|A|} \omega_i$ 时, $C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(\mathbf{x})$ 退化为基于 $\boldsymbol{\omega}$ 的有序加权平均算子(OWA 算子) $\mathbf{O}_{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\mathbf{O}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{[i]}.$$

定义 2.2 [13] 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, $U \in \tilde{\mathcal{U}}^{\frac{1}{n}}$. 基于半一致模 Sugeno 测度的 Choquet 积分的 orness 测度 $orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})$ 定义为

$$orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{t}}\sum_{T\subseteq X|T|=t}\upsilon^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T). \tag{2}$$

注 2.4 由(2)式可知, 设 $\mathbf{p} = (p_1,p_2,\cdots,p_n), \boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A) = \sum\limits_{i\in A} p_i, \mu^{(2)}(A) = \sum_{i=1}^{|A|} \omega_i$ 时, $orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})$ 退化基于权重向量 $\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}$ 的半一致模的有序加权平均算子(SUOWA 算子)的 orness测度 $orness(S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}})$:

$$orness(S^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{t}}\sum_{T\subseteq X|T|=t}\upsilon^U_{\mathbf{p},\boldsymbol{\omega}}(T).$$

注 2.5 由(2)式可知, 设 $\boldsymbol{\eta} = (\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}), \boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是两个权重向量, 当 $\mu^{(1)}(A) = \frac{|A|}{n}$, $\mu^{(2)}(A) = \sum_{i=1}^{|A|} \omega_i$ 时, $orness(C^U_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})$ 退化为基于 $\boldsymbol{\omega}$ 的有序加权平均算子(OWA 算子)的 orness 测度 $orness(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\omega}})$:

$$orness(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\omega_i.$$

定理 2.1 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 对于所有的 $j \in X$,若$\sum_{i=1}^{j} \mu^{(2)} \leq j/n$ 且 $\min_{i\in X} \mu^{(1)} + \min_{i\in X} \mu^{(2)} \geq 1/n$, 则对于任意的 $T \subseteq X$, 使得$|T| = t \geq 1$, 有

$$v^{U_{T_L}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)=\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)+\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)-\frac{t}{n}$$

定理 2.2 设 X 为有限集, $\mu^{(1)}$ 是 X 上的一个 Sugeno 测度, 若 $t\geq 1$, 则

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)=\begin{pmatrix}n-1\\t-1\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\mu^{(1)}(i)=\begin{pmatrix}n-1\\t-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\frac{t}{n}$$

进一步,对于 $j\in X$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)&=\begin{pmatrix}n-2\\t-1\end{pmatrix}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\mu^{(1)}(i)=\begin{pmatrix}n-2\\t-1\end{pmatrix}\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\\&=\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}\frac{t\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)}{n-1}.\end{aligned}$$

定理 2.3 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 对于所有的 $j\in X$,若$\sum_{i=1}^{j}\mu^{(2)}\leq j/n$ 且 $\min_{i\in X}\mu^{(1)}+\min_{i\in X}\mu^{(2)}\geq 1/n$, 则对于$t\geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}v^{U_{T_L}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)=\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)$$

进一步, 对于$j\in X$, 有

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}v^{U_{T_L}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)=\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}\left(\left(\frac{1-\mu^{(1)}(j)}{n-1}-\frac{1}{n}\right)t+\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right).$$

证明 根据定理2.1和定理2.2，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}v^{U_{T_L}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)&=\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)+\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)-\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T||=t}}\frac{t}{n}\\&=\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\frac{t}{n}+\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)-\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\frac{t}{n}\\&=\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i),\end{aligned}$$

进一步,可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}v^{U_{T_L}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)&=\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\T|=t}}\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)+\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)-\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\T|=t}}\frac{t}{n}\\&=\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}\left(\left(\frac{1-\mu^{(1)}(j)}{n-1}-\frac{1}{n}\right)t+\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right).\end{aligned}$$

定理 2.4 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度, 对于所有的 $j\in X$,若$\sum_{i=1}^{j}\mu^{(2)}\leq j/n$ 且 $\min_{i\in X}\mu^{(1)}+\min_{i\in X}\mu^{(2)}\geq 1/n$, 则对于$t\geq 1$, 有

$$orness(S^{U_{T_L}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}})=orness(O_w)\leq 0.5$$

