

混合解析函数 Schwarz 问题与常系数椭圆方程的边值问题

雷妍妍, 刘 华

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2023 年 4 月 11 日; 录用日期: 2023 年 5 月 12 日; 发布日期: 2023 年 5 月 19 日

摘 要

本文引用混合解析函数并讨论其 Riemann-Hilbert 型边值问题, 先建立了混合解析函数的 Plemelj 公式、Cauchy 公式、Cauchy 主值积分 (奇异积分)、Privonov 定理. 在此基础上研究混合解析函数的 Schwarz 问题, 通过定义分区解析函数找出其解, 利用混合解析函数的 Schwarz 问题处理常系数椭圆方程的 Poisson 问题, 用 Cauchy 型积分给出解的具体表达式。

关键词

混合型解析函数, Schwarz 边值问题, 椭圆方程的边值问题

Schwarz Problem of Mixed Analytic Functions and Boundary Value Problem of Elliptic Equations with Constant Coefficients

Yanyan Lei, Hua Liu

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Apr. 11th, 2023; accepted: May 12th, 2023; published: May 19th, 2023

Abstract

In this paper, mixed analytic function is introduced and its Riemann-Hilbert boundary value problem is discussed. Firstly, Plemelj formula, Cauchy formula, Cauchy principal integral (singular integral) and Privonov theorem of mixed analytic function are established. On this basis, the Schwarz problem of mixed analytic functions is studied, and its solution is found by defining partition analytic functions. The Schwarz problem of mixed analytic functions is used to deal with Poisson problem of elliptic equations with constant coefficients. The specific expression of the solution is given by Cauchy integral.

Keywords

Hybrid Analytic Function, Schwarz Boundary Value Problem, Boundary Value Problems for Elliptic Equations

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1. 问题研究背景与现状

复微分方程的积分表示理论最早起源于 Poincare 和 Pompeiu 的工作, N.I.Muskhelishvili 和 I.N.Vekua 建立了系统研究理论并用于研究平面弹性力学. [1] 尤其是 I. N. Vekua, 在其著作 [2] 中, 在处理现代偏微分方程用古典函数论的工具. 在著作 [3] 中, 华罗庚对二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程进行系统的论述. 韩青、林芳华在著作 [4] 中对几类二阶椭圆偏微分方程进行了介绍. 路见可在著作 [5] 中对解析函数边值理论做了系统的研究. H.Begehr 等 [6–8] 针对具体的平面区域构造了大量相关复微分方程各类边值问题解的积分表示.

20 世纪初, 解析函数理论是复分析的核心理论. 该理论在机械、力学、物理学等方面有广泛的应用. 到了 21 世纪 30 年代, 对解析函数进行了推广, 文献 [9] 引入半解析函数的概念, 并对相

关性质作了研究, 文献 [10, 11] 对解析函数附加某些控制条件, 提出两类新的函数, 既混合解析函数、复调和函数, 讨论了有旋或有源的物理场, 同时把解析函数相关理论推广到混合解析函数条件下, 如对双解析函数的基本边值问题及唯一性问题, 还有对零点、奇点问题、泰勒展开定理和洛朗定理都做了初步研究. 随后众多数学学者对它进行深入研究, 得到一些重要结论, 文献 [12] 在 1998 年给出了双解析函数的 Cauchy 定理、Morera 定理和透弧延拓定理, 并利用这些理论讨论了双解析函数的性质及其 Hilbert 边值问题; 文献 [13, 14] 得到了双解析函数的 Cauchy 积分公式; 对双解析函数的 Schwarz 边值问题进行了探讨; 文献 [15] 提出了单位圆内双解析函数的 Schwarz 问题, 并给出了它的存在性问题. 文献 [16] 对开口曲线上的混合解析函数的 Riemann 边值问题进行研究, 文献 [17] 对鲁洛克斯三角形上的 Schwarz 边值问题.

1.2. 本文研究意义

文献 [18, 19] 对非线性椭圆方程的解的存在唯一性进行研究, 并给出解; 文献 [20] 给出了一类复偏微分方程边值问题的积分解. 本文创造性利用混合解析函数的性质结合 Schwarz 问题, 区别于文献 [21] 给出了常系数椭圆微分方程的边值问题的积分解.

1.3. 本文结构安排

本文第一章引言介绍了论文的写作背景和目的; 第二章给出了混合解析函数的定义, 以及混合解析函数的 Cauchy 积分公式、Cauchy 主值积分、正负边值函数表达式, 以及混合解析函数所满足的性质; 第三章给出了经典的 Schwarz 问题, 接着更深一步的研究混合解析函数的 Schwarz 问题, 定义了分区解析函数, 并给出了该问题的解; 第四章引入常系数椭圆方程 Poisson 问题, 结合混和解析函数的 Schwarz 问题, 给出积分解.

