Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1696-1707
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136173

Hans汉斯

几类梯状图的完美匹配与Hamilton圈

王彦通

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年5月19日；录用日期：2023年6月20日；发布日期：2023年6月28日

摘 要

循环梯状图 CL_n 是由圈 C_n 和路 P_2 的笛卡尔积 $CL_n = C_n \times P_2 (n \geq 3)$，Möbius梯状图 ML_n 是通过梯子图 L_n 添加边 a_1b_n 和 b_1a_n 得到。删掉 CL_n 和 ML_n 的一个Hamilton圈(删边不删点)后剩下的子图是它们的一个完美匹配。反之，删掉 CL_n 和 ML_n 的一个完美匹配后剩下的子图只要是连通的，那一定是原图的Hamilton圈。因此本文通过删除完美匹配的方法给出了 L_n， CL_n 和 ML_n 的所有Hamilton圈，进而通过Hamilton圈研究了完美匹配之间的关系。

关键词

梯子图 L_n，循环梯状图 CL_n，Möbius梯状图 ML_n，Hamilton圈，完美匹配

Perfect Matching of Several Types of Ladder Graphs and Hamilton Cycles

Yantong Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 19th, 2023; accepted: Jun. 20th, 2023; published: Jun. 28th, 2023

Abstract

The cyclic ladder graph CL_n is obtained from the Cartesian product $CL_n = C_n \times P_2 (n \geq 3)$ of cycles C_n and paths P_2 and the Möbius ladder graph ML_n is obtained by adding edges a_1b_n and b_1a_n to the ladder graph L_n. The remaining subgraphs after we delete a Hamilton cycle of CL_n and ML_n (deleting edges without deleting points) are a perfect matching of them. Conversely, the remaining subgraphs after deleting a perfect matching of CL_n and ML_n must be a Hamilton cycle of the original graph as long as they are connected. Therefore, this paper gives all Hamilton cycles

文章引用: 王彦通. 几类梯状图的完美匹配与 Hamilton 圈[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1696-1707.
DOI: 10.12677/pm.2023.136173

of L_n, CL_n and ML_n by deleting perfect matching, and then investigates the relationship between perfect matching through Hamilton cycles.

Keywords

Ladder Graph L_n, Cyclic Ladder Graph CL_n, Möbius Ladder Graph ML_n, Hamilton Cycles, Perfect Matching

1. 引言

图论起源于七桥问题，已经迅速发展到计算机科学，化学，生物学，物理等学科，化学中得到更加广泛的应用。在 1985 年，Klein 和 Randić [1] [2]在研究分子共振结构时发现分子的一个凯库勒结构可以由固定的部分双键来确定，把所需的最少的双键的个数称作这个凯库勒结构的内自由度。Harary 和 Klein [3]称其为图的完美匹配的强迫数。Adams [4]等证明了在最大度为 3 的二部图中，它的一个完美匹配的强迫数是 NP-完全的。Afshani 等[5]证明了计算最大度为 4 的二部图的强迫数是 NP-完全的。2004 年，P. Adams，M. Mahdian 和 E. Mahmoodian [4]定义了图 G 的强迫谱 $Spec(G)$，即图 G 的所有完美匹配的强迫数构成的集合。张和平，赵爽等[6]提出了强迫多项式的概念。1997 年，李学良[7]研究了具有反强迫边的六角系统。2007 年，Vhukičević 和 Trinajstić [8]从匹配强迫的对立面出发，提出图的反强迫数。2015 年，H. Hwang，H. Lei，Y. Yeh 和 H. Zhang [9]介绍了图的反强迫多项式。2016 年，雷洪川，叶永南和张和平[10]首次提出完美匹配的反强迫数的概念，并给出了图的反强迫谱。2017 年，石玲娟，张和平[11] [12]给出了图的最大反强迫数的一个新上界，证明了(4,6)-富勒烯图的最大强迫数等于它的 Clar 数，最大反强迫数等于它的 Fris 数。邓凯等[13] [14]给出了图 G 的反强迫谱 $Specaf(G)$ 的定义，即图 G 的所有完美匹配的反强迫数构成的集合。2018 年，赵爽，张和平[15]计算了有强迫边的苯基系统和苯型平行四边形的反强迫多项式。姚海元、王杰彬、韩振云等[16] [17]得到了几类梯子图的反强迫谱和 Lucas 数列、Fibonacci 数列之间的一些组合解释。2019 年，赵爽，张和平[18]计算了 $P_2 \times P_n$ 格子图和 $P_3 \times P_{2n}$ 格子图的强迫多项式和反强迫多项式。2021 年，邓凯等[19]研究了芘系统，方格子系统的强迫和反强迫多项式。马聪聪[20]研究了 C_{60} 的一个比较特殊的同分异构体和 C_{70} 的完美匹配、强迫数和反强迫数，得到了它们的反强迫多项式，以及一些其它富勒烯图的反强迫多项式。王倩倩[21]研究了几类特殊图的反强迫多项式。2022 年，刘雨童，马聪聪和姚海元[22]提出了图的双强迫多项式。刘雨童[23]给出了 60 阶富勒烯图的双强迫多项式。邓凯[24]计算了线性亚苯基系统的强迫和反强迫多项式，得到了它们精确的表达式。

