Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1142-1150
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134119

具有Dirichlet边界条件的非线性波动方程的时间周期解

曾燕苗，马　牧*

福州大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘　要

本文考虑具有小振幅时间周期外力项的非线性波动方程的Dirichlet边值问题，关注其时间周期解的存在性。结合Lyapunov-Schmidt约化、隐函数定理和压缩映象原理，我们证明当外力频率满足一个特定的Diophantine型的非共振条件时，方程存在相同频率的时间周期解。进一步地，对所得的周期解，我们将建立其在Sobolev意义下与古典意义下的正则性结论。最后，我们还将给出在方程的静态平衡点附近周期解的局部唯一性。

关键词

非线性波动方程，时间周期解，Lyapunov-Schmidt约化

Time Periodic Solutions of Nonlinear Waveequation with Dirichletboundary Conditions

Yanmiao Zeng, Mu Ma*

School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

This paper is concerned with the time-periodic solutions of the Dirichlet boundary value problem for nonlinear wave equations in the presence of a time-periodic external forcing with frequency ω and amplitude ε. Combining the Lyapunov-Schmidt reduction, the implicit function theorem and

*通讯作者。

文章引用：曾燕苗，马牧．具有 Dirichlet 边界条件的非线性波动方程的时间周期解[J]．理论数学，2023，13(4): 1142-1150. DOI: 10.12677/pm.2023.134119

the contraction mapping principle, we prove the existence of time-periodic solutions. The result holds for ω belongs to a Diophantine type parameter set. Moreover, we prove the regularity of the solutions in both Sobolev and classical cases. Finally, we prove the local uniqueness near a static equilibrium.

Keywords

Nonlinear Wave Equation, Time-Periodic Solution, Lyapunov-Schmidt Reduction

1. 引言

考虑非线性波动方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f\left(x, \omega t, u\right), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

方程(1.1)常被用于描述两端固定的弦在周期外力下的受迫振动，这里 $\omega > 0$ 表示外力频率，$0 < \varepsilon \ll 1$ 是用于描述外力振幅的摄动参数。本文关注当外力 $f(x,\cdot,u)$ 的周期为 2π 时，方程是否存在频率为 ω（即周期为 $2\pi/\omega$）的时间周期解。

非线性波动方程的周期解研究始于 Rabinowitz [1]，文中将椭圆边值理论的方法扩展到非线性波动方程中，进而将求解问题重新表述为一个变分问题，对 $\omega = 1$ 的情形建立了(1.1)的周期解存在性结论。当频率为 1 时，Dirichlet 边界条件下对应的 D'Alembert 算子谱 $\left\{l^2 - j^2, l \in \mathbb{Z}, j \geq 1\right\}$ 包含无穷重的零特征值，即完全共振情形。Rabinowitz 通过对非线性项 f 施加单调性条件，使得所对应的无穷维分支问题可解，从而解决了完全共振所导致的可逆性缺失。受此启发，Tanaka [2]，Fokam [3]利用紧性和单调性方法得到了非线性波动方程的周期解。Brézis，Bahri，Nirenberg 等，发展了 Rabinowitz 的变分方法进一步建立起一维非线性波动方程周期解的相关结论，见[4] [5] [6]。Cheng-Zhang [7]，Wei [8]结合 Rabinowitz 的变分方法和鞍点约化技术得到了高维非线性波动方程的周期解。需要指出的是，上述文章中的研究对象大都是有理频率的周期系统，事实上将 Rabinowitz 的变分方法推广至 $\omega \in \mathbb{Q}$ 并不会遇到本质困难，然而在处理无理频时，我们所遇到的难点则与完全共振情形大不相同。这是因为有理频率的限定在变分方法中作为一种紧性条件通常是不可或缺的。当 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 时，D'Alembert 算子 $\omega^2 \partial_{tt} - \partial_{xx}$ 的谱 $\left\{\omega^2 l^2 - j^2, l \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^+\right\}$ 中没有零特征值，但零却是聚点，此时线性化算子存在任意小的特征值，此种机制导致的共振现象在数学上称之为小除数现象。这一现象在无穷维周期系统、拟周期系统中广泛存在，它使得诸如隐函数定理等许多传统的证明手段失效，因此波动算子的逆算子的有界性变得难以估计。为攻克这一难点，文[9]引入了 KAM 理论，文[10] [11]引入了 Nash-Moser 迭代技术用以求解具有 Hamilton 结构的几类偏微分方程，尤其是波动方程，更多成果见[12] [13] [14] [15] [16]。