2. 混合解析函数

设 G 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的连通开集, 对任意 $z \in G$, 记

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.1)$$

若对任意 $z \in G$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 成立, 则称函数 f 在区域 G 上是解析的; 若对任意 $z \in G$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ 成立, 则称函数 f 在区域 G 上是共轭解析的.

设 $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$, 且 $|\lambda| \neq |\eta|$. 若对 G 中任意 z , 函数 f 满足

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \eta \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (2.2)$$

则函数 f 称为区域 G 上的 (λ, η) 型混合解析函数. 显然, 当 $\eta \neq 0$ 时, $(0, \eta)$ 型是解析的; 而当 $\lambda \neq 0$ 时, $(\lambda, 0)$ 型是共轭解析的.

定理 1. [Cauchy 公式] 设 f 为单连通域 Ω 上的混合解析函数, L 为 Ω 内光滑 Jordan 曲线,

设逆时针方向为正方向, 此时 $\lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \eta \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 则我们有 Cauchy 公式如下
当 $|\lambda| < |\eta|$ 时,

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t}), z \in D. \quad (2.3)$$

当 $|\lambda| > |\eta|$ 时,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t}), z \in D. \quad (2.4)$$

D 为 L 所围区域.

当 f 并不一定是混合解析函数, 而只 L 上的可知函数时, 我们定义 Cauchy 型积分如下:

$$F(z) = \frac{\mp 1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t}), z \notin L. \quad (2.5)$$

这里符号选取由 $|\lambda| > |\eta|$ 还是 $|\lambda| < |\eta|$ 不确定.

定义 1. [Cauchy 主值积分 (奇异积分)] 如 $f \in H(L)$

$$(C[f])(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mp 1}{2\pi i} \int_{L \setminus D(t,r)} \frac{f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t}), \quad (2.6)$$

这里 $D_r(t, r)$ 为以 t 为中心, r 为半径圆盘. 若极限 (2.6) 存在, 称之为 $f(t)$ 沿 L 上的 Cauchy 主值积分.

与解析情形相同, 我们有 Plemelj 公式.

定理 2. [Plemelj 公式] 设 L 为 C 中分段光滑曲线, 则 Cauchy 型积分 $F(z)$ 在 L 两侧的极限存在, 且

$$\begin{cases} F^+(t) = \frac{1}{2}f(t) + (C[f])(t) \\ F^-(t) = -\frac{1}{2}f(t) + (C[f])(t) \end{cases} \quad t \in L. \quad (2.7)$$

也有 Priconov 定理.

定理 3. [Priconov 定理] 设 $f \in H^\mu(L)$, 则 $(C[f])(t)$, $F^\pm(t) \in H^\mu(L)$, 设 D 为 L 所围区域, 则 $F^\pm(z)$ 分别 $\in H^\mu(\bar{D})$ 和 $\in H^\mu(D^c)$

3. Schwarz 问题: 混合解析函数的 Schwarz 问题

经典的 Schwarz 问题:

设 u 为单位圆上的 Hölder 连续实函数, 设单位圆内混合解析函数 f 使得

$$\operatorname{Re} f = u, \quad (3.1)$$

我们这一节讨论一个特殊的边值问题.

设 Γ 为如下方程确定的椭圆:

$$(\lambda t + \eta \bar{t}) \overline{(\lambda t + \eta \bar{t})} = 1, \quad (3.2)$$

取 Γ 逆时针方向为正方向, 所围内部区域为 S^+ , 外部为 S^- .

混合解析函数的 Schwarz 问题:

找一个 S^+ 上混合解析函数满足

$$\operatorname{Re} \phi(t) = u(t), \quad t \in \Gamma. \quad (3.3)$$

其中 $u(t) \in H(\Gamma), t \in \Gamma$. 设 ϕ 为 (3.3) 的解.