证明 根据定义 2.2 与注 2.5, 可得

$$\begin{aligned}\text{orness}\left(S^{U_{T_{\mathrm{L}}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}\right)&=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}}\sum_{\substack{T\in N\\|T|=t}}v^{U_{I_1}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{t}w_i\\&=\text{orness}\left(O_w\right)\leq 0.5,\end{aligned}$$

定理 2.5 设 X 为有限集, $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ 是 X 上的两个 Sugeno 测度,对于所有的 $j\in X$,有$\sum_{i=1}^{j}\mu^{(2)}\leq j/n$且$\sum_{i=1}^{j}\mu^{(2)}/j\leq j/n$, 若 $T\subseteq X$ 且 $|T|=t\geq 1$,则

$$\begin{aligned}v^{U_{\bar{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)&=tU_{\bar{P}}\left(\frac{\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)}{t},\frac{\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)}{t}\right)\\&=\frac{n}{t}\left(\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)\right)\left(\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right).\end{aligned}$$

定理 2.6 设 X 为有限集, $\mu^{(1)}$ 是 X 上的一个 Sugeno 测度, 对于所有的 $j\in X$,$\sum_{i=1}^{j}\mu^{(2)}\leq j/n$. 若 $t\geq 1$,则

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)=\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i),$$

进一步，对于 $j\in X$,有

$$\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)=\frac{n}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i).$$

证明 根据定理 2.2 与定理 2.5, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)&=\frac{n}{t}\left(\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right)\sum_{\substack{T\subseteq X\\|T|=t}}\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)\\&=\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}v^{U_{\tilde{P}}}_{\mu^{(1)},\mu^{(2)}}(T)&=\frac{n}{t}\left(\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i)\right)\sum_{\substack{T\subseteq X\setminus\{j\}\\|T|=t}}\sum_{i\in T}\mu^{(1)}(i)\\&=\frac{n}{n-1}\left(1-\mu^{(1)}(j)\right)\begin{pmatrix}n-1\\t\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}\mu^{(2)}(i).\end{aligned}$$

基金项目

伊犁师范大学校级项目(2021YSYB072)。

参考文献

[1] Grabisch, M. (1995) Fuzzy Integral in Multicriteria Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems*, **69**, 279-298. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)00174-6

[2] Yager, R.R. (1988) On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Muiticriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **18**, 183-190. https://doi.org/10.1109/21.87068

[3] Torra, V. (1996) Weighted OWA Operators for Synthesis of Information. *Proceedings of the Fifth IEEE International Fuzzy Systems*, **2**, 966-971. https://doi.org/10.1109/FUZZY.1996.552309

[4] Yager, R.R. (1993) Families of OWA Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **59**, 125-148. https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90194-M

[5] Llamazares, B. (2015) Constructing Choquet Integral-Based Operators That Generalize Weighted Means and OWA Operators. *Information Fusion*, **23**, 131-138. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2014.06.003

[6] 巩增泰, 李慧婷. 基于非可加测度的OWA算子递归集成及其集成器设计[J]. 陕西师范大学学报, 自然科学版, 2018, 46(3): 48-54.

[7] Llamazares, B. (2016) SUOWA Operators: Constructing Semi-Uninorms and Analyzing Specific Cases. *Fuzzy Sets and Systems*, **278**, 119-136. https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.02.017

[8] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[9] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M. (2000) Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Application. Physica-Verlag, Heidelberg.

[10] Llamazares, B. (2020) On the Relationship between the Crescent Method and SUOWA Operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **28**, 2645-2650. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2934937

[11] 哈明虎, 吴从炘. 模糊测度与模糊积分理论[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[12] Liu, H.W. (2012) Semi-Uninorms and Implications on a Complete Lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, **191**, 72-82. https://doi.org/10.1016/j.fss.2011.08.010

[13] 巩增泰, 李巧霞. 基于Sugeno测度的半一致模有序加权平均算子及其递归集成器设计[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(6): 11-28.