

# 一类单无界变差点的连续函数的分形维数估计

任倩倩\*, 梁永顺

南京理工大学, 数学与统计学院, 江苏 南京

收稿日期: 2023 年 4 月 21 日; 录用日期: 2023 年 5 月 22 日; 发布日期: 2023 年 5 月 29 日

---

## 摘要

在本文中, 我们主要在闭区间上构造了仅有一个无界变差点的连续函数。接着讨论了它的分形维数, 该函数图像的分形维数严格大于其拓扑维数。尽管该连续函数只在零点处不可微, 但仍具有明显的分形特征。

## 关键词

分形维数, 无界变差点, Weierstrass 函数

---

## Estimation of Fractal Dimension of a Class of Continuous Function with Single Unbounded Variable Difference

Qianqian Ren\*, Yongshun Liang

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Apr. 21<sup>st</sup>, 2023; accepted: May 22<sup>nd</sup>, 2023; published: May 29<sup>th</sup>, 2023

---

## Abstract

In this paper, we mainly construct a continuous function with only one unbounded

---

\* 通讯作者。

variable difference on closed intervals. Then we discuss its fractal dimension. The fractal dimension of the function image is strictly larger than its topological dimension. Although the given function is only nondifferentiable at the zero point, it still has obvious fractal characteristics.

## Keywords

Fractal Dimension, Unbounded Variation, Weierstrass Function

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

分形, 是我们研究复杂函数的重要工具之一, 对那些看似杂乱无章实则呈现一定规律的函数尤为有效 [1]. 近年来, 对不同类型分形函数的分形维数研究引起了众多学者的广泛关注, 其中连续函数图像的分形维数严格大于其拓扑维数是重要的研究内容之一. Besicovitch 和 Ursell [2] 最早开始研究分形图像的分形维数, 他们从几何的角度出发, 研究了 Weierstrass 函数图像分形维数的下界估计. 后来学者们研究了分形插值函数以及自仿射曲线图像的分形维数. Barnsley 于 1986 年首次提出了分形插值函数的概念, 并于 1989 年证明了当  $\sum d_i \geq 1$  且  $\{(x_i, y_i)\}$  不共线时, 该函数图像的盒维数为  $s$ ,  $s$  为  $\sum |d_i| a_i^{s-1} = 0$  的解. 阮火军于 2009 年讨论了一般线性分形插值函数的盒维数, 当  $\sum_{i=1}^N |d_i| \geq 1$  且  $\dim_B \Gamma q_i = 1$  时, 该函数图像的盒维数为  $D(\{a_i, d_i\})$  或 1, 其中  $D(\{a_i, d_i\})$  是方程  $\sum_{i=1}^N |d_i| a_i^{s-1} = 1$  的唯一解. 详细内容参考文献 [1, 3-5]. 此外, 文献 [6] 讨论了闭区间上一维连续函数的分类并证明了所有有界变差连续函数的分形维数均为 1. 文献 [7, 8] 构造出了一些分形维数为 2 的特殊函数. 例如 Bush 函数和 Weierstrass 函数都是具有明显分形特征的连续函数.

我们首先给出连续有界变差函数的定义. 若一个连续函数的变差是无界的, 则称其为无界变差连续函数. 令  $I$  是单位区间  $[0, 1]$ . 其具体定义如下,

**定义 1.1.** [9]  $f(x)$  是  $I$  上的一个连续函数,  $\{x_i\}_{i=0}^n$  是满足

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$$

的任何点列. 记

$$V_f := \sup_{(x_0, x_1, \dots, x_n)} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|. \quad (1.1)$$

若 (1.1) 有限, 则称  $f(x)$  是  $I$  上的一个连续有界变差函数。

下面我们给出三个简单的例子以作证明。

**例 1.2.** [10] Bush 函数

令  $b$  是不小于 3 的正整数。若  $x \in I$ , 其  $b$  进分数为

$$x = 0.x_1x_2x_3 \cdots x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}, \quad x_n \in (0, 1, 2, \cdots, b-1).$$

Bush 函数记为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(x)}{\lambda_n}.$$

其中  $\lambda_n \geq 2$  是确定的常数,  $\mu_1(x) = 1$ 。

当  $x_n = x_{n-1}$  时, 定义  $\mu_n(n > 1) = \mu_{n-1}$ , 当  $x_n \neq x_{n-1}$  时,  $\mu_n = (1 - \lambda_n) \mu_{n-1}$ 。当选择合适的  $\mu_n$  时,  $f(x)$  在  $I$  上连续但是几乎处处不可微。文献 [10] 表明 Bush 函数是处处不可微的连续函数, 并且 Bush 函数的盒维数和 Hausdorff 维数都大于 1。

