Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1422-1424
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135145

非正规极大子群的迹对群可解性的影响

吴金莲，朱丽羽*

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2023年4月22日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

在有限群论中，子群的性质是刻画群可解性的重要工具。本文利用非正规极大子群的迹的幂零性研究了可解群的结构，得到了一个关于可解群的充分必要条件(有限群G是可解的当且仅当G的每个非正规极大子群有幂零的迹)，推广了已知结果。

关键词

极大子群，非正规性，迹，可解群

Influence of Traces of Non-Normal Maximal Subgroups on Solvability of Finite Groups

Jinlian Wu, Liyu Zhu*

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Apr. 22nd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

In finite group theory, the properties of subgroups are an important tool to characterize the solvability of groups. In this paper, we study the structure of solvable groups by using the nilpotent property of traces of non-normal maximal subgroups, and obtain a necessary and sufficient condition for solvable groups (A finite group G is solvable if and only if every non-normal maximal subgroup of G has a nilpotent trace), and generalize the known results.

Keywords

Maximal Subgroup, Non-Normality, Trace, Solvable Group

*通讯作者。

文章引用: 吴金莲, 朱丽羽. 非正规极大子群的迹对群可解性的影响[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1422-1424.
DOI: 10.12677/pm.2023.135145

1. 引言

本文所有的群都是有限群，所有的术语和符号以文献[1] [2] [3] [4]为标准。特别地，$|G|$表示群 G 的阶，$\pi(G)$表示$|G|$的全体素因子的集合。$M<\cdot G$ 表示 M 是群 G 的一个极大子群；$M \trianglelefteq G$ 表示 M 是群 G 的一个正规子群。且令 $\mathcal{F}_1=\{M<\cdot G \mid M \trianglelefteq G\}$，$\mathcal{F}_2=\{M<\cdot G \mid M \ntrianglelefteq G\}$。显然，群 G 的极大子群必属于其中之一。

正规子群、极大子群和 *Sylow* 子群对群结构有着重要的影响。国内外很多群论学者做过相关课题的研究。在[5]中，*Guo*，*Skiba* 和 *Tang* 考虑了所有极大子群的迹的幂零性与群可解群的关系。继续这项研究，将群 G 的所有极大子群分为正规子群和非正规子群两大类，考虑非正规的极大子群迹的幂零性，得到了关于可解群的一个充要条件。

2. 基本概念

为了方便，在此先列出后面将要用到的一些概念和结果。

定义 1 [5]设 A 是群 G 的真子群，称任意的 G 的主因子 H/A_G 是 A 的一个 G-边界因子或一个边界因子；对于 A 的任意 G-边界因子 H/A_G，称子群$(A\cap H)/A_G$ 为 A 的一个 G-迹或一个迹。这里，A_G 是 A 在 G 中的柱心。

引理 1 [1]设 G 是有限群，则下述事实等价：

G 是幂零群；

若 $H<G$，则 $H<N_G(H)$；

G 的每个极大子群 $M \trianglelefteq G$ (这时$|G:M|$为素数)；

G 的每个 *Sylow* 子群都是正规的，且 G 是它的诸 *Sylow* 子群的直积。

引理 2 [1]幂零群 G 必为可解群。

引理 3 [5] G 是可解的当且仅当每个极大子群有幂零的迹(或者次正规的迹)。

引理 4 [6]设 P 是群 G 的一个 *Sylow p*-子群，$p\geq 5$。如果 $N_G(P)/C_G(P)$ 是一个 p-群，那么 $O^p(G)<G$。

3. 主要结果

定理 1 有限群 G 是可解的当且仅当 $\mathcal{F}_2$ 中的每个极大子群有幂零的迹；

证明必要性，显然成立。充分性：设 G 是有限群，令 M 是群 G 的极大子群。若 $\mathcal{F}_2\neq\varnothing$，则对于任意的极大子群 M 有 $M\in\mathcal{F}_1$。由引理 1 (3)可知 G 是幂零群，进而由引理 2 知群 G 是可解的。若 $\mathcal{F}_1\neq\varnothing$，则对于任意的极大子群有 $M\in\mathcal{F}_2$。由引理 4 可得结论。下面讨论 $\mathcal{F}_1\neq\varnothing$ 且 $\mathcal{F}_2\neq\varnothing$。

