Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2142-2154
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137222

二维定常Euler方程超音速解的存在性

李晓蕊，李致远

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月24日；发布日期：2023年7月31日

摘 要

本文研究广义压力下跨音速流动问题在音速曲线附近的解。给定音速曲线和正特征线上的条件，构造了二维等熵Euler方程的超音速解。由于该系统是退化的，在音速曲线上失去双曲性并产生奇点。因此通过引入一组新变量将该问题转化为一个具有显式奇异正则结构的线性系统，利用迭代法建立新系统光滑解的存在唯一性，从而证明了原系统解的存在性。

关键词

定常Euler方程，特征分解，退化系统，音速－超音速解，混合型问题

Existence of Supersonic Solution for Two-Dimensional Steady Euler Equations

Xiaorui Li, Zhiyuan Li

School of Science, Chang’an University, Xi’an Shaanxi

Received: Jun. 18th, 2023; accepted: Jul. 24th, 2023; published: Jul. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we study the solution of transonic flow problems under generalized pressure near the sonic curve. Given the conditions of the sonic curve and the positive characteristic line, the supersonic solution of the two-dimensional isentropic Euler equation is constructed. Since this system is degenerate, it loses hyperbolicity and produces singularities on the sonic curve. Therefore, by introducing a new set of variables, the problem is transformed into a linear system with explicit singular regular structure. The existence and uniqueness of the smooth solution of the new system are established by iterative method, and the existence of the solution of the original system is proved.

文章引用: 李晓蕊, 李致远. 二维定常 Euler 方程超音速解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2142-2154.
DOI: 10.12677/pm.2023.137222

Keywords

Steady Euler Equations, Characteristic Decomposition, Degenerate System, Sonic-Supersonic Solution, Mixed-Type Problem

1. 引言

二维定常等熵 Euler 方程为

$$\begin{cases}(\rho u)_x+(\rho v)_y=0,\\ \left(\rho u^2+p\right)_x+(\rho uv)_y=0,\\ (\rho uv)_x+\left(\rho u^2+p\right)_y=0.\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 ρ 是密度，(u,v) 是速度，压力 $p=p(\rho)$ 是 ρ 的函数满足 $p(\rho)=A_1\rho^{\gamma_1}+A_2\rho^{\gamma_2}$。其中 A_1,A_2 是气体常数，$\gamma_1,\gamma_2\in(1,3)$，假设流是无旋的，即 $u_x=v_y$，则有

$$\begin{cases}\left(c^2-u^2\right)u_x-uv\left(u_y+v_x\right)+\left(c^2-v^2\right)v_y=0,\\ u_y=v_x.\end{cases}\tag{1.2}$$

Bernoulli 定律为

$$\frac{q^2}{2}+\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{p'(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho=0,\tag{1.3}$$

其中 $c=\sqrt{p'(\rho)}$ 是音速，$q=\sqrt{u^2+v^2}$。

系统(1.2)的特征值为

$$\Lambda_\pm=\frac{uv\pm c\sqrt{q^2-c^2}}{u^2-c^2}.\tag{1.4}$$

当 $q>c$ 时，流动是超音速的，当 $q<c$ 时，流动是亚音速的。

本文的问题来源于跨音速管道流动问题。1948 年在著名的著作《超音速流动与激波》中，Courant 和 Friedrichs 描述了一种现象，即假设管道壁为平面，但在某些部分有一个向内的小凸起。如果入口马赫数不多于 1 的情况下，流动在靠近凸起的有限区域内变为超音速，在出口部分还是纯亚音速的。

类似的跨音速关于双曲区域的该系统已经有了较多的研究结果，Li 和 Zheng [1]考虑了在初始稀疏波较大的情况下，构造了二维 Euler 方程四个具有两个对称轴的平面稀疏波相互作用的整体经典解，但是这个解并不是跨音速解。Hu 和 Li [2]以马赫角和流角为自变量，构造了定常流的经典音速－超音速解。Zhang 和 Zheng [3]在二维定常可压 Euler 方程组的曲线一侧构造了一个局部光滑的超声波解。张天佑[4]等通过构造迭代序列研究了二维拟定常 Euler 方程的退化柯西问题。Li 和 Hu [5]研究了完全 Euler 方程理想气体跨音速流动问题音速曲线附近音速－超音速解的结构，给出了两条光滑曲线，一条是音速曲线，另一条是特征线，构造了二维定常 Euler 方程在角形区域的局部经典解。而本文直接利用马赫角的特征分解研究

