

# 两类广义 *Petersen* 图的点可约边(全)染色

周莉\*, 雷飞

兰州交通大学应用数学研究所, 甘肃 兰州

收稿日期: 2023年5月22日; 录用日期: 2023年6月23日; 发布日期: 2023年6月30日

---

## 摘要

图  $G$  的一个(非正常)边(全)染色  $f$  满足任意两个顶点的度相同时色集合相同, 则称  $f$  是图  $G$  的一个点可约边(全)染色, 其中任一点的色集合为该点(或该点及其)关联边所分配的颜色构成的集合, 将所用的最多颜色数称为图  $G$  的点可约边(全)色数。运用组合分析法和构造染色函数法得到了广义 *Petersen* 图  $P(n, 1)$  和  $P(n, 2)$  的点可约边(全)色数。

## 关键词

广义 *Petersen* 图, 点可约边(全)染色, 点可约边(全)色数

---

# Vertex Reducible Edge (Total) Coloring of Two Classes of Generalized *Petersen* Graph

Li Zhou\*, Fei Lei

Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: May 22<sup>nd</sup>, 2023; accepted: Jun. 23<sup>rd</sup>, 2023; published: Jun. 30<sup>th</sup>, 2023

---

\* 通讯作者。

---

## Abstract

A non-proper edge (total) coloring  $f$  of  $G$  such that any two vertices with the same degree have the same color sets is called a vertex-reducible edge (total) coloring  $f$  of  $G$ , where the color set of each vertex consists of all colors assigned to (or the vertex and) its incident edges, and the maximum number the color required is said vertex reducible edge (total) chromatic number. In this paper, the vertex reducible edge (total) chromatic number of generalized Petersen graphs  $P(n, 1)$  and  $P(n, 2)$  are obtained by combination analysis and construction coloring function.

## Keywords

Generalized Petersen Graph, Vertex Reducible Edge (Total) Coloring, Vertex Reducible Edge (Total) Chromatic Number

---

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## 1. 引言

本文所考虑的图均为简单无向图. 设  $G = (V, E)$  是一个  $n$  阶图, 其中  $V(G)$  表示图  $G$  的顶点集,  $E(G)$  表示图  $G$  的边集. 对  $\forall x \in V(G)$ , 用  $d(x)$  表示顶点  $x$  的度, 即与顶点  $x$  所关联的边的数目, 称  $\Delta(G) = \max\{d(x) | x \in V(G)\}$  为图  $G$  的最大度, 有时简写为  $\Delta$ . 设  $M$  是  $E(G)$  的一个子集, 若  $M$  中任意两条边都没有公共顶点, 则称  $M$  是  $G$  的一个匹配; 若  $G$  不存在另外的匹配  $M'$ , 使得  $|M'| > |M|$ , 则称  $M$  为  $G$  的最大匹配; 若  $M$  中的顶点包含图  $G$  的所有顶点, 则称  $M$  为图  $G$  的完美匹配. 设  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  (或  $f : E(G) \cup V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ) 是图  $G$  的一个映射, 若  $f$  使得图  $G$  中任意两条相邻边 (或任意两条相邻边、相邻顶点、点边关联元素) 均染不同色, 则称  $f$  为图  $G$  的一个正常边 (全) 着色; 否则, 称  $f$  为图  $G$  的一个非正常边 (全) 着色. 对图  $G$  中任一顶点  $v$ , 在染色函数  $f$  下  $C(v)$  表示点  $v$  的关联边上所染颜色组成的色集合;  $S(v)$  表示点  $v$  和点  $v$  的关联边上所染颜色组成的色集合.

图染色问题一直是图论研究的焦点问题, 也是将某些研究对象按照一定的规则和条件进行分类的问题, 应用范围非常广泛. 2002 年, 张忠辅等在文献 [1] 中弱化点可区别边染色的约束条件后提出

了图的邻点可区别边染色的概念. 近年来, 图的可区别染色问题已经由正常的可区别染色发展为种类繁多的非常正常可区别染色, 其中点可约染色 [2]就是其中的一部分. 下面给出点可约边染色与点可约全染色的定义.