本文主要研究几类梯状图的完美匹配与 Hamilton 圈的关系。

2. 预备知识

图 G 的完美匹配是指覆盖 G 中所有顶点的两两不交的边的集合。包含图 G 的每个顶点的路我们称为 G 的 Hamilton 路，类似地，G 的 Hamilton 圈是指包含图 G 的每个顶点的圈。

循环梯状图 CL_n 是由圈 C_n 和路 P_2 的笛卡尔积 $CL_n = C_n \times P_2 \left(n \geq 3\right)$，也可以由梯子图通过添加边 a_1a_n

和边 b_1b_n 得到，如图 1 所示。

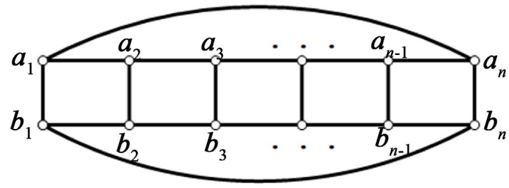


Figure 1. Cyclic ladder graph CL_n

图 1. 循环梯状图 CL_n

循环梯状图 CL_n 中，我们把类似于的 a_ib_i 边称为竖直边，类似于 $a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},a_1a_n,b_1b_n$ 的边称为水平边。设 M 是循环梯状图 CL_n 的一个完美匹配，M 中类似于 a_ib_i 的边称为竖直匹配边，类似于 $a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},a_1a_n,b_1b_n$ 的边称为水平匹配边。

Möbius 梯状图 ML_n 是通过梯子图 L_n 添加边 a_1b_n 和 b_1a_n，如图 2 所示。

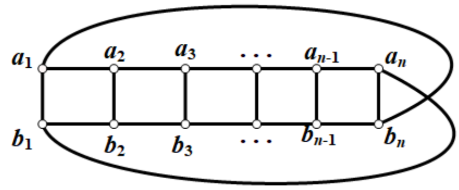


Figure 2. Möbius ladder graph ML_n

图 2. Möbius 梯状图 ML_n

Möbius 梯状图 ML_n 中，把类似于的 a_ib_i 边称为竖直边，类似于 $a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},a_1b_n,b_1a_n$ 的边称为水平边。设 M 是循环梯状图 ML_n 的一个完美匹配，M 中类似于 a_ib_i 的边称为竖直匹配边，类似于 $a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},a_1b_n,b_1a_n$ 的边称为水平匹配边。

Hamilton 圈是两个特殊完美匹配的不交并。设 A,B 是两个集合，A 和 B 的对称差我们定义为

$$A\oplus B=(A\cup B)(A\cap B),$$

特别地，如果 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\oplus B=A\dot{\cup}B$，即 A 和 B 的不交并。

下面给出计算循环梯状图 CL_n 与 Möbius 梯状图 ML_n 完美匹配个数的两个定理。

定理 1 [25] 循环梯状图 CL_n 的完美匹配个数 $|M|=\begin{cases}l_n,若n\geq 3是奇数;\\ l_n+2,若n\geq 4是偶数.\end{cases}$

定理 2 [25] Möbius 梯状图 ML_n 的完美匹配个数 $|M|=\begin{cases}l_n+2,若n\geq 3是奇数;\\ l_n,若n\geq 2是偶数.\end{cases}$

定理 1 和 2 中，$l_n=l_{n-1}+l_{n-2}$ 为递推关系的 Lucas 数列，初始值 $l_0=2,l_1=1$，它的第 n 项和 $l_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}$。当 n 为偶数时，循环梯状图 CL_n 中，多了两个上下交错水平匹配边的完美匹配，在 Möbius 梯状图 ML_n 中，这种情况出现在 n 为奇数。

3. 主要结论

3.1. 循环梯状图 CL_n 与 Hamilton 圈

下面给出 CL_3 的 4 个完美匹配(图 3)：

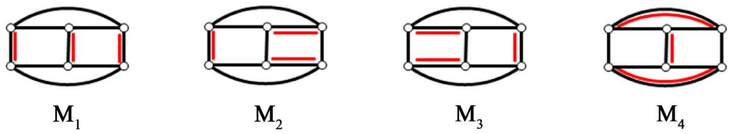


Figure 3. All 4 perfect matchings of cyclic ladder graph CL_3

图 3. 循环梯状图 CL_3 的所有 4 个完美匹配

CL_3 分别删除各完美匹配的子图(图 4)：

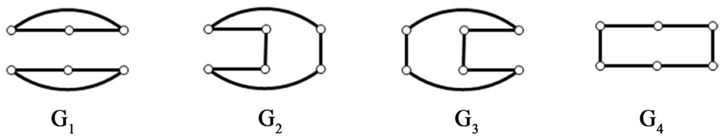


Figure 4. The graphs of deleting each perfect matchings of cyclic ladder graph CL_3

图 4. 循环梯状图 CL_3 分别删除各完美匹配的子图

下面给出循环梯状图 CL_3 完美匹配与 Hamilton 圈的表示(表 1)。

Table 1. Representation by perfect matching of 3 Hamilton-cycles of CL_3

表 1. CL_3 3 个 Hamilton 圈与完美匹配的表示

Hamilton-圈	G_2	G_3	G_4
完美匹配的交	$M_3 \cap M_4 = \varnothing$	$M_2 \cap M_4 = \varnothing$	$M_2 \cap M_3 = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_3 \dot{\cup} M_4$	$M_2 \dot{\cup} M_4$	$M_2 \dot{\cup} M_3$