一般气体下 Euler 方程的音速－超音速解。

本文的目的是建立在一般气体下的 Euler 方程的退化混合型边值问题，具体考虑的问题如下。

问题 1 令 $\widehat{BA}$ 和 $\widehat{BC}$ 为两条光滑曲线，我们给定在该两条曲线上的条件使得 $\widehat{BA}$ 为正特征曲线，$\widehat{BC}$ 为音速曲线，我们在 B 点附近寻找一个经典超音速解。

本文组织安排如下。第 2 节建立马赫角的特征分解并引出定理说明问题 1 解的存在性；第 3 节引入部分速度图变换把系统线性化并构造了迭代序列；第 4 节证明线性系统的混合型问题经典解的存在性；第 5 节将结果变换原始平面，至此，我们证明了问题 1 解的存在唯一性。

2. 基本关系和主要结论

在本节中，我们建立了关于马赫角的特征分解并提出了主要结论。

2.1. 特征分解

称 $\theta\in[-\pi,\pi)$ 为流角，$\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 为马赫角，满足

$$\tan\theta=\frac{v}{u},\quad \sin\omega=\frac{c}{q}. \tag{2.1}$$

因而在音速曲线上有 $\omega=\frac{\pi}{2}$，定义角

$$\alpha:=\theta+\omega,\quad \beta:=\theta-\omega. \tag{2.2}$$

易证

$$\tan\alpha=\Lambda_+,\quad \tan\beta=\Lambda_-, \tag{2.3}$$

其中 α 和 β 分别对应于正特征线和负特征线的倾斜角。可得

$$u=c\frac{\cos\theta}{\sin\omega},\quad v=c\frac{\sin\theta}{\sin\omega}. \tag{2.4}$$

引入方向导数，记

$$\begin{aligned}\bar\partial^+&=\cos\alpha\partial_x+\sin\alpha\partial_y, & \bar\partial^-&=\cos\beta\partial_x+\sin\beta\partial_y,\\ \bar\partial^0&=\cos\theta\partial_x+\sin\theta\partial_y, & \bar\partial^\perp&=-\sin\theta\partial_x+\cos\theta\partial_y,\end{aligned} \tag{2.5}$$

因而

$$\begin{aligned}\bar\partial^+&=\cos\alpha\partial^+, & \bar\partial^-&=\cos\beta\partial^-,\\ \bar\partial^++\bar\partial^-&=2\cos\omega\bar\partial^0, & \bar\partial^+-\bar\partial^-&=2\sin\omega\bar\partial^\perp,\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $\partial^\pm=\partial_x+\Lambda_\pm\partial_y$。

则系统(1.2)的特征形式为

$$\partial^\pm u+\Lambda_\mp\partial^\pm v=0. \tag{2.7}$$

由(2.6)可得 (θ,ω,c) 三者之间的关系，即

$$\begin{cases}\bar\partial^+\theta+\dfrac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\bar\partial^+\omega-\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}\dfrac{\bar\partial^+c}{c}=0,\\ \bar\partial^-\theta-\dfrac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\bar\partial^-\omega+\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}\dfrac{\bar\partial^-c}{c}=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

对(1.3)求导，代入(2.4)得

$$\frac{\bar{\partial}^{\pm}c}{c}=\frac{1}{\sin\omega\left(1+\kappa\sin^2\omega\right)}\bar{\partial}^{\pm}\sin\omega, \tag{2.9}$$

其中$\kappa=\dfrac{\rho p''(\rho)}{2p'(\rho)}$，由(1.3)知，$\rho$是$\sin\omega$的函数，所以有$\rho=\rho(\sin\omega)$，$\kappa=\kappa(\sin\omega)$。令$\sin\omega=\varpi$，则

$$\begin{cases}\bar{\partial}^{+}\theta+\dfrac{\kappa\cos\omega}{1+\kappa\varpi^2}\bar{\partial}^{+}\varpi=0,\\ \bar{\partial}^{-}\theta-\dfrac{\kappa\cos\omega}{1+\kappa\varpi^2}\bar{\partial}^{-}\varpi=0.\end{cases} \tag{2.10}$$