**定义 1.** [2] 对简单图 $G$ , 若存在正整数 $k(1 \leq k \leq \Delta(G))$ 和映射 $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , 使得对任意两点 $u, v \in V(G)$ , 当 $d(u) = d(v)$ 时都有 $C(u) = C(v)$ , 则称 $f$ 为 $G$ 的 $k$ -点可约边染色. 简记为图 $G$ 的一个 $k - VREC$ . 称

$$\chi'_{vr}(G) = \max \{k | \text{图}G\text{具有一个}k - VREC\}$$

为图 $G$ 的点可约边色数.

**定义 2.** [2] 对简单图 $G$ , 若存在正整数 $k(1 \leq k \leq \Delta(G) + 1)$ 和映射 $f: V((G) \cup E(G)) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , 使得对任意两点 $u, v \in V(G)$ , 当 $d(u) = d(v)$ 时都有 $S(u) = S(v)$ , 则称 $f$ 为 $G$ 的 $k$ -点可约全染色. 简记为图 $G$ 的一个 $k - VRTC$ . 称

$$\chi_{vrt}(G) = \max \{k | \text{图}G\text{具有一个}k - VRTC\}$$

为图 $G$ 的点可约全色数.

近年来, 图的点可约边(全)染色引起了国内学者的广泛关注. 目前关于点可约染色的研究, 请参考文献 [3-5]

*Petersen*图是图论研究的重要图类之一, 对进一步研究三正则图的组合参数具有重要理论意义. 下面给出广义*Petersen*图 $P(n, k)$ 的定义:

**定义 3.** [6] 设 $n$ 和 $k$ 是正整数且 $(n > 2k)$ , 则广义*Petersen*图 $P(n, k)$ 的顶点集为 $V(P(n, k)) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边集为 $E(P(n, k)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} | 1 \leq i \leq n\}$ , 其中下标 $i$ 取 $\text{mod } n$ . 下面以图 $P(n, 1)$ 为例, 具体见图 1.

文献 [7]运用组合分析法讨论了广义*Petersen*图 $G(n, k)$ 的邻强边染色并证明了若 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ ,  $k \not\equiv 0(\text{mod } 4)$ , 则 $\chi'_{as}(G(n, k)) = 4$ . 文献 [8]运用构造染色函数法讨论了广义*Petersen*图 $P(n, 1)$ 和 $P(n, 2)$ 的内射边着色并得到了 $\forall n \geq 8$ , 有 $4 \leq \chi'_i(P(n, 2)) \leq 5$ . 文献 [9]通过研究两类广义*Petersen*图的最小邻点区分集, 区分了这两类广义*Petersen*图中的任意两个邻点.

在图的点可约染色方面, 广义*Petersen*图的点可约边(全)色数是不得而知的. 本文在广义*Petersen*图已知染色的基础上, 运用组合分析法、反证法和构造染色函数法, 得到了广义*Petersen*图 $P(n, 1)$ 和 $P(n, 2)$ 的点可约边(全)色数.

值得注意的是, 在本文提及或要给出一个图的 $k - VREC$ 或 $k - VRTC$ 时, 总认为所使用的颜色为 $1, 2, \dots, k$ . 本文中未定义的符号请参阅文献 [10].

## 2. 引理及主要结论

根据点可约染色的定义, 很容易分别得到 $G$ 的点可约边色数和全色数的一个上界.