下面给出 CL_4 的 9 个完美匹配(图 5)：

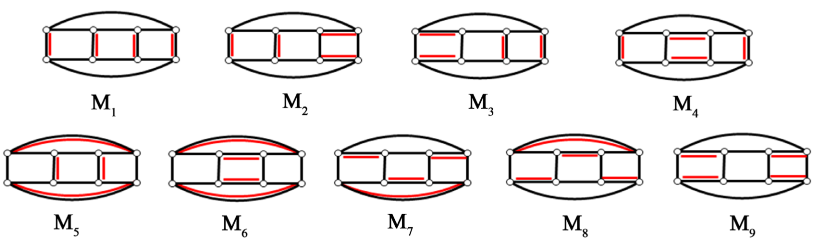


Figure 5. All 9 perfect matchings of cyclic ladder graph CL_4

图 5. 循环梯状图 CL_4 的所有 9 个完美匹配

CL_4 分别删除各完美匹配的子图(图 6)：

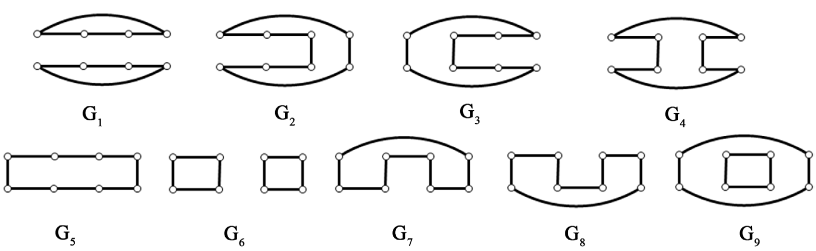


Figure 6. The graphs of deleting each perfect matchings of cyclic ladder graph CL_4

图 6. 循环梯状图 CL_4 分别删除各完美匹配的子图

下面给出循环梯状图 CL_4 完美匹配与 Hamilton 圈的表示(表 2)。

Table 2. Representation by perfect matching of 6 Hamilton cycles of CL_4
表 2. CL_4 6 个 Hamilton 圈与完美匹配的表示

Hamilton-圈	G_2	G_3	G_4	G_5	G_7	G_8
完美匹配的交	$M_3 \cap M_6 = \varnothing$	$M_2 \cap M_6 = \varnothing$	$M_5 \cap M_9 = \varnothing$	$M_4 \cap M_9 = \varnothing$	$M_1 \cap M_8 = \varnothing$	$M_1 \cap M_6 = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_3 \dot\cup M_6$	$M_2 \dot\cup M_6$	$M_5 \dot\cup M_9$	$M_4 \dot\cup M_9$	$M_1 \dot\cup M_8$	$M_1 \dot\cup M_6$

下面给出 CL_5 的 11 个完美匹配(图 7):

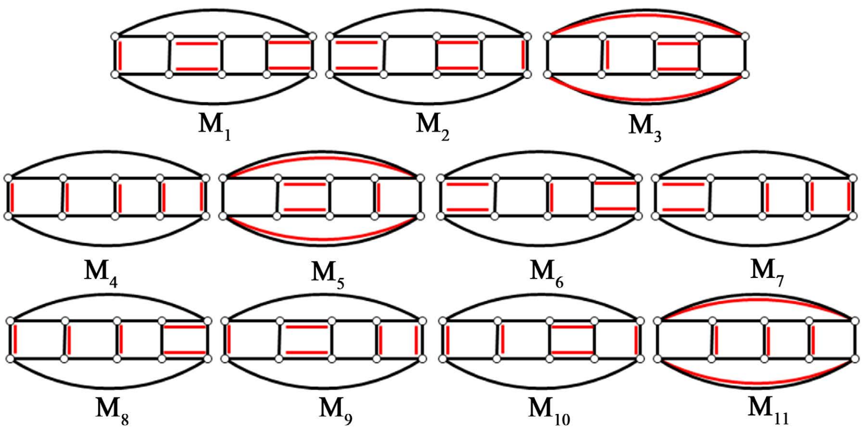


Figure 7. All 11 perfect matchings of cyclic ladder graph CL_5
图 7. 循环梯状图 CL_5 的所有 11 个完美匹配

CL_5 分别删除各完美匹配的子图(图 8):

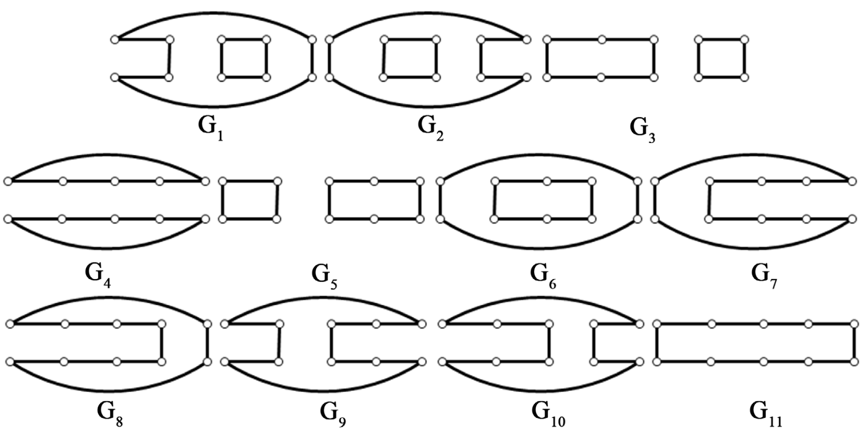


Figure 8. The graphs of deleting each perfect matchings of cyclic ladder graph CL_5
图 8. 循环梯状图 CL_5 分别删除各完美匹配的子图