必须说明的是小除数现象的产生并不完全取决于振动频率的有理性，McKenna [17]应用不动点定理证明了当 $f(x,t,u) = g(u) + h(x,t)$，g 关于 u 满足一致 Lipschitz 条件时，方程(1.1)的弱解存在性。在研究过程中 McKenna 发现当频率属于实数域中的一个零测度子集时并不产生小除数共振，除了全体有理数以外这一频率集还包含部分无理数。文[18]借用数论中的概念对其给出了准确的描述，即零测集中的 ω 满

足连分数展开有界，又见 Mawhin 和 Ben-Naoum [19]。后来，Bambusi [20] [21]借鉴了 Diophantine 近似的理念提出了一个关于频率 ω 的强非共振条件，利用这一条件可构造出一个正测度的频率集，使得对应的算子谱拥有更好的分离性，从而允许对非线性项的高阶部分应用经典的压缩映象原理。最近，Wei [22]利用完全约化技术和 Leray-Schauder 理论，在非线性项满足渐近非共振条件下，得到了非线性波动方程周期解的存在性。

受 Bambusi [20] [21]的启发，并且基于对方程在静态平衡点附近动力学行为的观察，我们自然地想到将非线性扰动视为小振幅的零平均震荡来处理。反映在方法上，便是采用经典的 Lyapunov-Schmidt 约化，将原方程分解成分支方程和值域方程。首先，对 f 的零阶分支方程施加适当的非退化条件，通过经典的隐函数定理求解分支方程；然后在频率 ω 满足非共振条件时，通过压缩映象原理求解值域方程；最终得出周期解的存在性、正则性与局部唯一性。

本文的结构如下：第 1 节介绍研究背景和非线性波动方程周期解的一些结果；第 2 节介绍一些预备知识，隐函数定理和 Banach 不动点定理；第 3.1 节通过 Lyapunov-Schmidt 约化将规范化后的方程分解成分支方程和值域方程并给出本文的主要结果定理 3.1；第 3.2 节我们在 f 满足非退化条件下利用经典的隐函数定理求解分支方程；第 3.3 节我们在频率 ω 满足非共振条件下利用压缩映象原理求解值域方程；最后，结合 3.2 节和 3.3 节的结果完成定理 3.1 的证明。

2. 预备知识

本节给出一些本文所需的定理。

定理 2.1. **[23]** (隐函数定理)设 X,Y,Z 是 Banach 空间，$E\subset X\times Y$ 是点 (x_0,y_0) 的一个开邻域。设 $f\in C(E,Z)$ 关于 y 有 F 偏导算子 $f_y(x,y)=f_y'(x,y)$ 且 $f_y\in C(E,L(Y,Z))$，假设 f 满足以下 2 式：

(i) $f(x_0,y_0)=0$；

(ii) $f_y^{-1}(x_0,y_0)\in L(Z,Y)$。

则对方程 $f(x,y)=0$ 存在 $r,r_1>0$ 和唯一的 $y=u(x)\in C\left(B_r(x_0),B_{r_1}(y_0)\right)$，使得：

(i) $B_r(x_0)\times B_{r_1}(y_0)\subset E$；

(ii) $u(x_0)=y_0$；

(iii) $f(x,u(x))=0,\quad \forall x\in B_r(x_0)$。

进一步，若 $f\in C^1(E,Z)$，则 $u\in C^1(B_r(x_0),Y)$ 且

$$u'(x)=-f_y^{-1}(x,u(x))\circ f_x(x,u(x)),\quad \forall x\in B_r(x_0)$$

其中 $B_r(x_0)=\{x\in X:\|x-x_0\|<r\},\quad B_{r_1}(y_0)=\{y\in Y:\|y-y_0\|<r_1\}.$

定理 2.2. **[24]** (Banach 不动点定理)设 X 是 Banach 空间，$A:X\to X$ 是一个非线性映射，并且有

$$\|A(u)-A(\tilde{u})\|\le\gamma\|u-\tilde{u}\|\quad (u,\tilde{u}\in X),$$

这里常数 $\gamma<1$，我们称 A 是一个严格的压缩映射，A 在 X 中必定存在唯一的不动点。

3. 主要结果及其证明

3.1. 主要结论

首先通过 $t\to\omega t$ 将(1.1)规范化：

$$\begin{cases}\omega^2u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon f(x,t,u),\quad x\in(0,\pi),\quad t\in\mathbb{R},\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 f 关于 t 具有 2π 周期，假定 f 关于 (t,u) 是解析的，即

$$f(x,t,u)=\sum_{l\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}} f_{l,k}(x)u^k\mathrm{e}^{ilt}.$$

其中 $f_{l,k}(x)\in H_0^1((0,\pi))$，且关于 l 共轭对称，即 $f_{-l,k}=\overline{f_{l,k}}$.