**例 1.3.** [1] Weierstrass 函数

令  $0 < \alpha < 1, \lambda \geq 4$ . Weierstrass 函数定义为

$$W(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-\alpha j} \sin(\lambda^j x).$$

以及

$$\dim_B \Gamma(W, I) = 2 - \alpha.$$

其中 Weierstrass 函数图像在  $I$  上的盒维数 [1] 记为  $\dim_B \Gamma(W, I)$ 。

到目前为止, 学者们在研究计算中得出 Weierstrass 函数的盒维数为  $2 - \alpha$  [1]。沈维孝 [11] 证明了当  $\lambda$  取整数时, Weierstrass 函数的 Hausdorff 维数等于其盒维数。此外, Weierstrass 函数的拓扑维数为 1, 即 Weierstrass 函数的分形维数严格大于其拓扑维数。Weierstrass 函数在  $I$  上连续但处处不可微。从文献 [6] 中我们可以得知, Weierstrass 函数在  $I$  上的点都是无界变差点, 这意味着 Weierstrass 函数在  $I$  上是处处无界变差的。

**例 1.4.** [12] 令  $a_n = n/(n+1), b_n = (n+1)/(n+2), c_n = 1/(n+1)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

若  $x \in [a_n, (b_n + a_n)/2)$ ,

$$M(x) = \frac{\sqrt{4c_n^2 - (b_n - a_n)^2}}{(b_n - a_n)}(x - a_n);$$

若  $x \in [(b_n + a_n)/2, b_n)$ ,

$$M(x) = -\frac{\sqrt{4c_n^2 - (b_n - a_n)^2}}{(b_n - a_n)}(x - b_n).$$

该函数是仅有一个无界变差点的一维连续函数, 说明一维连续函数也可以是无界变差的。那么是否存在仅有一个无界变差点但其分形维数严格大于拓扑维数的一维连续函数呢?

在本文中, 我们主要在  $I$  上构造了仅有一个无界变差点的连续函数, 讨论了该连续函数的分形维数, 从而说明该函数的分形维数为非整数维, 进一步解释了分形维数的本质。

## 2. 定义和符号

### 2.1. 基本符号

当  $a, b \in \mathbb{R}$  以及  $a < b$  时, 记

$$\Gamma(f, [a, b]) = \{(x, f(x)), x \in [a, b]\}$$

为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图像。

当  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  时, 记  $R_f[a, b]$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大距离, 即

$$R_f[a, b] = \sup_{a \leq x, y \leq b} |f(x) - f(y)|. \quad (2.1)$$

### 2.2. 分形维数

为了便于讨论, 我们在这里引入  $\Gamma(f, [a, b])$  的盒维数和 Hausdorff 维数的定义。

**定义 2.1.** [1, 13] 令  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $N_\delta \Gamma(f, [a, b])$  表示能够覆盖  $\Gamma(f, [a, b])$  直径最大为  $\delta$  的最小集合数,  $\Gamma(f, [a, b])$  的下盒维数定义如下,

$$\underline{\dim}_B \Gamma(f, [a, b]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(f, [a, b])}{-\log \delta}. \quad (2.2)$$

对应地,  $\Gamma(f, [a, b])$  的上盒维数定义如下,

$$\overline{\dim}_B \Gamma(f, [a, b]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(f, [a, b])}{-\log \delta}. \quad (2.3)$$

如果上盒维数和下盒维数的值相等, 则称这个共同的值为  $\Gamma(f, [a, b])$  的盒维数, 记为

$$\dim_B \Gamma(f, [a, b]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(f, [a, b])}{-\log \delta}. \quad (2.4)$$

若  $U$  是  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中任意非空子集, 则  $U$  的直径定义为

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}. \quad (2.5)$$

即  $U$  中任意两点距离的最大值。

如果  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  表示可以覆盖  $\Gamma(f, [a, b])$  直径最大为  $\delta$  的可数集合, 那么

$$\Gamma(f, [a, b]) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

其中对于任意的  $i \in \mathbb{Z}^+$  都有  $0 < |U_i| \leq \delta$ , 我们称  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  是  $\Gamma(f, [a, b])$  的一个  $\delta$ -覆盖。设  $s \geq 0$ ,  $\forall \delta > 0$ , 定义

$$H_{\delta}^s \Gamma(f, [a, b]) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 是 } \Gamma(f, [a, b]) \text{ 的一个 } \delta\text{-覆盖} \right\}.$$