下面给出循环梯状图 CL_5 完美匹配与 Hamilton-圈的表示(表 3)。

Table 3. Representation by perfect matching of 5 Hamilton cycles of CL_5

表 3. CL_5 5 个 Hamilton 圈与完美匹配的表示

Hamilton-圈	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}
完美匹配的交	$M_1 \cap M_3 = \varnothing$	$M_2 \cap M_5 = \varnothing$	$M_3 \cap M_6 = \varnothing$	$M_5 \cap M_6 = \varnothing$	$M_1 \cap M_2 = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_1 \dot\cup M_3$	$M_2 \dot\cup M_5$	$M_3 \dot\cup M_6$	$M_5 \dot\cup M_6$	$M_1 \dot\cup M_2$

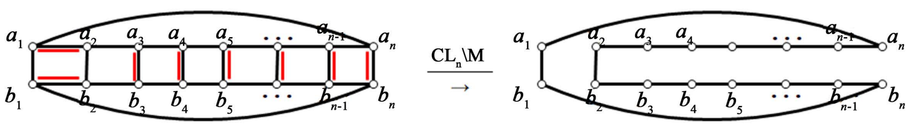
下面给出主要结论。

引理 1 设 M 是循环梯状图 CL_n 的完美匹配，若 M 含有至少 2 对水平匹配边，则 $CL_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。

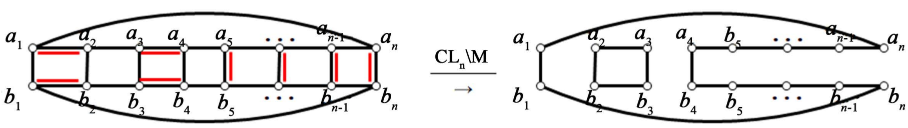
证明：首先，我们考虑 n 为偶数的情况。当 n 为偶数，我们根据水平匹配边的个数进行分类讨论。设 p 为 M 中成对水平匹配边的个数。

1) 当 $p=0$ 时，即 M 中没有水平匹配边或是上下交错出现的水平匹配边。若 M 中没有水平匹配边，CL_n 在 $CL_n \setminus M$ 后，存在两个不交的长度为 n 的偶圈，此时 $CL_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈；若上下交错出现的水平匹配边，CL_n 在 $CL_n \setminus M$ 后，存在一个长为 $2n$ 的 Hamilton 圈，不存在其它分支，因此 $CL_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。

2) 当 $p=1$ 时，即 M 中只含有一对水平匹配边，不妨设 $a_1a_2, b_1b_2 \in M$，CL_n 在 $CL_n \setminus M$ 后，如下图所示，删掉这对水平匹配边之后，顶点 a_1, a_2 和 b_1, b_2 之间没有边相连，此时通过外水平边 a_1a_n, b_1b_n 的路，因此 $CL_n \setminus M$ 存在 Hamilton 圈且是一个长为 $2n$ 的偶圈。



3) 当 $2 \le p \le \frac{n}{2}$ 时，即 M 含有至少 2 对水平匹配边，首先我们看 $p=2$ 时的情况，如下图所示，不妨设 $\{a_1a_2, b_1b_2, a_3a_4, b_3b_4\} \in M$，删掉它的匹配边之后，至少会出现两个分支，且都是偶圈，因此不存在 Hamilton 圈，当随着成对水平匹配边个数的增加，出现偶分支的个数也随之增加。所以当 $2 \le p \le \frac{n}{2}$ 时，$CL_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。



综上可得，当 n 为偶数时，若 M 含有至少 2 对水平匹配边，则 $CL_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。同理可得，当 n 为奇数时，引理成立。即证。

定理 3 循环梯状图 CL_n 的 Hamilton 圈的个数 $h(CL_n)$ 为

$$h(CL_n) = \begin{cases} n, 若 n 是奇数; \\ n+2, 若 n 是偶数. \end{cases}$$

证明：设 M 是循环梯状图 CL_n 的任一完美匹配，由引理 1 及其证明过程可知，若 M 中含有上下交错水平匹配边(不成对匹配边)与含有一对水平匹配边(其余全是竖直匹配边)，则 $CL_n \setminus M$ 存在 Hamilton 圈。

因此我们只对这 2 种情况进行讨论。设所有完美匹配中 $CL_n \setminus M$ 有 Hamilton 圈的个数记作 $h(CL_n)$。

1) 若 M 中含有上下交错水平匹配边，只有 n 为偶数时出现此类情况，这样的完美匹配有 2 个，它们互相平移可以得到。由引理 1 可知，$CL_n \setminus M$ 存在 2 个 Hamilton 圈，即

$$h^*(CL_n) = 2, n \text{是偶数}.$$

2) 若 M 中含有一对水平匹配边(其余全是竖直匹配边)，不妨设第一个完美匹配中 $a_1a_2, b_1b_2 \in M$，我们通过平移 a_1a_2, b_1b_2 这对水平匹配边，则可得到只含有一对水平匹配边的所有完美匹配。由引理 1 可知，$CL_n \setminus M$ 存在 n 个 Hamilton 圈。即

$$h^*(CL_n) = n.$$

综上(1) (2)可得，

$$h(CL_n) = \begin{cases} n, \text{若 } n \text{ 是奇数;} \\ n+2, \text{若 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