定义 Banach 空间

$$U_{\sigma,s}:=\left\{u(x,t)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}u_l(x)\mathrm{e}^{ilt}:u_l\in H_0^1((0,\pi);\mathbb{C}),u_{-l}=\bar{u}_l,\right.$$
$$\left.\|u\|_{\sigma,s}^2:=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|u_l\|_{H^1}^2(1+l^{2s})\mathrm{e}^{2\sigma|l|}<\infty\right\},$$

其中 $\sigma\geq0$， $s\geq0$。当 $\sigma>0$ 时，上述空间中的函数，在复平面上的带型区域 $|\mathrm{Im}\,t|<\sigma$ 中存在有界解析延拓，且当 $s>1/2$ 时， $U_{\sigma,s}$ 是一个乘积代数：

$$\|uv\|_{\sigma,s}\leq c_s\|u\|_{\sigma,s}\|v\|_{\sigma,s},\quad\forall u,v\in U_{\sigma,s},$$

其中

$$c_s:=2^s\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^{2s}}\right)^{1/2}.$$

此外，我们还要求 f 满足以下假设：

(F)存在 $\sigma>0$， $r>0$ 使得

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}C_k(f)r^k<\infty,$$

其中

$$C_k(f)=\sqrt{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|f_{l,k}(x)\|_{H^1}^2(1+l^2)\mathrm{e}^{4\sigma|l|}}<\infty,\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

当 $\varepsilon/\omega\to0$ 时，方程(3.1)的解趋于某个静态解 $v(x)$。出于这种观察，我们自然地想到应用 Lyapunov-Schmidt 约化。

将空间分解成两部分： $U_{\sigma,s}=V\oplus W_{\sigma,s}$，其中

$$V:=H_0^1((0,\pi)),\quad W_{\sigma,s}:=\left\{w\in U_{\sigma,s}:w=\sum_{l\neq0}w_l(x)\mathrm{e}^{ilt}\right\}.$$

如此一来，我们就可把 $u\in U_{\sigma,s}$ 写成 $u=v(x)+w(x,t)$，其中 $v\in V$， $w\in W_{\sigma,s}$。将方程(3.1)分别投影到 $V,W_{\sigma,s}$ 上就得到

$$\begin{cases}-v_{xx}=\varepsilon\prod_V f(v+w), & \text{分支方程},\\ L_\omega w=\varepsilon\prod_W f(v+w), & \text{值域方程},\end{cases}$$

其中 $\prod_V,\prod_W$ 为从 $u\in U_{\sigma,s}$ 映射到 $V,W_{\sigma,s}$ 上的投影算子，Nemitski 算子

$$f(u)(x,t):=f(x,t,u(x,t))$$

以及

$$L_\omega u:=\omega^2u_{tt}-u_{xx}.$$

观察值域方程可知当 $\varepsilon/\omega\to0$ 时， $w\to0$。在这个极限下对应的分支方程为

$$-v_{xx}=\varepsilon f_0\left(x,v(x)\right), \tag{3.2}$$

其中

$$f_0(x,u)=\sum_{k\in\mathbb{N}} f_{0,k}(x)u^k.$$

非自治常微分方程(3.2)叫做零阶分支方程，我们对它施加以下假设：

(V)对某一 $\bar{\varepsilon}>0$，方程

$$\begin{cases}-v_{xx}=\bar{\varepsilon} f_0\left(x,v(x)\right),\\ v(0)=v(\pi)=0,\end{cases} \tag{3.3}$$

在 $H_0^1\left((0,\pi)\right)$ 中存在非退化解 $\bar{v}$，即(3.3)在 $\bar{v}$ 处的线性化方程

$$\begin{cases}-h_{xx}=\bar{\varepsilon} f_0'(\bar{v})h,\\ h(0)=h(\pi)=0,\end{cases}$$