为了将系统线性化，引入变换

$$\Xi=\int_0^{\varpi}\frac{1}{2\varpi\left(1+\kappa\varpi^2\right)}\mathrm{d}\varpi. \tag{2.11}$$

由(2.11)知

$$\bar{\partial}^{i}\varpi=2\varpi\left(1+\kappa\varpi^2\right)\bar{\partial}^{i}\Xi,\quad i=0,\pm \tag{2.12}$$

于是

$$\begin{cases}\bar{\partial}^{+}\theta+\kappa\sin(2\omega)\bar{\partial}^{+}\Xi=0,\\ \bar{\partial}^{-}\theta-\kappa\sin(2\omega)\bar{\partial}^{-}\Xi=0.\end{cases} \tag{2.13}$$

由于

$$\bar{\partial}^{-}\bar{\partial}^{+}-\bar{\partial}^{+}\bar{\partial}^{-}=\frac{\cos(2\omega)\bar{\partial}^{-}\alpha-\bar{\partial}^{+}\beta}{\sin(2\omega)}\bar{\partial}^{+}+\frac{\cos(2\omega)\bar{\partial}^{+}\beta-\bar{\partial}^{-}\alpha}{\sin(2\omega)}\bar{\partial}^{-} \tag{2.14}$$

因此

$$\begin{cases}\bar{\partial}^{-}U=\dfrac{\kappa+1}{\cos^2\omega}U^2+\left(\dfrac{\cos(2\omega)\left[\kappa\cos(2\omega)-1\right]}{\cos^2\omega}-2\kappa'\rho\right)UV,\\ \bar{\partial}^{+}V=\dfrac{\kappa+1}{\cos^2\omega}V^2+\left(\dfrac{\cos(2\omega)\left[\kappa\cos(2\omega)-1\right]}{\cos^2\omega}-2\kappa'\rho\right)UV,\end{cases} \tag{2.15}$$

其中$U=\bar{\partial}^{+}\Xi$，$V=\bar{\partial}^{-}\Xi$。

2.2. 主要结论

给定一个光滑曲线$\widehat{BC}:y=\varphi(x)$满足$x_1\le x\le x_2$，假定在其上边界值$(\theta,\varpi)\big|_{\widehat{BC}}=\left(\hat{\theta},\hat{\varpi}\right)(x)$满足

$$\varphi(x)\in C^3\left(\left[x_1,x_2\right]\right),\quad \hat{\theta}\in C^3\left(\left[x_1,x_2\right]\right),\quad \hat{\varpi}=1 \tag{2.16}$$

从(2.16)中我们可以知道$\widehat{BC}$是音速曲线，对于光滑曲线$\widehat{AB}:x=\psi(y)\left(y\in\left[y_A,y_B\right]\right)$满足$x_B=\psi(y_B)$，我们假设在曲线$\widehat{AB}$上的值$(\theta,\varpi)\big|_{\widehat{AB}}=\left(\tilde{\theta},\tilde{\varpi}\right)(x)$满足

$$\begin{aligned}&\psi(y)\in C^4\left(\left[y_A,y_B\right]\right),\quad \tilde{\theta}(y)=\operatorname{arccot}\psi'(y)-\arcsin\tilde{\varpi}(y),\quad \tilde{\varpi}(y_B)=1,\\ &\arcsin\tilde{\varpi}(y)-G\left(\tilde{\varpi}(y)\right)=\operatorname{arccot}\psi'(y)-\left[\hat{\theta}(x_B)+G\left(\hat{\varpi}(x_B)\right)\right],\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $G=G(\varpi)=\int\frac{\sqrt{1-\varpi^2}}{\kappa+\varpi^2}\mathrm{d}\varpi$。从(2.17)中得知 $\widehat{AB}$ 是正特征曲线。

定理 1 给定两条光滑曲线 $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{AB}$ 满足(2.16)和(2.17)，假设 $\psi'(y_B)<0$，$\hat{\theta}'(x_B)<0$ 和 $(\varphi'\sin\hat{\theta}+\cos\hat{\theta})(x_B)>0$，则带有条件的系统(2.10)在 B 点附近有一个经典超音速解。

我们首先核查在 B 点的相容性，对于 θ 有

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(B)&=\operatorname{arccot}\psi'(B)-\arcsin\tilde{\varpi}\\&=\hat{\theta}(B)+G(\hat{\varpi}(B))-G(\hat{\varpi}(B))=\hat{\theta}(B).\end{aligned}$$