记

$$H^s \Gamma(f, [a, b]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s \Gamma(f, [a, b]).$$

$H_{\delta}^s \Gamma(f, [a, b])$  称为  $\Gamma(f, [a, b])$  的  $s$ -维 Hausdorff 测度。 $\Gamma(f, [a, b])$  的 Hausdorff 维数定义如下。

**定义 2.2.** [1, 13] 令  $s \geq 0$ ,  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $\Gamma(f, [a, b])$  的 Hausdorff 维数为

$$\dim_H \Gamma(f, [a, b]) = \inf\{s : H^s \Gamma(f, [a, b]) = 0\} = \sup\{s : H^s \Gamma(f, [a, b]) = \infty\}. \quad (2.6)$$

### 3. 主要结果

我们首先构造了仅有一个无界变差点的连续函数,  $f(x)$  在  $I$  上连续且除零点外处处可微, 接着讨论了该函数的一些具体性质。最后研究了该函数的局部结构以及图的分形维数, 函数图像不可求长, 该函数是无界变差函数,  $f(x)$  在  $I$  上的盒维数为  $\dim_B \Gamma(f, I) = \frac{4}{3}$ , 具有明显的分形特征。

#### 3.1. 构造函数

令

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x^2}, \quad 0 < x \leq 1.$$

则  $f(x)$  是定义域上的连续函数。因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

当  $x = 0$  时, 定义  $f(x) = 0$ 。

因此,  $f(x)$  是  $I$  上的连续函数,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

显然,  $f(x)$  在  $I$  上一致连续但并不是处处可微的。事实上,  $f(x)$  在  $I$  上除 0 点外处处可微。下面我们给出  $f(x)$  的具体图像。

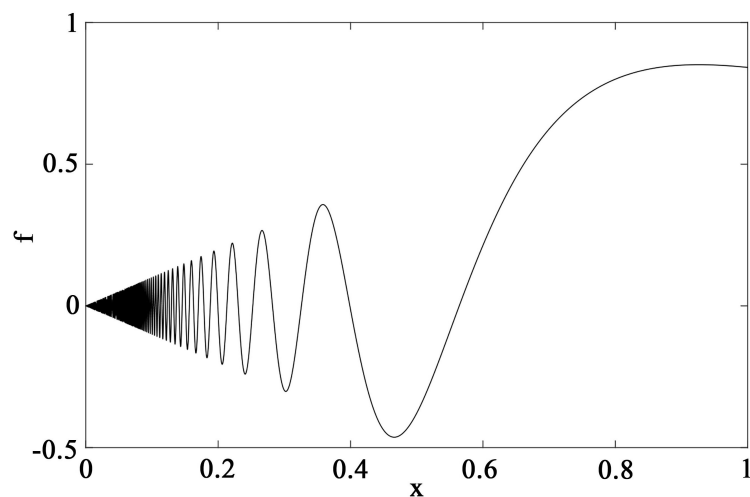


Figure 1. Image of  $f(x)$

图 1.  $f(x)$  的图像

图 1 为  $f(x)$  在  $I$  上的图像, 说明  $f(x)$  在 0 点附近不断振荡。 $f(x)$  的图像在  $I$  上不可求长, 因此  $f(x)$  的全变差是无穷的。

### 3.2. 性质

根据 (3.1) 构造的连续函数  $f(x)$ , 我们有以下基本结论。

**性质 3.1.** 如 (3.1) 所定义的  $f(x)$  是  $I$  上的连续函数,  $f(x)$  在  $I$  上除 0 点外处处可微。

**定义 3.1.** 令  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $x \in [a, b]$ 。

(1) 令  $x = a$ , 若存在一个子区间  $[a, a'] \subset [a, b]$  ( $a < a' \leq b$ ), 使得  $f(x)$  在  $[a, a']$  上是有界变差函数, 我们称  $a$  是  $f(x)$  的有界变差点。否则,  $a$  是  $f(x)$  的无界变差点。

(2) 令  $x = b$ , 若存在一个子区间  $[b', b] \subset [a, b]$  ( $a \leq b' < b$ ), 使得  $f(x)$  在  $[b', b]$  上是有界变差函数, 我们称  $b$  是  $f(x)$  的有界变差点。否则,  $b$  是  $f(x)$  的无界变差点。

(3) 令  $a < x < b$ , 若存在一个子区间  $[a', b'] \subset [a, b]$  ( $a \leq a' < x < b' \leq b$ ), 使得  $f(x)$  在  $[a', b']$  上是有界变差函数, 我们称  $x$  是  $f(x)$  的有界变差点。否则,  $x$  是  $f(x)$  的无界变差点。