在 $H_0^1\left((0,\pi)\right)$ 中的解只有 $h\equiv 0$。

需要说明的是假设(V)并不苛刻，只要 f_0 满足适当的条件，(V)是显然成立的，我们给出两个很容易想到的例子：

情形一，当 $\bar{\varepsilon}=0$ 时，$\bar{v}=0$ 即是(3.3)的非退化解，于是由隐函数定理可知，对足够小的 $\bar{\varepsilon}$，(3.3)同样存在非退化解。

情形二，若 $f_0(x,0)=\partial_u f_0(x,0)=0$，则对任意的 $\bar{\varepsilon}>0$，$\bar{v}>0$ 都是方程(3.3)的非退化解。

考虑以下方程的特征问题

$$\begin{cases}-\varphi_j''=\lambda_j\varphi_j,\\ \varphi_j(0)=\varphi_j(\pi)=0,\end{cases}$$

记 $\lambda_j, j=1,2,\cdots$ 为严格单调递增的特征值列，记 $\omega_j=\sqrt{\lambda_j}$ 对应弦的特征频率，$\left\|\varphi_j\right\|_{H^1}=1, j=1,2,\cdots$。我们要求 ω 满足以下条件：

(Q)称 ω 满足非共振条件，若对于 $\gamma>0$，有 $\omega\in W_\gamma\subseteq\mathbb{R}$，这里

$$W_\gamma:=\left\{\omega:\left|\omega l-\omega_j\right|\geq\frac{\gamma}{l},\ \forall j,l\in\mathbb{N},l\geq 1\right\}.$$

下面，我们给出本文的主要定理。

定理 3.1. 令 f 满足假设(F)与(V)，则对 $\forall\gamma>0$，存在 $C,\delta>0$ (与 $f,\bar{\varepsilon},\bar{v}$ 有关)，使得当

$$(\varepsilon,\omega)\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times W_\gamma\cap\left\{(\varepsilon,\omega):\frac{\varepsilon}{\omega}\leq\delta\gamma\right\}$$

时，方程(3.1)存在局部唯一解

$$u(\varepsilon,\omega)=v\left(\varepsilon,w(\varepsilon,\omega)\right)+w(\varepsilon,\omega),$$

其中 $v\in V$，$w\in W_{\sigma,s}$ 分别满足分支方程与值域方程，并且

$$\left\|w(\varepsilon,\omega)\right\|_{\sigma,s}\leq C\frac{\varepsilon}{\gamma\omega},\quad \left\|v\left(\varepsilon,w(\varepsilon,\omega)\right)-\bar{v}\right\|_{H^1}\leq C\frac{\varepsilon}{\gamma\omega}+C\left|\varepsilon-\bar{\varepsilon}\right|.$$

注：当 σ,s 满足适当的条件时，定理 3.1 中的解包含以下两种正则性结论：

情形一，当 $\sigma=0$ 时，$u\in U_{\sigma,s}$ 具备 Sobolev 正则性；

情形二，当$\sigma>0$，$s>1/2$时，$u\in U_{\sigma,s}$是解析的。

由于$u\in U_{\sigma,s}$具备以上正则性结论，当σ,s满足适当的条件时古典意义的正则性也蕴含其中。因为对$\forall t\in\mathbb{R}$，有$u(t,\cdot)\in H^3((0,\pi))$，而$H^3((0,\pi))$可嵌入到$C^2((0,\pi))$中。

3.2. 分支方程

之前我们使用过一个f导出的 Nemitski 算子，现在给出它的解析性质，这样由下面的引理可知，$f,f',f'',\cdots$在u的某个邻域内是一致有界的。

引理 3.2. 令f满足(F)，$\sigma\ge 0$，$s>1/2$，则 Nemitski 算子

$$f(u)(x,t):=f(x,t,u(x,t))$$

在$\left\{u\in U_{\sigma,s}:c_s\|u\|_{\sigma,s}<r\right\}$上是良定义的并且是解析的。

证明 首先，对$s>1/2$，由

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|u_l\|_\infty\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|u_l\|_{H^1}\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|u_l\|_{H^1}^2\left(1+l^{2s}\right)\right)^{1/2}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+l^{2s}}\right)^{1/2},$$