3.2. Möbius 梯状图 ML_n 与 Hamilton 圈

下面给出 ML_3 的 6 个完美匹配(图 9)：

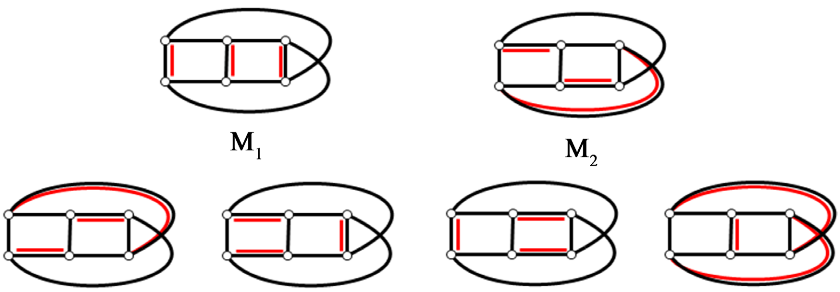


Figure 9. All 6 perfect matchings of Möbius ladder graph ML_3
图 9. Möbius 梯状图 ML_3 的所有 6 个完美匹配

ML_3 分别删除各完美匹配的子图(图 10)：

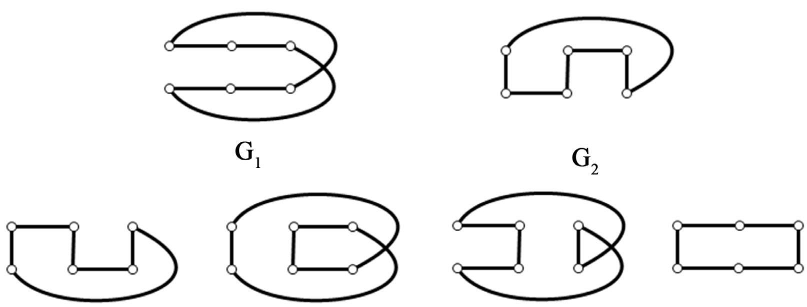


Figure 10. The graphs of deleting each perfect matchings of Möbius ladder graph ML_3
图 10. Möbius 梯状图 ML_3 分别删除各完美匹配的子图

下面给出 Möbius 梯状图 ML_3 完美匹配与 Hamilton 圈的表示(表 4)。

Table 4. Representation by perfect matching of 6 Hamilton-cycles of ML_3

表 4. ML_3 6 个 Hamilton-圈与完美匹配的表示

Hamilton-圈	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
完美匹配的交	$M_2 \cap M_3 = \varnothing$	$M_1 \cap M_3 = \varnothing$	$M_1 \cap M_2 = \varnothing$	$M_5 \cap M_6 = \varnothing$	$M_4 \cap M_6 = \varnothing$	$M_4 \cap M_5 = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_2 \dot{\cup} M_3$	$M_1 \dot{\cup} M_3$	$M_1 \dot{\cup} M_2$	$M_5 \dot{\cup} M_6$	$M_4 \dot{\cup} M_6$	$M_4 \dot{\cup} M_5$

下面给出 ML_4 的 7 个完美匹配(图 11)：

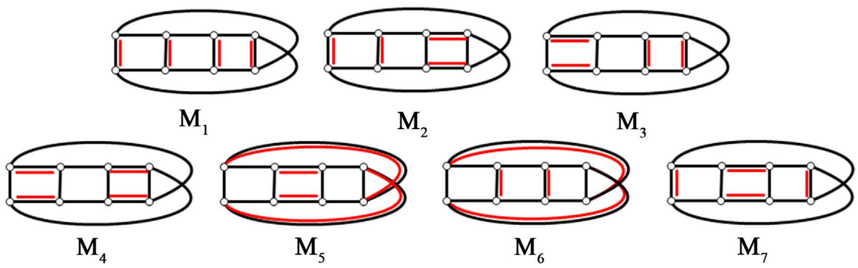


Figure 11. All 7 perfect matchings of Möbius ladder graph ML_4

图 11. Möbius 梯状图 ML_4 的所有 7 个完美匹配

ML_4 分别删除各完美匹配的子图(图 12)：

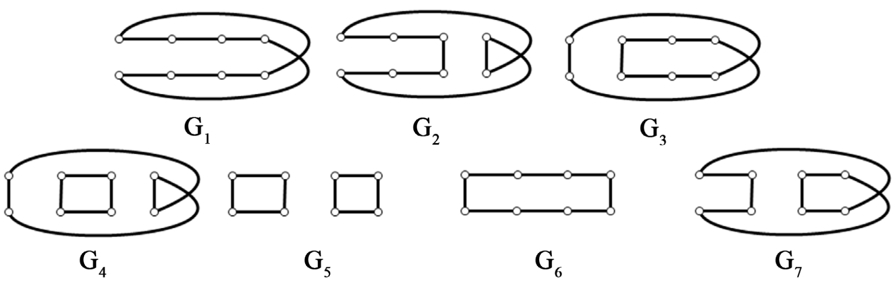


Figure 12. The graphs of deleting each perfect matchings of Möbius ladder graph ML_4