**引理 2.1** ([2]). 对于连通图 $G$ , 则有 $\chi'_{vr}(G) \leq \Delta(G)$ ,  $\chi_{vrt}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

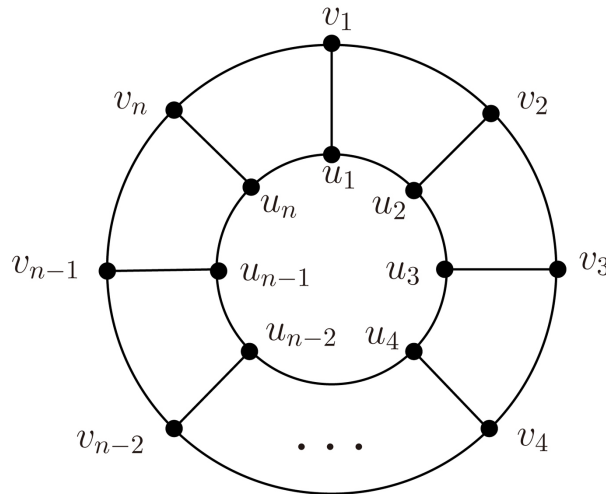


Figure 1. Figure of  $P(n, 1)$

图 1. 图  $P(n, 1)$

引理 2.2 ([10]). 对 Petersen 图  $P(5, 2)$ , 有  $\chi'(P(5, 2)) = 4$ .

首先给出两类广义 Petersen 图  $P(n, 1)$  和  $P(n, 2)$  的点可约边染色.

定理 2.1. 对广义 Petersen 图  $P(n, 1)$ , 其中  $n \geq 3$ , 则有  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 3$ .

证明. 由图  $P(n, 1)$  的结构可知, 图  $P(n, 1)$  可以拆分成 2 个  $C_n$  和完美匹配  $M = \{u_i v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ . 其中  $C_n^1 = u_1 u_2 \dots u_n u_1$ ,  $C_n^2 = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ . 由引理 2.1 知,  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) \leq \Delta(P(n, 1)) = 3$ . 要证  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 3$ , 只需给出其一种 3-VREC 即可. 下面分  $n \equiv 0 \pmod{2}$  和  $n \equiv 1 \pmod{2}$  两种情形讨论.

情形 1 当  $n \equiv 0 \pmod{2}$  时, 首先, 对两个圈  $C_n$  的边用颜色 1, 2 循环染. 其次, 用颜色 3 染完美匹配  $M = \{u_i v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ . 此时, 对  $u, v \in V(P(n, 1))$ ,  $d(u) = d(v) = 3$ , 有  $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故结合引理 2.1 有,  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 3$ .

情形 2 当  $n \equiv 1 \pmod{2}$  时, 令  $f(u_1 u_2) = f(v_1 v_2) = 1$ ; 当  $i$  为偶数且  $i \in [2, n - 1]$ ,  $f(u_i u_{i+1}) = f(v_i v_{i+1}) = 2$ ; 当  $i$  为奇数且  $i \in [2, n - 1]$ ,  $f(u_i u_{i+1}) = f(v_i v_{i+1}) = 3$ ;  $f(u_1 v_1) = 2$ ;  $f(u_2 v_2) = 3$ ;  $f(u_i v_i) = 1$ , 其中  $i \in [3, n]$ . 此时, 对  $u, v \in V(P(n, 1))$ ,  $d(u) = d(v) = 3$ , 有  $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故结合引理 2.1 有,  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 3$ .

综上,  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 3$ . □

定理 2.2. 对广义 Petersen 图  $P(n, 2)$ , 其中  $n \geq 5$ , 则有

$$\chi'_{vr}(P(n, 2)) = \begin{cases} 2, & n = 5; \\ 3, & n > 5. \end{cases}$$

证明. 由引理 2.1 可知,  $\chi'_{vr}(P(n, 2)) \leq \Delta(P(n, 2)) = 3$ . 下面分  $n = 5$  和  $n > 5$  两种情形讨论.

情形 1 当  $n = 5$  时, 此时图  $P(5, 2)$  为 Petersen 图. 要证明  $\chi'_{vr}(P(5, 2)) = 2$ , 首先证明  $\chi'_{vr}(P(5, 2)) \neq$

3, 再给出图 $P(5, 2)$ 的一种2-VREC即可.