定义 S^- 上函数其中

$$\phi^*(z) = \overline{\phi \left[\rho^{-1} \left(\frac{1}{\bar{\lambda} \bar{z} + \bar{\eta} z} \right) \right]}, \quad z \in S^-. \quad (3.4)$$

注 1. 容易验证, ϕ^* 是混合解析函数且 $\forall t \in \Gamma$,

$$\phi^*(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in S^-}} \phi^*(z) = \phi \left[\rho^{-1} \left(\frac{1}{\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} t} \right) \right]. \quad (3.5)$$

由 (3.2) 得 $\frac{1}{\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} t} = \lambda t + \eta \bar{t}$ 以及 $\rho^{-1}(\bar{\lambda} \bar{z} + \bar{\eta} z) = t$, 故

$$\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}.$$

定义 2 (分区解析函数).

$$\Phi(z) = \begin{cases} \phi(z), & z \in S^+ \\ \phi^*(z), & z \in S^-. \end{cases} \quad (3.6)$$

则 $\Phi(z)$ 满足

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \Phi^-(t) + 2u(t) \\ \Phi(\infty) = \overline{\Phi(0)}, \end{cases} \quad t \in \Gamma. \quad (3.7)$$

反过来, 由 Plemelj 公式

$$\begin{cases} C[2u]^+(t) - C[2u]^-(t) = 2u(t) \\ C[2u](\infty) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

由

$$C[2u](0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2u(t)}{\lambda t + \eta \bar{t}} (\lambda dt + \eta d\bar{t}) \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} 2u(t) (\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} \bar{t}) (\bar{\lambda} d\bar{t} + \bar{\eta} d\bar{t}). \quad (3.10)$$

有

$$\begin{aligned} d((\lambda t + \eta \bar{t})(\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} \bar{t})) &= 0, \\ (\lambda t + \eta \bar{t})(\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} \bar{t}) &= -(\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} \bar{t})(\lambda dt + \eta d\bar{t}), \\ \overline{(\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} \bar{t})(\lambda dt + \eta d\bar{t})} &= -(\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} \bar{t})(\lambda dt + \eta d\bar{t}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

即它是一个纯虚值的函数固由 (3.9) $C[2u](0) \in \mathbb{R}$ 任取 $c \in \mathbb{R}$, 则

$$\overline{C[2u](0) + ic} = C[2u](0) - ic. \quad (3.12)$$

即

$$\Phi(z) = C[2u](z) + ic, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

为 (3.7) 的所有解.

但 (3.7) 的解不一定是 (3.3) 的解, 除非 $Im\Phi^+ = Im\Phi^-$, 此时 $\phi = \Phi^+$. 我们需要设

$$\Psi(z) = \overline{C[2u] \left[\rho^{-1} \left(\frac{1}{\lambda t + \eta \bar{t}} \right) \right] + ic}. \quad (3.14)$$

既然 $C[2u] + ic$ 是 (3.7) 的解, 则又记得

$$\rho^{-1} \left(\frac{1}{\lambda t + \eta \bar{t}} \right) = t, \quad \forall t \in \Gamma.$$

我们有

$$\begin{cases} \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = C[2u]^-(t) - C[2u]^+(t) = -2u(t) \\ \overline{\Psi(\infty)} = C[2u](0) + ic = \overline{C[2u](\infty) + ic} = \Psi(0). \end{cases} \quad (3.15)$$

即 $-\Psi(t)$ 也是 (3.7) 的解, 故

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}[C[2u] + ic - \Psi]. \quad (3.16)$$

也满足 (3.7), 且 $Re\Phi_0 = u$, 这就是 (3.3) 的解.

4. 常系数椭圆方程 Poisson 问题

设二元椭圆方程如下:

$$Au = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad a_{11} > 0. \quad (4.1)$$

求 (2.2) 混合解析函数满足如下 Poisson 条件 $u|_{\Gamma} = f(t)$ 的解, 其中 Γ 为椭圆为上节所定义, $f \in H(\Gamma)$.

设为 w_1, w_2 是 (4.1) 的特征方程

$$a_{11}w^2 + 2a_{12}w + a_{22} = 0 \quad (4.2)$$

的解.

则

$$Au = \left[(w_1 + i) \frac{\partial}{\partial z} - (w_1 - i) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \left[(w_2 + i) \frac{\partial}{\partial z} - (w_2 - i) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] = 0 \quad (4.3)$$

因为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ 是实正定矩阵, 所以 $w_1 = \bar{w}_2$. 且因为 (4.2) 的判别式 $(2a_{12})^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$, 所以 $Imw_1 \neq 0$.

设 $w = \frac{1}{2}(\lambda + \eta)$, 满足方程, 其中 λ, η 为椭圆参数.

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \lambda = w' - i \\ \eta = w' + i. \end{cases} \quad w' = w'_1, w'_2 \quad (4.5)$$

此时 $\overline{w_1 - i} = w_2 + i$, $\overline{w_2 - i} = w_1 + i$. 由 $Imw_1 \neq 0$ (4.5) (因为 $a_{11}a_{12} > a_{12}^2$), 有 $|\lambda|^2 \neq |\eta|^2$.