图 12. Möbius 梯状图 ML_4 分别删除各完美匹配的子图

下面给出 Möbius 梯状图 ML_4 完美匹配与 Hamilton-圈的表示(表 5)。

Table 5. Representation by perfect matching of 5 Hamilton cycles of ML_4

表 5. ML_4 5 个 Hamilton 圈与完美匹配的表示

Hamilton-圈	G_1	G_2	G_3	G_6	G_7
完美匹配的交	$M_4 \cap M_5 = \varnothing$	$M_3 \cap M_5 = \varnothing$	$M_2 \cap M_5 = \varnothing$	$M_4 \cap M_7 = \varnothing$	$M_4 \cap M_6 = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_4 \dot{\cup} M_5$	$M_3 \dot{\cup} M_5$	$M_2 \dot{\cup} M_5$	$M_4 \dot{\cup} M_7$	$M_4 \dot{\cup} M_6$

下面给出 ML_5 的 13 个完美匹配(图 13)：

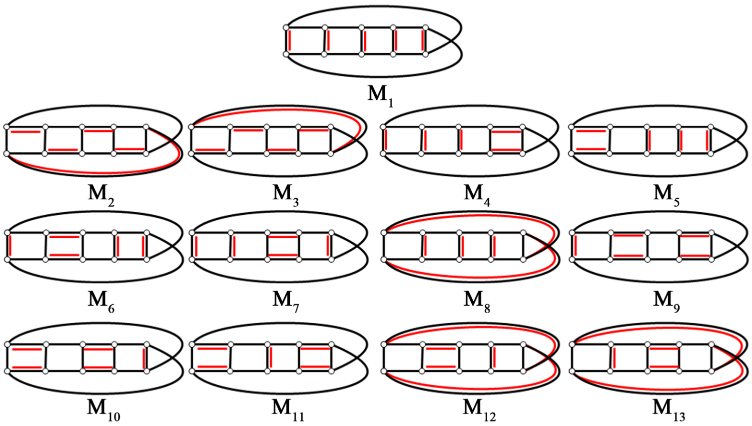


Figure 13. All 13 perfect matchings of Möbius ladder graph ML_5
图 13. Möbius 梯状图 ML_5 的所有 13 个完美匹配

ML_5 分别删除各完美匹配的子图(图 14)：

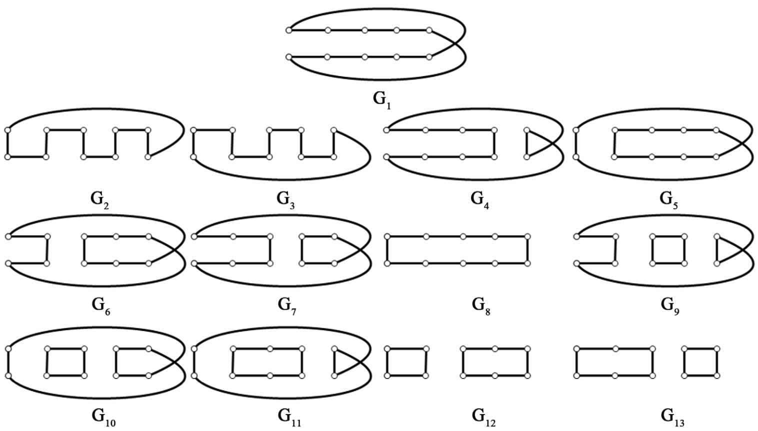


Figure 14. The graphs of deleting each perfect matchings of Möbius ladder graph ML_5
图 14. Möbius 梯状图 ML_5 分别删除各完美匹配的子图

下面给出 Möbius 梯状图 ML_5 完美匹配与 Hamilton-圈的表示(表 6)。

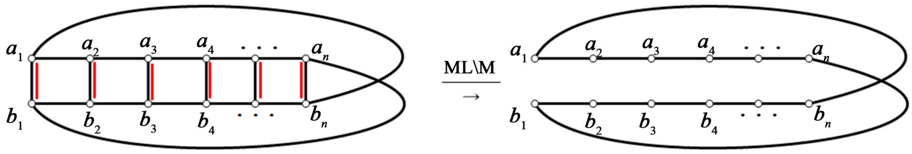
Table 6. Representation by perfect matching of 8 Hamilton cycles of ML_5
表 6. ML_5 8 个 Hamilton 圈与完美匹配的表示

Hamilton-圈	G_1	G_2	G_3	G_4
完美匹配的交	$M_2 \cap M_3 = \varnothing$	$M_1 \cap M_3 = \varnothing$	$M_1 \cap M_{12} = \varnothing$	$M_{10} \cap M_{12} = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_2 \dot\cup M_3$	$M_1 \dot\cup M_3$	$M_1 \dot\cup M_{12}$	$M_{10} \dot\cup M_{12}$
Hamilton-圈	G_5	G_6	G_7	G_8
完美匹配的交	$M_9 \cap M_{13} = \varnothing$	$M_{11} \cap M_{13} = \varnothing$	$M_{11} \cap M_{12} = \varnothing$	$M_9 \cap M_{10} = \varnothing$
完美匹配的不交并	$M_9 \dot\cup M_{13}$	$M_{11} \dot\cup M_{13}$	$M_{11} \dot\cup M_{12}$	$M_9 \dot\cup M_{10}$