根据定义 3.1, 我们可以得到以下结论。

**性质 3.2.** 如 (3.1) 所定义的  $f(x)$  是  $I$  上的连续函数,  $f(x)$  在  $I$  上仅存在一个无界变差点 0,  $I$  上的其余点都是有界变差点。

**证明.** 令  $x_0 \in I$ 。由性质 3.1 可知,  $f(x)$  在  $x_0 \neq 0$  处可微,  $x_0$  是  $f(x)$  在  $I$  上的有界变差点。

令

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2\pi(n+1))^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}} \right] \cup \left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right].$$

由 (2.1) 知,

$$R_f \left[ \frac{1}{(2\pi(n+1))^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}} \right] = 2 \left( \frac{1}{(2\pi(n+\frac{1}{4}))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2\pi(n+\frac{3}{4}))^{\frac{1}{2}}} \right) \geq \frac{4}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} n^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

所以  $f(x)$  的全变差大于

$$\frac{2}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}.$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty.$$

因此  $f(x)$  在  $I$  上的全变差为  $\infty$ , 故  $f(x)$  至少含有一个无界变差点 [6]。因为  $f(x)$  在除 0 点外处处可微, 所以 0 是  $f(x)$  在  $I$  上的唯一无界变差点。

由性质 3.2 可知,  $f(x)$  在  $I$  上并不满足 Lipschitz 条件。但是, 对于任意的  $x_0 (0 < x_0 < 1)$ , 显然  $f(x)$  在  $[x_0, 1]$  上满足 Lipschitz 条件。事实上, 我们可以得到更为一般的结论。

**性质 3.3.** 根据 (3.1) 所定义的函数,  $f(x)$  在  $I$  上满足  $\frac{1}{3}$  阶的 Hölder 条件。

**证明.** 令  $0 < x < x+h \leq 1$ 。一方面,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left| (x+h) \sin \frac{1}{(x+h)^2} - x \sin \frac{1}{x^2} \right| \\ &\leq (x+h). \end{aligned}$$

若  $0 = x < x+h \leq 1$ ,  $|f(x+h) - f(x)| \leq (x+h)$  显然成立。那么  $\forall 0 \leq x < x+h \leq 1$ ,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq (x+h). \quad (3.2)$$

另一方面, 由微分中值定理可知,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f'(\xi)| \cdot h \\ &= \left| \sin \frac{1}{\xi^2} - 2\xi^{-2} \cos \frac{1}{\xi^2} \right| \cdot h \\ &\leq 2\xi^{-2}h \\ &\leq 2x^{-2}h. \end{aligned}$$

当  $0 < x < x+h \leq 1$  时,  $\xi$  为固定值并且  $\xi \in [x, x+h]$ , 那么,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2x^{-2}h. \quad (3.3)$$

若  $x^3 \leq h$ , 由 (3.2) 知,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq (h^{\frac{1}{3}} + h) \leq 2h^{\frac{1}{3}}. \quad (3.4)$$

若  $x^3 > h$ , 由 (3.3) 知,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2h^{-\frac{2}{3}}h = 2h^{\frac{1}{3}}. \quad (3.5)$$

结合 (3.4) 和 (3.5)

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2h^{\frac{1}{3}}. \quad (3.6)$$

对于  $\forall 0 < x < x+h \leq 1$ , (3.6) 表明  $f(x)$  在  $I$  上满足  $\frac{1}{3}$  阶的 Hölder 条件。

性质 3.3 表明  $f(x)$  是  $I$  上满足 Hölder 条件的连续函数。

### 3.3. 分形维数

上一节我们研究了  $f(x)$  的基本性质。本节我们主要研究  $f(x)$  在  $I$  上的分形维数。

**引理 3.1.** [1] 令  $f(x)$  是  $I$  上的连续函数,  $0 < \delta < 1$ . 令  $m$  是大于等于  $\delta^{-1}$  的最小整数,  $N_\delta \Gamma(f, I)$  表示可以覆盖  $\Gamma(f, I)$  直径不超过  $\delta$  的最小集合数。那么,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \max \left\{ \frac{R_f[i\delta, (i+1)\delta]}{\delta}, 1 \right\} \leq N_\delta \Gamma(f, I) \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta].$$

**定理 3.1.** 令  $f(x)$  如 (3.1) 所定义, 那么

$$\dim_B \Gamma(f, I) = \frac{4}{3}.$$

**证明.** 令  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$I = \left[ 0, \frac{1}{(2\pi(k+1))^{\frac{1}{2}}} \right] \cup \bigcup_{i=1}^k I_i \cup \left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right].$$