反设 $\chi'_{vr}(P(5, 2)) = 3$ , 由 $\forall v \in V(P(5, 2)), d(v) = 3$ , 则 $C(v) = \{1, 2, 3\}$ . 又由图 $P(5, 2)$ 为三正则图知, 图 $P(5, 2)$ 一定是3-正常边可染的, 从而有 $\chi'(P(5, 2)) \leq 3$ . 根据正常边染色的定义可得 $\chi'(P(5, 2)) \geq \Delta(P(5, 2)) \geq 3$ , 因此 $\chi'(P(5, 2)) = 3$ . 而由引理2.2知,  $\chi'(P(5, 2)) = 4$ , 矛盾.

下面给出图 $P(5, 2)$ 的一个2-VREC. 由于图 $P(5, 2)$ 可拆分成圈 $C_n = u_1u_2u_3u_4u_5u_1$ , 完美匹配 $M = \{u_iv_i | i = 1, 2, \dots, 5\}$ 和圈 $U_{C_n} = v_1v_3v_5v_2v_4v_1$ (具体见图2), 则先对完美匹配 $M$ 用颜色1进行着色, 再对圈 $C_n$ 和圈 $U_{C_n}$ 的边用颜色2进行着色. 此时 $\forall v \in V(P(5, 2))$ , 有 $C(v) = \{1, 2\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故 $\chi'_{vr}(P(5, 2)) = 2$ .

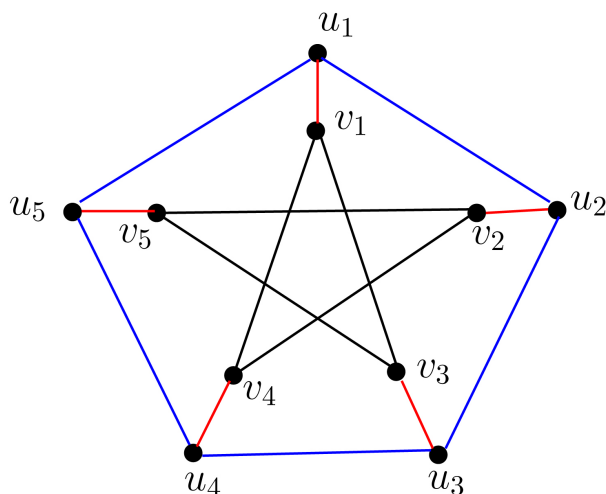


Figure 2. Figure of  $P(5, 2)$

图 2. 图 $P(5, 2)$

**情形2** 当 $n > 5$ 时, 由广义Petersen图的图结构可知, 图 $P(n, 2)$ 可拆分成圈 $C_n = u_1u_2 \cdots u_nu_1$ , 完美匹配 $M = \{u_iv_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 和图 $U_{C_n} = P(n, 2) - V(C_n)$ . 下面分四种情形讨论.

**情形2.1** 当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 时, 图 $U_{C_n} = P(n, 2) - V(C_n) = C_{\frac{n}{2}}^1 \cup C_{\frac{n}{2}}^2$ , 其中 $C_{\frac{n}{2}}^1 = v_1v_3 \cdots v_{n-3}v_{n-1}v_1$ ,  $C_{\frac{n}{2}}^2 = v_2v_4 \cdots v_{n-2}v_nv_2$ 且 $\frac{n}{2}$ 为偶数. 要证 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ , 下面给出其一种3-VREC即可.

首先, 对 $C_{\frac{n}{2}}^1, C_{\frac{n}{2}}^2$ 的边分别用颜色1,2循环染. 其次, 对圈 $C_n$ 的边也用颜色1,2循环染. 最后, 对完美匹配 $M$ 用颜色3染. 此时, 对 $u, v \in V(P(n, 2)), d(u) = d(v) = 3$ , 有 $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ .