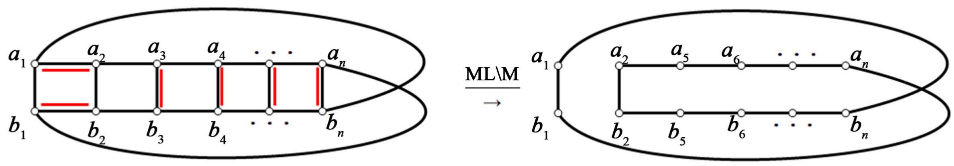
引理 2 设 M 是 Möbius 梯状图 ML_n 的完美匹配，若 M 含有至少 2 对水平匹配边，则 $ML_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。

证明：首先，考虑 n 为偶数的情况。当 n 为偶数，我们根据水平匹配边的个数进行分类讨论。设 p 为 M 中成对水平匹配边的个数。

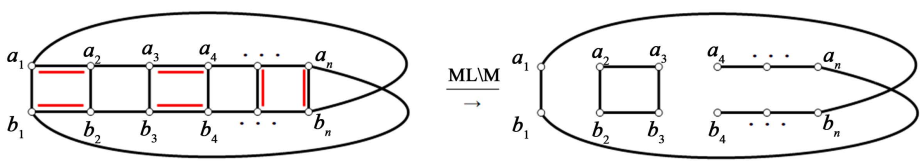
1) 当 $p=0$ 时，即 M 中没有水平匹配边，如下图所示，ML_n 在 $ML_n \setminus M$ 后，存在一个长度为 $2n$ 的偶圈，不存在其它分支，$CL_n \setminus M$ 存在 Hamilton 圈。



2) 当 $p=1$ 时，即 M 中只含有一对水平匹配边，不妨设 $a_1a_2, b_1b_2 \in M$，ML_n 在 $ML_n \setminus M$ 后，如下图所示，删掉这对水平匹配边之后，顶点 a_1, a_2 和 b_1, b_2 之间没有边相连，此时通过外水平边 a_1b_n, b_1a_n 的路，因此 $ML_n \setminus M$ 存在 Hamilton 圈且是一个长为 $2n$ 的偶圈。



3) 当 $2 \le p \le \frac{n}{2}$ 时，即 M 含有至少 2 对水平匹配边，首先 $p=2$ 时的情况，如下图所示，不妨设 $\{a_1a_2, b_1b_2, a_3a_4, b_3b_4\} \in M$，删掉它的匹配边之后，至少会出现两个分支，且都是偶圈，因此不存在 Hamilton 圈，当随着成对水平匹配边个数的增加，出现偶分支的个数也随之增加。所以当 $2 \le p \le \frac{n}{2}$ 时，$ML_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。



综上可得，当 n 为偶数时，若 M 含有至少 2 对水平匹配边，则 $ML_n \setminus M$ 不存在 Hamilton 圈。同理可得，当 n 为奇数时，引理成立。即证。

引理 3 设 M 是 Möbius 梯状图 ML_n 的完美匹配，若 M 是全竖直匹配边，则 $ML_n \setminus M$ 存在 Hamilton 圈。

定理 4 Möbius 梯状图 ML_n 的 Hamilton 圈的个数 $h(ML_n)$ 为

$$h(ML_n) = \begin{cases} n+3, \text{若 } n \text{ 是奇数;} \\ n+1, \text{若 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

证明：设 M 是 Möbius 梯状图 ML_n 的任一完美匹配，由引理 2 及其证明过程可知，若 M 中含有上下交错水平匹配边(不成对匹配边)，含有一对水平匹配边(其余全是竖直匹配边)与全竖直匹配边，则 $ML_n \setminus M$ 存在 Hamilton 圈。因此我们只对这 3 种情况进行讨论。设所有完美匹配中 $ML_n \setminus M$ 有 Hamilton

圈的个数记作 $h(ML_n)$。

1) 若 M 中含有上下交错水平匹配边，只有 n 为奇数时出现此类情况，这样的完美匹配有 2 个，它们互相平移可以得到。由引理 2 知， $ML_n \setminus M$ 存在 2 个 Hamilton 圈，即

$$h^*(ML_n)=2, n\text{是奇数}.$$

2) 若 M 中含有一对水平匹配边(其余全是竖直匹配边)，不妨设第一个完美匹配中 $a_1a_2, b_1b_2 \in M$ ，我们通过平移 a_1a_2, b_1b_2 这对水平匹配边，则可得到只含有一对水平匹配边的所有完美匹配。由引理 2 可知， $ML_n \setminus M$ 存在 n 个 Hamilton 圈。即

$$h^*(ML_n)=n.$$

3) 若 M 中是全竖直匹配边，由引理 2 可知， $ML_n \setminus M$ 存在 1 个 Hamilton 圈。即

$h^*(ML_n)=1.$

综上(1) (2) (3)可得，

$$h(ML_n)=\begin{cases} n+3, \text{若 } n \text{ 是奇数;} \\ n+1, \text{若 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