其中,

$$I_i = \left[ \frac{1}{(2\pi(i+1))^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad 1 \leq i \leq k.$$

因为  $1 \leq i \leq k$ , 由 (2.1) 可知,

$$R_f(I_i) = 2 \left[ \frac{1}{(2\pi(i+\frac{1}{4}))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2\pi(i+\frac{3}{4}))^{\frac{1}{2}}} \right] \leq \frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} i^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

又

$$R_f(I_i) \geq \frac{4}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} i^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$



选取  $|I_{k+1}| \leq \delta \leq |I_k|$ , 因此

$$|I_k| = \frac{1}{(2\pi k)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2\pi(k+1))^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} k^{-\frac{3}{2}} \quad (3.9)$$

以及

$$|I_{k+1}| = \frac{1}{(2\pi(k+1))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2\pi(k+2))^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{1}{2}}} k^{-\frac{3}{2}}, \quad k \geq 2. \quad (3.10)$$

一方面, 由引理 3.1 中的 (3.10) 可知, 与  $I_1$  相交的  $\delta$ - 网格数至多为

$$\begin{aligned} N_1 &\leq \left[ \left( \frac{1}{(2\pi(k+\frac{7}{4}))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2\pi(k+\frac{5}{4}))^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{\delta} + 2 \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{(2\pi(k+1))^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{\delta} + 2 \right] \\ &\leq \left( 2^{\frac{5}{2}} 2(\pi)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} k \right) \cdot \left( 2^{\frac{3}{2}} k \right) \\ &\leq 16k^2. \end{aligned}$$

对于  $I_i (1 \leq i \leq k)$ , 与所有  $I_i$  相交的  $\delta$ - 网格数至多为

$$\begin{aligned} N_2 &\leq \sum_{i=1}^k \left[ \left( \frac{R_f(I_i)}{\delta} \right) + 2 \right] \cdot \left( \frac{|I_i|}{\delta} + 2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left[ \left( \frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} i^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(4\pi)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} \right) + 2 \right] \cdot \left( \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} i^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(4\pi)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} + 2 \right) \\ &\leq C_1 k^3 \sum_{i=1}^k i^{-1} \\ &\leq C_1 k^2. \end{aligned}$$

其中  $C_1$  是正常数。

由定义 2.1 中的 (2.2) 和引理 3.1 可知,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B \Gamma \left( f, \left[ 0, \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \right] \right) &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_1 + N_2)}{-\log \delta} \\ &\leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(16 + C_1) + \log k^2}{\log \frac{1}{\delta}} \\ &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 \log k}{\log \frac{1}{\delta}} \\ &\leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 \log \frac{1}{\delta}}{\frac{3}{2} \log \frac{1}{\delta}} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

又因为,

$$\dim_B \Gamma \left( f, \left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right] \right) = 1.$$

由上盒维数的可数稳定性可知 [1],

$$\overline{\dim}_B \Gamma(f, I) \leq \frac{4}{3}. \quad (3.11)$$

另一方面, 与所有  $I_i$  相交的  $\delta$ - 网格数至少为

$$\begin{aligned} N_3 &\geq \sum_{i=1}^k \frac{R_f(I_i)}{\delta} \cdot \frac{|I_i|}{\delta} \\ &\geq \sum_{i=1}^k \left( \frac{4}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} i^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left( \frac{1}{4(2\pi)^{\frac{1}{2}}} i^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} \right) \\ &\geq C_2 k^3 \sum_{i=1}^k i^{-1} \\ &\geq C_2 k^2. \end{aligned}$$

其中  $C_2$  是正常数。

通过定义 2.1 中的 (2.3) 和引理 3.1 可知,

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B \Gamma(f, I) &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_3)}{-\log \delta} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log C_2 + \log k^2}{\log \frac{1}{\delta}} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 \log k}{\log \frac{1}{\delta}} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 \log \frac{1}{\delta}}{\left(\frac{3}{2}\right) \log \frac{1}{\delta}} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

联合 (3.11),

$$\dim_B \Gamma(f, I) = \frac{4}{3}.$$

因为  $f(x)$  的上、下盒维数相等, 所以  $f(x)$  在  $I$  上的盒维数存在, 并且为  $\frac{4}{3}$ 。  $f(x)$  在  $I$  上的盒维数严格大于 1, 尽管  $f(x)$  在  $I$  上仅有一个无界变差点, 但是仍有明显的分形特征。