有$\|\cdot\|_\infty\le c_s\|\cdot\|_{\sigma,s}$。从而当$c_s\|\cdot\|_{\sigma,s}<r$，$\sigma\ge 0$时，由(F)可知$|f(x,t,u(x,t))|<\infty$。因此，Nemitski 算子$f$关于$\|\cdot\|_{\sigma,s}$是良定义的。

根据$\|\cdot\|_{\sigma,s}$的定义，存在$C=C(\sigma,s)>0$，使得对$\forall\sigma\ge 0$，$k\in\mathbb{N}$，有

$$\left\|\sum_{l\in\mathbb{Z}}f_{l,k}(x)\mathrm{e}^{ilt}\right\|_{\sigma,s}\le C\left\|\sum_{l\in\mathbb{Z}}f_{l,k}(x)\mathrm{e}^{ilt}\right\|_{2\sigma}=CC_k(f)<\infty.$$

那么当$c_s\|\cdot\|_{\sigma,s}<r$时，由(F)有

$$\|f(u)\|_{\sigma,s}\le\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\|\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}f_{l,k}(x)\mathrm{e}^{ilt}\right)u^k\right\|_{\sigma,s}\le C\sum_{k\in\mathbb{N}}C_k(f)\left(c_s\|u\|_{\sigma,s}\right)^k<C\sum_{k\in\mathbb{N}}C_k(f)r^k<\infty.$$

最后，Nemitski 算子f关于$\|\cdot\|_{\sigma,s}$的解析性可由幂函数性质推得(详见[25]中的附录 A)。

从现在起，我们所用的函数空间脚标仅限于$\sigma\ge 0$，$s>1/2$。由引理 3.2 可知，对上述脚标，存在一个公共的常数$R_0>0$，使得在$\left\{u\in U_{\sigma,s}:\|u\|_{\sigma,s}<R_0\right\}$上$f$是解析的，且$f,f',f'',\cdots$有公共上界。

由引理 3.2 可知，f在u的某个邻域内是解析的，因此我们可以利用经典的隐函数定理得到分支方程解的存在性，光滑性及局部唯一性结论。

引理 3.3. 设(F)与(V)成立，存在$R\in(0,R_0)$以及$\bar{\varepsilon}$的邻域$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$，对$\forall\sigma\ge 0$，$s>1/2$，存在$C^\infty$映射：

$$v(\varepsilon,w):(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times\left\{w\in W_{\sigma,s}:\|w\|_{\sigma,s}<R\right\}\to V,$$

使得$v(\varepsilon,w)$满足分支方程。此外，$\partial_\varepsilon v$与$\partial_w v$存在与σ,s无关的上界。

证明 直接应用经典的隐函数定理即可证得解的存在性。

由$\partial_\varepsilon v$与$\partial_w v$的有界性可以得到

$$\|v(\varepsilon,w)-v(\varepsilon,0)\|_{H^1}\le C\|w\|_{\sigma,s},\quad\|v(\varepsilon,0)-\bar{v}\|_{H^1}\le C|\varepsilon-\bar{\varepsilon}|.$$

3.3. 值域方程

记$F(\varepsilon,w):=f(v(\varepsilon,w)+w)$，于是值域方程可以写成

$$L_\omega w=\varepsilon\prod\nolimits_W F(\varepsilon,w).\tag{3.4}$$

从引理 3.2 可知 F 在 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times\left\{w\in W_{\sigma,s}:\|w\|_{\sigma,s}<R\right\}$ 上解析，且各阶导数一致有界。

接下来，我们利用压缩映象原理来求解(3.4)，由此可得值域方程解的存在性，光滑性和局部唯一性。

引理 3.4. 设(Q)成立，令 $\varepsilon\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，对 $\forall\sigma\in[0,\sigma_0]$，$s>1/2$，存在 $K,K',\delta>0$，使得当 $\varepsilon/\gamma\omega<\delta$ 时，L_ω 在 $W_{\sigma,s}$ 中可逆，其逆估计

$$\left\|L_\omega^{-1}\right\|_{\sigma,s}\le\frac{K}{\gamma\omega}. \tag{3.5}$$

并且存在 $w\in W_{\sigma,s}$ 满足(3.4)，且有

$$\|w\|_{\sigma,s}\le\frac{\varepsilon K'}{\gamma\omega}. \tag{3.6}$$

证明 当(Q)成立且 $\varepsilon\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 时，L_ω 的特征值满足

$$\left|\omega^2l^2-\omega_j^2\right|=\left|(\omega l-\omega_j)(\omega l+\omega_j)\right|>\frac{\gamma}{l}\cdot\omega l=\gamma\omega.$$