定理 3 与定理 4 也可以通过定理 5 证明得到。

定理 5 梯子图 L_n 的 Hamilton 圈的个数 $h(L_n)$ 为

$$h(L_n)=1.$$

梯子图 L_n 只有唯一的一个 Hamilton 圈，即

$$C=a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_nb_nb_{n-1}\cdots a_3a_2a_1.$$

当 CL_n 与 ML_n 不含上下交错边的完美匹配，其它完美匹配删除匹配边后是否有 Hamilton 圈，可由定理 5 证明。删除一个水平 M-交错 4-圈后，其子图若只含有竖直匹配边的完美匹配，则原图一定存在 Hamilton 圈。由定理 3 和 4 的证明过程即得。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12161081)。

参考文献

[1] Randić, M. and Klein, D.J. (1985) Kekulé Valence Structures Revisited. Innate Degrees of Freedom of π-Electron Couplings. In: Trinajstić, N., Ed., *Mathematical and Computational Concepts in Chemistry*, Wiley, New York, 274-282.

[2] Klein, D.J. and Randić, M. (1987) Innate Degree of Freedom of a Graph. *Journal of Computational Chemistry*, **8**, 516-521. https://doi.org/10.1002/jcc.540080432

[3] Harary, F., Klein, D.J. and Živković, T.P. (1991) Graphical Properties of Polyhexes: Perfect Matching Vector and Forcing. *Journal of Mathematical Chemistry*, **6**, 295-306. https://doi.org/10.1007/BF01192587

[4] Adams, P., Mahdian, M. and Mahmoodian, E.S. (2004) On the Forced Matching Numbers of Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **281**, 1-12. https://doi.org/10.1016/j.disc.2002.10.002

[5] Afshani, P., Hatami, H. and Mahmoodian, E.S. (2004) On the Spectrum of the Forced Matching Number of Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **30**, 147-160.

[6] Zhang, H., Zhao, S. and Lin, R. (2015) The Forcing Polynomial of Catacondensed Hexagonal Systems. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **73**, 473-490.

[7] Li, X. (1997) Hexagonal Systems with Forcing Single Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **72**, 295-301. https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00116-9

[8] Vhukičević, D. and Trinajstić, N. (2007) On the Anti-Forcing Number of Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **42**, 575-583. https://doi.org/10.1007/s10910-006-9133-6

[9] Hwang, H., Lei, H., Yeh, Y. and Zhang, H. (2015) Distribution of Forcing and Anti-Forcing Numbers of Random Perfect Matchings on Hexagonal Chains and Crowns. http://140.109.74.92/hk/?p=873

[10] Lei, H., Yeh, Y. and Zhang, H. (2016) Anti-Forcing Numbers of Perfect Matchings of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **202**, 95-105. https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.08.024

[11] Shi, L. and Zhang, H. (2017) Tight Upper Bound on the Maximum Anti-Forcing Numbers of Graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, **19**, Article No. 9.

[12] Shi, L., Wang, H. and Zhang, H. (2017) On the Maximum Forcing and Anti-Forcing Numbers of (4,6)-Fullerenes. *Discrete Applied Mathematics*, **233**, 187-194. https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.07.009

[13] Deng, K. and Zhang, H. (2017) Anti-Forcing Spectra of Perfect Matchings of Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **33**, 660-680. https://doi.org/10.1007/s10878-015-9986-3

[14] Deng, K. and Zhang, H. (2017) Anti-Forcing Spectrum of Any Cata-Condensed Hexagonal System Is Continuous. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 19-33. https://doi.org/10.1007/s11464-016-0605-0

[15] Zhao, S. and Zhang, H. (2018) Anti-Forcing Polynomials for Benzenoids Systems with Forcing Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **250**, 342-356. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.05.023

[16] 姚海元, 王杰彬, 王旭. 循环梯状图的完美匹配的反强迫谱与卢卡斯数[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2018, 54(2): 21-25.

[17] 韩振云, 王杰彬. 梯子图完美匹配的反强迫谱与斐波那契数列[J]. 兰州工业学院学报, 2020, 27(1): 85-90.

[18] Zhao, S. and Zhang, H. (2019) Forcing and Anti-Forcing Polynomials of Perfect Matchings for Some Rectangle Grids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **57**, 202-225. https://doi.org/10.1007/s10910-018-0944-z

[19] Deng, K., Lü, H. and Wu, T. (2020) Forcing and Anti-Forcing Polynomials of a Polyomino Graph.

[20] 马聪聪. 几类富勒烯图的反强迫多项式[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2021.

[21] 王倩倩. 几类特殊图的反强迫多项式[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2021.

[22] Liu, Y.T., Ma, C.C., Yao, H.Y. and Wang, X. (2022) Computing the Forcing and Anti-Forcing Numbers of Perfect Matchings for Graphs by Integer Linear Programmings. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **87**, 561-575. https://doi.org/10.46793/match.87-3.561L

[23] 刘雨童. 60 阶富勒烯图的双强迫多项式[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2022.

[24] 邓凯. 线性亚苯基系统的强迫和反强迫多项式[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2022, 37(4): 491-500.

[25] 王杰彬. 几类特殊图的反强迫谱的研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2018.