接下来我们讨论  $\Gamma(f, I)$  的 Hausdorff 维数。

**定理 3.2.** 令  $f(x)$  如 (3.1) 所定义, 那么

$$\dim_H \Gamma(f, I) = 1.$$

证明. 由定义 2.2, 我们可以得到

$$\dim_H \Gamma(f, I) \geq 1. \quad (3.12)$$

要证明  $\dim_H \Gamma(f, I) = 1$ , 我们只需证

$$\dim_H \Gamma(f, I) \leq 1. \quad (3.13)$$

令

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cup \left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right].$$

其中,

$$I_i = \left[ \frac{1}{(2\pi(i+1))^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

因为  $f(x)$  在  $\left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right]$  上处处可微, 显然

$$\dim_H \Gamma \left( f, \left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right] \right) = 1.$$

对于任意  $i \in \mathbb{Z}^+$ , 由定理 3.1 可知  $f(x)$  在  $I_i$  上为有界变差, 那么

$$\dim_H \Gamma(f, I_i) = 1, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

因为  $\left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right], I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  都是可数集, 故

$$\dim_H \Gamma(f, I) = \max \left\{ \sup_{i \geq 1} \{ \dim_H \Gamma(f, I_i) \}, \dim_H \Gamma \left( f, \left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, 1 \right] \right) \right\} = 1.$$

从而

$$\dim_H \Gamma(f, I) \leq 1.$$

综上所述,

$$\dim_H \Gamma(f, I) = 1.$$

通过讨论可知  $\Gamma(f, I)$  在  $I$  上的 Hausdorff 维数为 1, 严格小于在  $I$  上的盒维数。

## 4. 数值结果

为验证文中方法的准确性, 下面采用 MATLAB 软件对这一函数进行模拟仿真。我们首先对函数图像进行预处理, 将图像数据转化为灰度图像, 进而得到八阶灰度的二维矩阵, 随后将灰度图像进一步转化成二值图像, 得到数值型数据。(图 2, 图 3)