情形 1：G 是单群。

如果 G 是单群，此时对任意极大子群 M，有 $M_G=1$ 且 M 的 G-迹是 M。因为 $\mathcal{F}_1\neq\varnothing$，所以存在 $M\in\mathcal{F}_1$，$M=1$，从而群 G 为素数阶群，进而 G 可解。

情形 2：G 是非单群。

任取群 G 的一个极小正规子群 R，下面考虑商群 G/R。设 M/R 是 G/R 的任意极大子群，即有 $M<\cdot G$。令 H/M_G，$(H\cap M)/M_G$ 分别是 M 的 G-边界因子和 G-迹，则
$((H\cap M)/R)/(M/R)_{(G/R)}=((H\cap M)/R)/(M_G/R)$ 是 M/R 的 G/R-迹。

若 $M/R \trianglelefteq G/R$，由引理 1 (3)可知 G 是幂零群，进而由引理 2 可得群 G/R 是可解的。若 $M/R \ntrianglelefteq G/R$，则 $M \ntrianglelefteq G$。根据定理假设，M 有幂零的迹，因此 $\left((H \cap M)/R\right)/\left(M_G/R\right)$ 是幂零的。进而，G/R 满足定理条件，对 $|G|$ 进行归纳，G/R 是可解的。

1) 若 R 可解，显然由扩张闭得 G 是可解的；

2) 若 R 不可解，取 q 是 $\pi(R)$ 的极大素因子，其中 $|\pi(R)| \geq 3$，$q \geq 5$。令 $Q \in Syl_q(R)$，$|Q| = q^n$。且 $N_G(Q) \neq G$，M 是 G 的极大子群且满足 $N_G(Q) \leq M$，由 *Frattini* 论断，有 $G = N_G(Q)R = MR$。

若 R 不唯一，即存在群 G 的极小正规子群 R_1，R_2。根据前面的讨论，有 G/R_1，G/R_2 是可解的，所以 $G/(R_1 \cap R_2)$ 是可解的。又因为 $R_1 \cap R_2 = 1$，因此 G 是可解的。

若 R 唯一，有 $M_G = 1$ 且 $M \ntrianglelefteq G$，即 $M \in \mathcal{F}_2$，$R \cap M$ 是 M 的一个 G-迹，且 $R \cap M$ 是幂零的。又 $N_R(Q) \leq R \cap M$，根据引理 1(4)，有 $N_R(Q) = Q \times P_1 \times \cdots \times P_s$，其中 $P_1, \cdots, P_s$ 是 $N_R(Q)$ 的 *Sylow* p-子群，$p \in \pi(N_R(Q)) \setminus \{q\}$。因此 $P_1 \times \cdots \times P_s \leq C_R(Q)$，从而 $\dfrac{|N_R(Q)|}{|C_R(Q)|} = q^\alpha$，$\alpha \leq n$，即 $N_R(Q)/C_R(Q)$ 是 q-群，由引理 5，有 $O^q(R) < R$，$O^q(R)$ $char\ R$，所以 $O^q(R) \trianglelefteq G$，矛盾。即我们完成了证明。

基金项目

四川省自然科学基金项目(2022NSFSC1843)。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] 徐明曜, 黄建华, 李慧陵, 李世荣. 有限群导引(下) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] 郭文彬. 群类论[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[4] Guo, W. (2000) The Theory of Classes of Groups. Science Press-Kluwer Academic Publishers, Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London.

[5] Guo, W., Skiba, A.N. and Tang, X. (2014) On Boundary Factors and Traces of Subgroups of Finite Groups. *Communications in Mathematics and Statistics*, **2**, 349-361. https://doi.org/10.1007/s40304-015-0043-4

[6] Huppert, B. and Blackburn, N. (1982) Finite Groups III. Spring-Verlag, Berlin, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-67997-1