因此 L_ω 可逆，且(3.5)成立。由 L_ω 可逆，可得到

$$w=\varepsilon L_\omega^{-1}\prod\nolimits_W F(\varepsilon,w):=T_\omega(w).$$

对 $\forall w_{lj}\in H_0^1((0,\pi))$，记 $L_\omega^l w_l(x)=L_\omega^l\sum_{j\ge1}w_{lj}\varphi_j=\sum_{j\ge1}\left(-\omega^2l^2+\omega_j^2\right)w_{lj}\varphi_j$，则

$$\left\|\left(L_\omega^l\right)^{-1}w_l\right\|_{H^1}^2=\sum_{j\ge1}\left(\frac{w_{lj}}{\omega_j^2-\omega^2l^2}\right)^2\le\sum_{j\ge1}\left(\frac{lw_{lj}}{\gamma(\omega l+\omega_j)}\right)^2\le\left(\frac{1}{\gamma\omega}\right)^2\|w_l\|_{H^1}^2.$$

因此对 $\forall w\in W_{\sigma,s}$，由 $L_\omega^{-1}w=\sum_{l\ge1}\left[\left(L_\omega^l\right)^{-1}w_l\right]\mathrm{e}^{ilt}=\sum_{l\ge1}\frac{w_l}{\omega_j^2-\omega^2l^2}\mathrm{e}^{ilt}$，有

$$\left\|L_\omega^{-1}w\right\|_{\sigma,s}\le\frac{1}{\gamma\omega}\|w\|_{\sigma,s}.$$

从而

$$\|T_\omega w\|_{\sigma,s}=\varepsilon\left\|L_\omega^{-1}\prod\nolimits_W F(\varepsilon,w)\right\|_{\sigma,s}\le\frac{\varepsilon}{\gamma\omega}\left\|\prod\nolimits_W F(\varepsilon,w)\right\|_{\sigma,s}\le\frac{\varepsilon}{\gamma\omega}\|F(\varepsilon,w)\|_{\sigma,s}.$$

记 $B_R:=\left\{w\in W_{\sigma,s}:\|w\|_{\sigma,s}\le R\right\}$，当 $\varepsilon\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，$w\in B_R$ 时，$F(\varepsilon,w)$ 解析，且各阶导数一致有界，从而存在 $K''>0$，使得

$$\|T_\omega w\|_{\sigma,s}\le\frac{\varepsilon K''}{\gamma\omega}\|w\|_{\sigma,s}.$$

因此，当 $\varepsilon/\gamma\omega$ 足够小时，不妨令 $\varepsilon/\gamma\omega<\delta$，$T_\omega$ 是 B_R 中的一个压缩映射，从而根据压缩映象原理，存在唯一的 $w\in W_{\sigma,s}$ 满足(3.4)，且存在 $K'>0$，使得 $w\in W_{\sigma,s}$ 满足(3.6)。

3.4. 总结

在 3.2 与 3.3 节我们分别得到了分支方程与值域方程的解存在性、正则性与局部唯一性结论，至此，定理 3.1 的全部结论已证明完毕。

基金项目

基金项目：国家自然科学基金项目(12101130)；福建省自然科学基金项目(2021J05130)；福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT190024)。

参考文献

[1] Rabinowitz, P.H. (1967) Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **20**, 145-205. https://doi.org/10.1002/cpa.3160200105

[2] Tanaka, M. (2006) Existence of Multiple Weak Solutions for Asymptotically Linear Wave Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **65**, 475-499. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.09.022

[3] Fokam, J.-M. (2017) Multiplicity and Regularity of Large Periodic Solutions with Rational Frequency for a Class of Semilinear Monotone Wave Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 4283-4297. https://doi.org/10.1090/proc/12760

[4] Brezis, H. and Nirenberg, L. (1978) Forced Vibrations for a Nonlinear Wave Equation. *Communications in Pure Applied Mathematics*, **31**, 1-30. https://doi.org/10.1002/cpa.3160310102