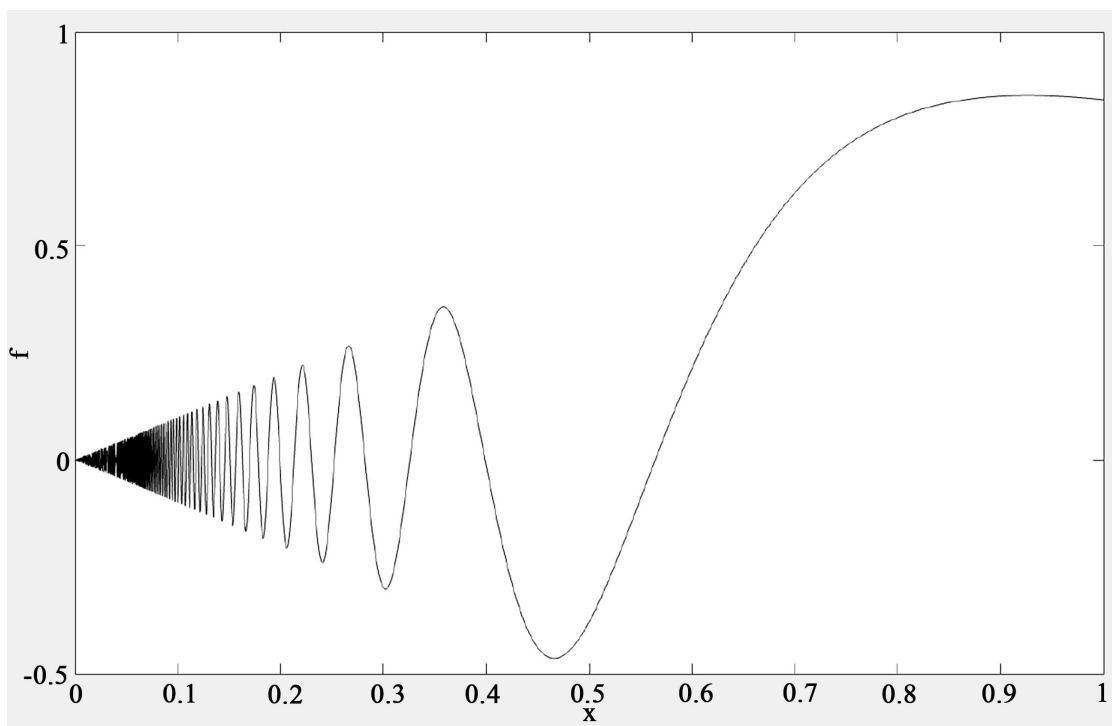


Figure 2. Grayscale image of  $f(x)$

图 2.  $f(x)$  的灰度图

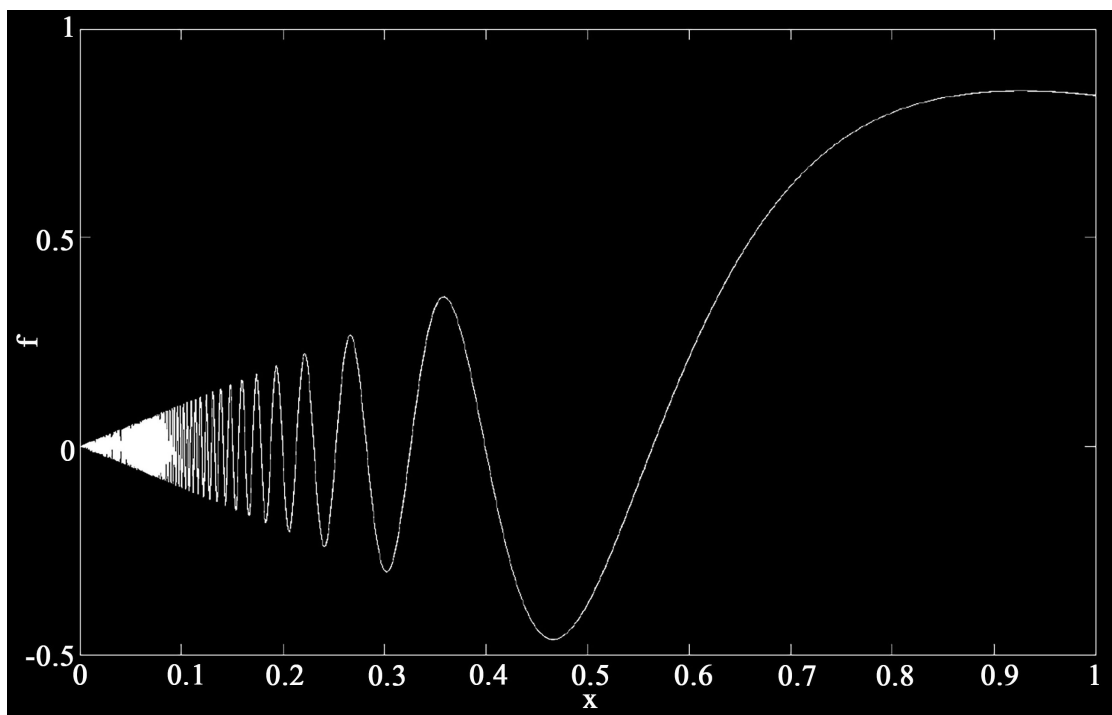


Figure 3. Reversal binary graph of  $f(x)$

图 3.  $f(x)$  的反转二值图

最后我们得到  $f(x)$  图像盒维数, 结果如下: (图 4)