接下来我们证明(2.10)的第二个方程在 B 点成立。由(2.17)得 $\tilde{\theta}(y)=-\frac{\sqrt{1-\varpi^2}}{\kappa+\varpi^2}\tilde{\varpi}'(y)$，因而有 $\tilde{\theta}'(B)=0$，这表明 $\bar{\partial}^{+}\theta(B)=0$，回顾 $\bar{\partial}^{\pm}$ 的定义有

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^{-}\theta(B)&=\cos(\theta(B)-\omega(B))\theta_x(B)+\sin(\theta(B)-\omega(B))\theta_y(B)\\&=-\cos(\theta(B)+\omega(B))\theta_x(B)-\sin(\theta(B)+\omega(B))\theta_y(B)\\&=-\bar{\partial}^{+}\theta(B)=0.\end{aligned}$$

又因为由于 $\cos\omega(B)=0$，因此由(2.10)的第二个方程知 $\bar{\partial}^{-}\theta(B)=0$。所以相容性成立。

接下来讨论 (U,V) 在 $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{AB}$ 的值。由(2.12)有

$$\begin{aligned}U|_{\widehat{BA}}&=\frac{\bar{\partial}^{+}\varpi}{2\varpi(1+\kappa\varpi^2)}\bigg|_{\widehat{BA}}=\frac{\sin\alpha|_{\widehat{BA}}}{2\tilde{\varpi}(1+\kappa\varpi^2)}\tilde{\varpi}'\\&=\frac{\tilde{\varpi}'}{2\tilde{\varpi}(1+\kappa\varpi^2)\sqrt{1+(\psi')^2}}=:\tilde{b}_0(y).\end{aligned}$$

显然 $\tilde{b}_0\in C^2[y_A,y_B]$。进而，由(2.6)知在 $\widehat{BC}$ 上有 $\bar{\partial}^{+}\Xi+\bar{\partial}^{-}\Xi=0$ 和 $\bar{\partial}^{+}\Xi-\bar{\partial}^{-}\Xi=-\frac{\bar{\partial}^{0}\theta}{\kappa\sin\omega}$。

因而

$$U|_{\widehat{BC}}=\bar{\partial}^{+}\Xi|_{\widehat{BC}}=-\frac{\bar{\partial}^{0}\theta}{2\kappa}\bigg|_{\widehat{BC}},\quad V|_{\widehat{BC}}=\bar{\partial}^{-}\Xi|_{\widehat{BC}}=\frac{\bar{\partial}^{0}\theta}{2\kappa}\bigg|_{\widehat{BC}}.\tag{2.18}$$

由于 $\bar{\partial}^{\perp}\theta=-\kappa(U+V)\cos\omega$ 知 $\bar{\partial}^{\perp}\theta|_{\widehat{BC}}=0$，又因为 $\theta(x,\varphi(x))=\hat{\theta}(x)$，可得

$$\theta_x(x,\varphi(x))=\frac{\hat{\theta}'\cos\hat{\theta}}{\varphi'\sin\hat{\theta}+\cos\hat{\theta}},\quad\theta_y(x,\varphi(x))=\frac{\hat{\theta}'\sin\hat{\theta}}{\varphi'\sin\hat{\theta}+\cos\hat{\theta}}.\tag{2.19}$$

进而

$$U|_{\widehat{BC}}=-V|_{\widehat{BC}}=-\frac{\bar{\partial}^{0}\theta}{2\kappa}\bigg|_{\widehat{BC}}=-\frac{\hat{\theta}'}{2\kappa(\varphi'\sin\hat{\theta}+\cos\hat{\theta})}=:-\hat{a}_0(x).\tag{2.20}$$

由(2.16)得 $\hat{a}_0\in C^2[x_B,x_C]$。由上述求导过程我们知道 $\tilde{b}_0(x_B)=-\hat{a}_0(x_B)$，由于 $\kappa>0$，不难证明存在两个很小的常数 $\varepsilon_0>0$ 和 $\delta_0>0$ 满足

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}'(x)\le-\varepsilon_0,\ \hat{a}_0(x)\le-\varepsilon_0,\ \forall x\in[x_B,x_B+\delta_0],\\&\psi''(y)\le\varepsilon_0,\ \tilde{b}_0(y)\ge\varepsilon_0,\ \forall y\in[y_B-\delta_0,y_B].\end{aligned}\tag{2.21}$$