[5] Bahri, A. and Brézis, H. (1980) Periodic Solutions of a Nonlinear Wave Equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **85**, 313-320. https://doi.org/10.1017/S0308210500011896

[6] Berti, M. and Biasco, L. (2006) Forced Vibrations of Wave Equations with Non-Monotone Nonlinearities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, **23**, 439-474. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[7] Chen, J. and Zhang, Z. (2016) Existence of Infinitely Many Periodic Solutions for the Radially Symmetric Wave Equation with Resonance. *Journal of Differential Equations*, **260**, 6017-6037. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.026

[8] Wei, H. and Ji, S. (2019) Existence of Multiple Periodic Solutions for a Semilinear Wave Equation in an *n*-Dimensional Ball. *Advanced Nonlinear Studies*, **19**, 529-544. https://doi.org/10.1515/ans-2018-2036

[9] Wayne, C.E. (1990) Periodic and Quasi-Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations via KAM Theory. *Communications in Mathematical Physics*, **127**, 479-528. https://doi.org/10.1007/BF02104499

[10] Craig, W. and Wayne, C.E. (1993) Newton's Method and Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **46**, 1409-1498. https://doi.org/10.1002/cpa.3160461102

[11] Bourgain, J. (1998) Quasi-Periodic Solutions of Hamiltonian Perturbations of 2D Linear Schrödinger Equations. *Annals of Mathematics*, **148**, 363-439. https://doi.org/10.2307/121001

[12] Berti, M., Bolle, P. and Procesi, M. (2010) An Abstract Nash-Moser Theorem with Parameters and Applications to PDEs. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, **27**, 377-399. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.11.010

[13] Ma, M. and Ji, S. (2018) Time Periodic Solutions of One-Dimensional Forced Kirchhoff Equations with *x*-Dependent Coefficients. *Proceedings of the Royal Society A*: *Mathematical*, *Physical and Engineering Sciences*, **474**, Article ID: 20170620. https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0620

[14] Ma, M. and Ji, S. (2019) Time Periodic Solutions of One-Dimensional Forced Kirchhoff Equations with *x*-Dependent Coefficients under Spatial Periodic Conditions. *Analysis and Mathematical Physics*, **9**, 2345-2366. https://doi.org/10.1007/s13324-019-00339-1

[15] Ma, M. and Ji, S. (2020) Time Periodic Solutions of One-Dimensional Forced Kirchhoff Equation with Sturm-Liouville Boundary Conditions. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1065-1084. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09761-2

[16] Chen, B., Li, Y. and Yang, X. (2019) Periodic Solutions to Nonlinear Wave Equation with *x*-Dependent Coefficients Under the General Boundary Conditions. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **31**, 321-368. https://doi.org/10.1007/s10884-018-9658-y

[17] McKenna, P.J. (1985) On Solutions of a Nonlinear Wave Question When the Ratio of the Period to the Length of the Interval is Irrational. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **93**, 59-64. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1985-0766527-X

[18] Berkovits, J. and Mawhin, J. (2001) Diophantine Approximation, Bessel Functions and Radially Symmetric Periodic Solutions of Semilinear Wave Equations in a Ball. *Transactions of the American Mathematical Society*, **353**, 5041-5055. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-01-02875-6

[19] Ben-Naoum, K. and Mawhin, J. (1992) The Periodic-Dirichlet Problem for Some Semilinear Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **96**, 340-354. https://doi.org/10.1016/0022-0396(92)90158-J

[20] Bambusi, D. (2000) Lyapunov Center Theorem for Some Nonlinear PDE's: A Simple Proof. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **29**, 823-837.

[21] Bambusi, D. and Paleari, S. (2001) Families of Periodic Solutions of Resonant PDEs. *Journal of Nonlinear Science*, **11**, 69-87. https://doi.org/10.1007/s003320010010

[22] Wei, H. and Ji, S. (2023) Periodic Solutions of a Semilinear Variable Coefficient Wave Equation Under Asymptotic Nonresonance Conditions. *Science China Mathematics*, **66**, 79-90. https://doi.org/10.1007/s11425-020-1900-5

[23] 李树杰, 张志涛.拓扑与变分方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2021: 28-29.

[24] Evans, L.C. (1998) Partial Differential Equation. American Mathematical Society, Providence, RI, 502.

[25] Pöschel, J. and Trubowitz, E. (1987) Inverse Spectral Theory. Academic Press, Inc., Boston, MA, 132.