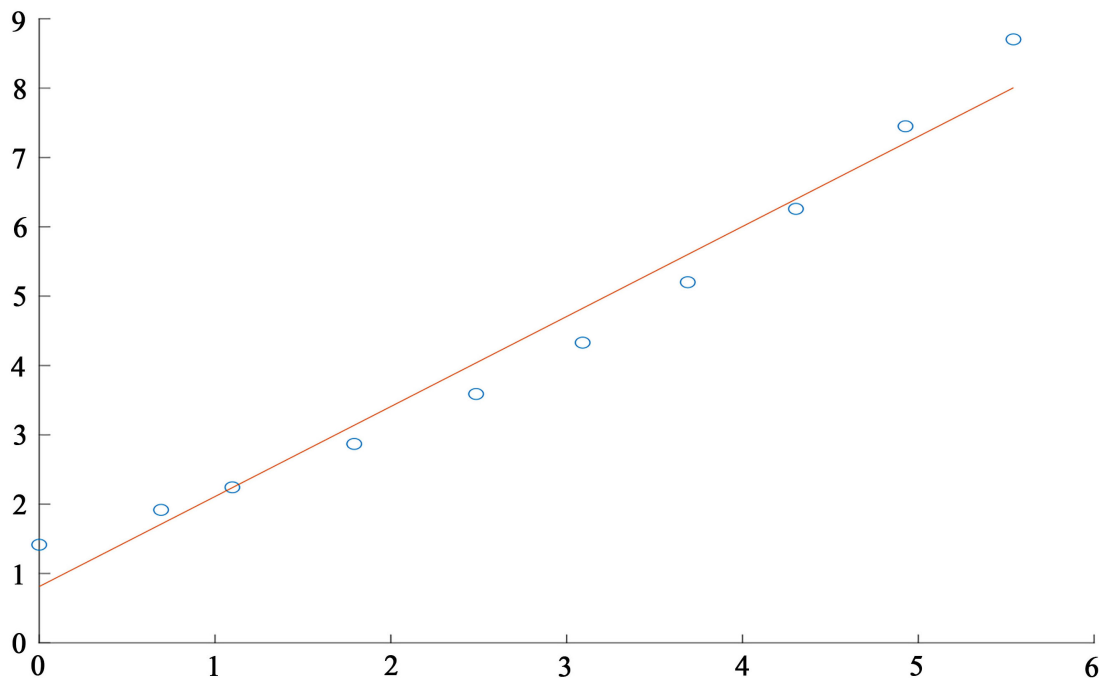


Figure 4. Box dimension of  $f(x)$

图 4.  $f(x)$  的盒维数

由 MATLAB 程序知  $f(x)$  图像盒维数的数值结果为  $\dim_B \Gamma(f, I) = 1.2982$ .

## 5. 结论

本文主要构造了一类具有单个无界变差点的连续函数,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\dim_B \Gamma(f, I) = \frac{4}{3}$ ,  $\dim_H \Gamma(f, I) = 1$ .  $f(x)$  具有不同的盒维数和 Hausdorff 维数, 这表明盒维数和 Hausdorff 维数对函数图像具有不同尺度的刻画。我们发现, 即使连续函数仅仅包含一个无界变差点, 其分形维数可能仍然大于其拓扑维数。这一无界变差点使函数在其附近的局部位置产生了分形结构。

事实上, 我们还可以进一步研究具有可数个无界变差点一般连续函数图像的分形维数及分形特征。是否可以构造具有无界变差点的二维连续函数也可以进一步探索。

## 基金项目

感谢国家自然科学基金 (批准号 12071218) 对研究的支持.

## 参考文献

- [1] Falconer, K.J. (1990) Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley Sons Inc., New York. <https://doi.org/10.2307/2532125>
- [2] Besicovitch, A.S. and Ursell, H.D. (1937) Sets of Fractional Dimensions V: On Dimensional Numbers of Some Continuous Curves. *Journal of the London Mathematical Society*, **12**, 18-25. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-12.45.18>
- [3] Barnsley, M.F. (1986) Fractal Functions and Interpolation. *Constructive Approximation*, **2**, 303-329. <https://doi.org/10.1007/BF01893434>
- [4] Bedford, T.J. (1989) The Box Dimension of Self-Affine Graphs and Repellers. *Nonlinearity*, **2**, 53-71. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/2/1/005>
- [5] Ruan, H.J., Su, W.Y. and Yao, K. (2009) Box Dimension and Fractional Integral of Linear Fractal Interpolation Functions. *Journal of Approximation Theory*, **161**, 187-197. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2008.08.012>
- [6] Liang, Y.S. (2017) Definition and Classification of One-Dimensional Continuous Functions with Unbounded Variation. *Fractals*, **25**, Article 17500487. <https://doi.org/10.1142/S0218348X17500487>
- [7] Xie, T.F. and Zhou, S.P. (2004) On a Class of Fractal Functions with Graph Box Dimension 2. *Chaos, Solitons and Fractals*, **22**, 135-139. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.100>
- [8] Xie, T.F. and Zhou, S.P. (2007) On a Class of Singular Continuous Functions with Graph Hausdorff Dimension 2. *Chaos, Solitons and Fractals*, **32**, 1625-1630. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.12.038>
- [9] Zheng, W.X. and Wang, S.W. (1980) Real Function and Functional Analysis. Higher Education Press, Beijing.
- [10] 王宏勇, 陈刚. Bush 型函数的分形维数及其奇异性 [J]. 数学研究, 1996, 29(1): 87-92.
- [11] Shen, W.X. (2018) Hausdorff Dimension of the Graphs of the Classical Weierstrass Functions. *Mathematische Zeitschrift*, **289**, 223-266. <https://doi.org/10.1007/s00209-017-1949-1>
- [12] Zhang, Q. (2014) Some Remarks on One-Dimensional Functions and Their Riemann-Liouville Fractional Calculus. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **30**, 517-524. <https://doi.org/10.1007/s10114-013-2044-0>
- [13] Wen, Z.Y. (2000) Mathematical Foundations of Fractal Geometry: Science Technology Education Publication House, Shanghai.