不失一般性，上述不等式(2.21)对 $x\in[x_B,x_C]$，$y\in[y_A,y_B]$ 均成立。

3. 部分速度图上的问题

本节通过引入变换将原系统(2.15)转化为新的线性系统，并将问题转化到新坐标(t,r)平面上。

3.1. 在新坐标平面上的主要问题

引入变换

$$t=\cos\omega(x,y),\quad r=\theta(x,y). \tag{3.1}$$

其 Jacobi 行列式

$$J=\frac{\partial(t,r)}{\partial(x,y)}=\kappa\sin\omega\left(\bar{\partial}^{+}\omega\bar{\partial}^{-}\Xi+\bar{\partial}^{-}\omega\bar{\partial}^{+}\Xi\right)=\frac{4\kappa\left(1-t^{2}\right)\left(\kappa+1-\kappa t^{2}\right)}{t}UV, \tag{3.2}$$

显然，在$\widehat{BC}$和$\widehat{AB}$上 Jacobi 行列式始终不为 0。在(t,r)的变换下

$$\bar{\partial}^{+}=-\frac{2F}{t}U\partial_{t}-2\kappa\sqrt{1-t^{2}}Ut\partial_{r},\quad \bar{\partial}^{-}=-\frac{2F}{t}V\partial_{t}+2\kappa\sqrt{1-t^{2}}Vt\partial_{r}, \tag{3.3}$$

其中$F=F(t)=\left(1-t^{2}\right)\left(\kappa+1-\kappa t^{2}\right)$，因而

$$\begin{cases}U_{t}-\dfrac{\kappa\sqrt{1-t^{2}}t^{2}}{F}U_{r}=-\dfrac{(\kappa+1)U}{2FV}\dfrac{U+V}{t}+\dfrac{2\kappa+1-2\kappa t^{2}+\kappa'\rho}{F}Ut,\\[2mm] V_{t}+\dfrac{\kappa\sqrt{1-t^{2}}t^{2}}{F}V_{r}=-\dfrac{(\kappa+1)V}{2FU}\dfrac{U+V}{t}+\dfrac{2\kappa+1-2\kappa t^{2}+\kappa'\rho}{F}Vt.\end{cases} \tag{3.4}$$

其中$\rho=\rho(t)$，$\kappa=\kappa(t)$。

我们接下来我们讨论系统(3.4)在新平面上的边界条件，由于在$\widehat{BC}$上$\hat{\theta}'(x)<0$，因而光滑曲线$r=\hat{\theta}(x)$是严格递减函数，因此存在一个反函数，我们定义为$x=\hat{x}(r)\left(r\in\left(r_{1},r_{2}\right]\right)$，其中$r_{1}=\hat{\theta}(x_{C})$，$r_{2}=\hat{\theta}(x_{B})$，我们把$\widehat{BC}$在新平面上的部分称为$\widehat{B'C'}$，同理由于$\psi''(y)<0$可知对$r=\tilde{\theta}(y)$存在反函数$y=\tilde{y}(r)\left(r\in\left[r_{2},r_{3}\right)\right)$，其中$r_{3}=\hat{\theta}(y_{A})$，我们把$\widehat{BA}$在新平面上的部分称为$\widehat{B'A'}$，因此有$U|_{\widehat{B'A'}}=\tilde{b}_{0}(\tilde{y}(r))$。通过简单的计算我们可以验证曲线$\widehat{B'A'}$是系统(3.4)的正特征曲线，具体由下式定义

$$r=r_{2}+\int_{0}^{t}\frac{\kappa\sqrt{1-t^{2}}t^{2}}{F}\mathrm{d}t=:\overline{r}(t). \tag{3.5}$$

除此之外，对于光滑解，由(3.4)得到

$$U_{t}\big|_{t=0}=\frac{U+V}{2t}\bigg|_{t=0},\quad V_{t}\big|_{t=0}=\frac{U+V}{2t}\bigg|_{t=0} \tag{3.6}$$

由(2.6)知$U+V=2t\bar{\partial}^{0}\Xi$，所以需要得到$\bar{\partial}^{0}\Xi$的值。由(2.12)可得

$$\bar{\partial}^{0}\Xi\big|_{\widehat{BC}}=\frac{1}{2(\kappa+1)}\left(\bar{\partial}^{0}\varpi\right)\Big|_{\widehat{BC}}, \tag{3.7}$$