**情形2.2** 当 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 下面又分 $3 | n$ 和 $3 \nmid n$ 两种子情形讨论.

**情形2.2.1** 当 $3 | n$ 时, 图 $U_{C_n} = P(n, 2) - V(C_n) = C_n^*$ , 下面给出其一种3-VREC.

首先, 对圈 $C_n^* = v_1v_3 \cdots v_{n-2}v_nv_2v_4 \cdots v_{n-1}v_1$ 从边 $v_1v_3$ 开始, 依次用颜色1, 2, 3循环染. 其次, 对圈 $C_n = u_1u_2 \cdots u_nu_1$ 从边 $u_1u_2$ 开始, 依次用颜色3, 2, 1循环染. 最后, 对完美匹配 $M = \{u_iv_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ , 从边 $u_1v_1$ 开始, 依次用颜色2, 1, 3循环染. 此时, 对 $\forall u, v \in V(P(n, 2)), d(u) = d(v) = 3$ , 有 $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点色集合相同. 故 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ .

**情形2.2.2** 当 $3 \nmid n$ 时, 下面给出其一种3-*VREC*.

首先, 对圈 $C_n^* = v_1 v_3 \dots v_{n-2} v_n v_2 v_4 \dots v_{n-1} v_1$ , 令 $f(v_1 v_3) = f(v_5 v_7) = f(v_4 v_6) = 3$ ;  $f(v_3 v_5) = f(v_2 v_4) = 2$ ;  $f(v_7 v_9) = f(v_n v_2) = f(v_6 v_8) = f(v_{n-1} v_1) = 1$ . 若 $i$ 为奇数且 $i \in [9, n-2]$ , 则对边 $v_i v_{i+2}$ 用颜色2, 3循环染; 若 $i$ 为偶数且 $i \in [9, n-2]$ , 则对边 $v_i v_{i+2}$ 用颜色3, 2循环染. 其次, 对完美匹配 $M$ , 令 $f(u_i v_i) = 1, i \in [3, 5] \cup [10, n-2]$ ;  $f(u_1 v_1) = f(u_6 v_6) = f(u_7 v_7) = f(u_8 v_8) = f(u_n v_n) = 2$ ;  $f(u_2 v_2) = f(u_9 v_9) = f(u_{n-1} v_{n-1}) = 3$ . 最后, 对圈 $C_n = u_1 u_2 \dots u_n u_1$ , 令 $f(u_1 u_2) = f(u_6 u_7) = f(u_8 u_9) = f(u_{n-1} u_n) = 1$ ;  $f(u_2 u_3) = f(u_4 u_5) = f(u_{n-2} u_{n-1}) = 2$ ;  $f(u_3 u_4) = f(u_5 u_6) = f(u_7 u_8) = f(u_n u_1) = 3$ ; 用颜色2, 3循环染边 $u_i u_{i+1}, i \in [9, n-3]$ . 此时, 对 $\forall u, v \in V(P(n, 2)), d(u) = d(v) = 3$ , 有 $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ .

**情形2.3** 当 $n \equiv 2 \pmod{4}$ 时, 图 $U_{C_n} = P(n, 2) - V(C_n) = C_{\frac{n}{2}}^1 \cup C_{\frac{n}{2}}^2$ , 其中 $C_{\frac{n}{2}}^1 = v_1 v_3 \dots v_{n-3} v_{n-1} v_1, C_{\frac{n}{2}}^2 = v_2 v_4 \dots v_{n-2} v_n v_2$ 且 $\frac{n}{2}$ 为奇数. 要证 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ , 下面给出其一种3-*VREC*即可.

首先, 对圈 $C_{\frac{n}{2}}^1$ , 令 $f(v_{n-1} v_1) = 3$ , 对边 $v_i v_{i+2}$ 用颜色1, 2循环染, 其中 $i \in [1, n-4]$ 且 $i$ 为奇数; 对圈 $C_{\frac{n}{2}}^2$ , 令 $f(v_n v_2) = 3$ , 对边 $v_i v_{i+2}$ 用颜色2, 1循环染, 其中 $i \in [2, n-2]$ 且 $i$ 为偶数. 其次, 对完美匹配 $M = \{u_i v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ , 令 $f(u_i v_i) = 3, i \in [3, n-2]$ ;  $f(u_1 v_1) = f(u_n v_n) = 2$ ;  $f(u_2 v_2) = f(u_{n-1} v_{n-1}) = 1$ . 最后, 对圈 $C_n = u_1 u_2 \dots u_n u_1$ , 令 $f(u_1 u_2) = f(u_{n-1} u_n) = 3$ ;  $f(u_n u_1) = 1$ ; 用颜色2, 1循环染边 $u_i u_{i+1}, i \in [2, n-2]$ . 综上, 对 $\forall u, v \in V(P(n, 2)), d(u) = d(v) = 3$ , 有 $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ .

**情形2.4** 当 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 要证 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ , 下面给出其一种3-*VREC*即可.

首先, 对图 $U_{C_n}$ , 令 $f(v_{n-2} v_n) = f(v_{n-1} v_1) = 3$ ;  $f(v_n v_2) = 2$ ; 若 $i \in [1, n-5]$ 且 $i$ 为奇数, 对边 $v_i v_{i+2}$ 用颜色1, 2循环染; 若 $i \in [2, n-4]$ 且 $i$ 为偶数, 对边 $v_i v_{i+2}$ 用颜色1, 2循环染. 其次, 对完美匹配 $M = \{u_i v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ , 令 $f(u_i v_i) = 3, i \in [2, n-3]$ ;  $f(u_1 v_1) = 2$ ;  $f(u_i v_i) = 1, i \in [n-2, n]$ . 最后, 对圈 $C_n = u_1 u_2 \dots u_n u_1$ , 令 $f(u_{n-2} u_{n-1}) = f(u_n u_1) = 3$ ;  $f(u_{n-1} u_n) = 2$ ; 用颜色1, 2循环染边 $u_i u_{i+1}, i \in [1, n-3]$ . 综上, 对 $\forall u, v \in V(P(n, 2)), d(u) = d(v) = 3$ , 有 $C(u) = C(v) = \{1, 2, 3\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故 $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ .  $\square$

下面给出两类广义Petersen图 $P(n, 1)$ 和 $P(n, 2)$ 的点可约全染色.

**定理 2.3.** 对广义Petersen图 $P(n, 1)$ , 其中 $n \geq 3$ , 则有 $\chi_{vrt}(P(n, 1)) = 4$ .

**证明.** 由引理2.1可知,  $\chi_{vrt}(P(n, 1)) \leq \Delta(P(n, 1)) + 1 = 4$ . 要证 $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 4$ , 只需给出其一种4-*VRTC*即可. 由定理2.1可知,  $\chi'_{vr}(P(n, 1)) = 3$ , 则图 $P(n, 1)$ 是3-点可约边可染的, 即可用颜色1, 2, 3对图 $P(n, 1)$ 进行点可约边染色. 再用颜色4对图 $P(n, 1)$ 的所有顶点进行染色. 此时, 对 $u, v \in V(P(n, 1)), d(u) = d(v) = 3$ , 有 $S(u) = S(v) = \{1, 2, 3, 4\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故 $\chi_{vrt}(P(n, 1)) = 4$ .  $\square$

**定理 2.4.** 对广义Petersen图 $P(n, 2)$ , 其中 $n \geq 5$ , 则有 $\chi_{vrt}(P(n, 2)) = 4$ .

**证明.** 由引理2.1可知,  $\chi_{vrt}(P(n, 2)) \leq \Delta(P(n, 2)) + 1 = 4$ . 下面分 $n = 5$ 和 $n > 5$ 两种情形讨论.

**情形1** 当  $n = 5$  时, 此时图  $P(5, 2)$  为 *Petersen* 图. 要证明  $\chi_{vrt}(P(5, 2)) = 4$ , 只需给出图  $P(5, 2)$  的一种  $4 - VRTC$  即可.