设 $D_{\bar{z}} = \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $D_z = \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial z}$ 中有 $Au = D_z D_{\bar{z}} u$. 由前面讨论, 存在 S^+ 上 $(0, \eta)$ 型混合解析函数 ϕ , 使得

$$Re\phi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma \quad (4.6)$$

其中

$$\phi(t) = \Phi_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t}) + ic, \quad c \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

特别地,

$$\phi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} 2f(t) (\bar{\lambda} \bar{t} + \bar{\eta} t) (\bar{\lambda} d\bar{t} + \bar{\eta} dt) + ic, \quad c \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

既然 ϕ 是 (λ, η) 混合解析函数, 则 $D_{\bar{z}}\phi = 0$, 因此

$$A\phi = D_z D_{\bar{z}}\phi = 0 \quad (4.9)$$

又 A 是一个实算子, 故我们得到 $Re\phi = 0$. 即 $Re\phi$ 是满足 (4.1) 和 Poisson 条件的解. 由椭圆方程的一般理论 Poisson 问题只有唯一解. 故我们得到最后定理:

定理 4. Poisson 问题存在唯一解.

由上节的 Φ 表达式, 我们可以给出 (4.1) 的唯一解. 如下:

定理 5. 椭圆方程 (4.1) 满足给定边值 $f(t)$ 的解为

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t}) - \overline{\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\lambda t + \eta \bar{t} - (\lambda z + \eta \bar{z})} (\lambda dt + \eta d\bar{t})} \right]. \quad (4.10)$$

5. 结论

利用混合解析函数 Schwarz 问题证明了 Poisson 问题的解存在且唯一, 并给出解的具体表达式.

基金项目

青年科学基金项目 (12101453)。

参考文献

- [1] Muskhelishvili, N.I. (1958) Singular Integral Equations. Wolters-Noordhoff, Groningen.
- [2] 依·涅·维库阿. 广义解析函数 [M]. 中国科学院教学研究所偏微分方程组, 北京大学数学力学系函数论教研组, 译. 北京: 人民教育出版社, 1960.
- [3] 华罗庚. 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [4] Han, Q. and Lin, F.H. (1997) An Introduction to Elliptic Differential Equations. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.
- [5] 路见可. 解析函数边值问题教程 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [6] Begehr, H. (1994) Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/2162>
- [7] Begehr, H. (2005) Boundary Value Problems in Complex Analysis. *Boletín De La Asociación Matemática Venezolana*, **12**, 65-86.
- [8] Begehr, H. (2007) Basic Boundary Value Problems in Complex Analysis. *Journal of Applied Functional Analysis*, **2**, 57-71.
- [9] 王见定. 半解析函数 [M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1988: 3-7.
- [10] 赵桢. 双解析函数与复调和函数以及它们的基本边值问题 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 1995, 31(2): 175-179.
- [11] 赵桢. 双解析函数的某些性质 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 1995, 17(2): 114-116.

-
- [12] 王明华. 双解析函数的性质及其 Hilbert 边值问题 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 1998, 34(1): 13-20.
- [13] 谢春平. 双解析函数的 Cauchy 积分公式 [J]. 烟台师范学院学报 (自然科学版), 1996, 12(3): 167-171.
- [14] 张建元, 张荣珠. 混合型解析函数的 Schwarz 边值问题 [J]. 昆明理工大学学报 (自然科学版), 2001, 26(6): 145-150.
- [15] 赵玉松, 谢春平. 双解析函数的 Schwarz 问题 [J]. 数学物理学报, 1999, 19(5): 597-600.
- [16] 王路路, 刘华. 开口曲线上混合解析函数的 Riemann 边值问题 [J]. 宁夏师范学院学报, 2020, 41(10): 33-40.
- [17] 郝延帅, 刘华. 鲁洛克斯三角形上的 Schwarz 边值问题 [J]. 理论数学, 2021, 11(5): 889-902.
<https://doi.org/10.12677/PM.2021.115102>
- [18] Bates, P. (1979) Solutions of Nonlinear Elliptic Systems with Meshed Spectra. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 4, 1023-1030.
[https://doi.org/10.1016/0362-546X\(80\)90013-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(80)90013-9)
- [19] 王丽平, 刘文忠. 一类非线性椭圆型微分方程解的存在唯一性研究 [J]. 应用数学学报, 2008, 31(5): 826-835.
- [20] 王大江, 龙仑, 屈非非, 刘华. 一类复偏微分方程边值问题的积分解 [J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 42-47. <https://doi.org/10.12677/AAM.2022.111007>
- [21] 王柔怀, 张功安. 常系数无低阶项椭圆方程式与组的基本解和半空间一般模型边值问题的 Poisson 核之一作法 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1962(1): 39-59.