下面给出图  $P(5, 2)$  的一个  $4 - VRTC$ . 由于图  $P(5, 2)$  可拆分成圈  $C_n = u_1u_2u_3u_4u_5u_1$ , 完美匹配  $M = \{u_i v_i | i = 1, 2, \dots, 5\}$  和图  $U_{C_n} = P(n, 2) - V(C_n) = v_1v_3v_5v_2v_4v_1$ . 首先对完美匹配  $M$  用颜色 1 进行边染色. 其次, 对圈  $C_n = u_1u_2 \dots u_5u_1$ , 令  $f(u_1u_2) = f(u_3u_4) = 2$ ;  $f(u_2u_3) = f(u_4u_5) = 3$ ;  $f(u_1u_5) = 4$ ;  $f(u_1) = 3$ ;  $f(u_2) = f(u_3) = f(u_4) = 4$ ;  $f(u_5) = 2$ . 最后对图  $U_{C_n} = P(n, 2) - V(C_n) = v_1v_2 \dots v_5v_1$ , 令  $f(v_1v_3) = f(v_5v_2) = 2$ ;  $f(v_3v_5) = f(v_2v_4) = 3$ ;  $f(v_1v_4) = 4$ ;  $f(v_1) = 3$ ;  $f(v_2) = f(v_3) = f(v_4) = 4$ ;  $f(v_4) = 2$ . 此时,  $\forall v \in V(P(5, 2))$ ,  $d(u) = d(v) = 3$ , 有  $S(u) = S(v) = \{1, 2, 3, 4\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故  $\chi_{vrt}(P(5, 2)) = 4$ .

**情形2** 当  $n > 5$  时, 由定理 2.2 可知,  $\chi'_{vr}(P(n, 2)) = 3$ , 则图  $P(n, 2)$  是 3-点可约边可染的, 即可用颜色 1, 2, 3 对图  $P(n, 2)$  进行点可约边染色. 再用颜色 4 对图  $P(n, 2)$  的所有顶点进行染色. 此时, 对  $\forall u, v \in V(P(n, 2))$ ,  $d(u) = d(v) = 3$ , 有  $S(u) = S(v) = \{1, 2, 3, 4\}$ , 满足同度点的色集合相同. 故  $\chi_{vrt}(P(n, 2)) = 4$ .

综上所述,  $\chi_{vrt}(P(n, 2)) = 4$ .

## 基金项目

甘肃省自然科学基金资助项目(No. 21JR11RA065).

## 参考文献

- [1] Zhang, Z.F., Liu, L.Z. and Wang, J.F. (2002) Adjacent Strong Edge Coloring of Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 623-626. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(02\)80015-5](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80015-5)
- [2] Li, J.W., Zhang, Z.F., Zhu, E.Q., et al. (2009) Adjacent Vertex Reducible Edge-Total Coloring of Graphs. *Proceedings of the 2nd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, Tianjin, 17-19 October 2009, 17-19.
- [3] 雷飞, 李沐春. 完全三部图的点可约全染色[J]. 武汉大学学报(理学版), 2022, 68(5): 471-478.
- [4] 李敬文, 康玉梅, 张树成, 罗榕. 图的点和可约边染色[J]. 武汉大学学报(理学版), 2022, 68(5): 487-495.
- [5] 罗榕, 李敬文, 张树成, 张养君. 若干联图的邻点和可约边染色[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2023, 57(2): 201-207.
- [6] Li, Z.P., Shao, Z.H. and Zhu, E.Q. (2020) Injective Coloring of Generalized Petersen Graphs. *Houston Journal of Mathematics*, **46**, 1-12.
- [7] 田双亮, 张忠辅. 广义 *Petersen* 图  $G(n, k)$  的邻强边染色[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2005, 41(4): 100-101.

- [8] Li, Y.Y. and Chen, L.L. (2021) Injective Edge Coloring of Generalized Petersen Graphs. *AIMS Mathematics*, **6**, 7929-7943. <https://doi.org/10.3934/math.2021460>
- [9] Naqvi, S., Salman, M., Ehtisham, M., *et al.* (2021) On the Neighbor-Distinguishing in Generalized Petersen Graphs. *AIMS Mathematics*, **6**, 13734-13745. <https://doi.org/10.3934/math.2021797>
- [10] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Press Ltd., London.