结合(2.6)和(2.10)可得

$$\bar{\partial}^{0}\theta+\frac{\kappa\varpi}{1+\kappa\varpi^{2}}\bar{\partial}^{\perp}\varpi=0. \tag{3.8}$$

于是

$$\bar{\partial}^{\perp}\varpi\big|_{\widehat{BC}}=-\frac{\kappa+1}{\kappa}\bar{\partial}^{0}\theta\big|_{\widehat{BC}}=-2(\kappa+1)a_{0}(x), \tag{3.9}$$

又因为$\widehat{B'C'}$上$\varpi\equiv 1$，因而

$$\left(\partial_x\varpi\right)\Big|_{\widehat{BC}}=\frac{2(\kappa+1)\hat{a}_0\varphi'}{\cos\hat{\theta}+\varphi'\sin\hat{\theta}}(x),\quad \left(\partial_y\varpi\right)\Big|_{\widehat{BC}}=\frac{-2(\kappa+1)\hat{a}_0}{\cos\hat{\theta}+\varphi'\sin\hat{\theta}}(x). \tag{3.10}$$

所以

$$\bar{\partial}^0\Xi\Big|_{\widehat{BC}}=\frac{\varphi'\cos\hat{\theta}-\sin\hat{\theta}}{\varphi'\sin\hat{\theta}+\cos\hat{\theta}}\hat{a}_0(x)=:\hat{a}_1(x). \tag{3.11}$$

可知

$$\begin{aligned}&U(0,r)=-V(0,r)=-\hat{a}_0(r),\ U_t(0,r)=V_t(0,r)=\hat{a}_1(r),\ 在\widehat{B'C'}上\\&U(t,\bar{r}(t))=\bar{b}_0(t),\ 在\widehat{B'A'}上\end{aligned} \tag{3.12}$$

由(2.16)，(2.17)和(2.21)得知

$$\hat{a}_0\in C^2\left(\left(r_1,r_2\right]\right),\ \hat{a}_1\in C^2\left(\left(r_1,r_2\right]\right),\ \bar{b}_0\in C^2\left(\left[0,t_0\right)\right),\ \hat{a}_0\le-\varepsilon_0,\ \bar{b}_0\ge\varepsilon_0, \tag{3.13}$$

其中$t_0=\sqrt{1-\tilde{\varpi}^2(A)}$，容易验证系统以及$\hat{a}_0$，$\hat{a}_1$和$\bar{b}_0$满足在$B'$点的相容性。

问题 2 在假设(3.13)成立的情况下，我们寻找一个带有条件(3.12)的系统(3.4)在$B'(0,r_2)$附近$t>0$时的一个局部经典解。

定理 2 在(3.13)满足的情况下，带有条件(3.12)的系统(3.4)在$B'(0,r_2)$附近有唯一的经典解。

3.2. 线性系统及新平面上的高阶项

令

$$\bar{U}=\frac{1}{U},\quad \bar{V}=-\frac{1}{V}. \tag{3.14}$$

将(3.4)转化成线性系统

$$\begin{cases}\bar{U}_t-\dfrac{\kappa\sqrt{1-t^2}t^2}{F}\bar{U}_r=\dfrac{\bar{U}-\bar{V}}{2t}+\dfrac{2\kappa+1-\kappa t^2}{2F}\left(\bar{U}-\bar{V}\right)t-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa t^2+\kappa'\rho}{F}\bar{U}t,\\ \bar{V}_t+\dfrac{\kappa\sqrt{1-t^2}t^2}{F}\bar{V}_r=\dfrac{\bar{V}-\bar{U}}{2t}-\dfrac{2\kappa+1-\kappa t^2}{2F}\left(\bar{U}-\bar{V}\right)t-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa t^2+\kappa'\rho}{F}\bar{V}t.\end{cases} \tag{3.15}$$

进而，我们令

$$\tau=t,\ z=\bar{r}(t)-r, \tag{3.16}$$

重写系统(3.15)得

$$\begin{cases}\tilde{U}_\tau+\dfrac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}\tau^2}{F}\tilde{U}_z=\dfrac{\tilde{U}-\tilde{V}}{2\tau}+\dfrac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(\tilde{U}-\tilde{V}\right)\tau-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}\tilde{U}\tau,\\ \tilde{V}_\tau=\dfrac{\tilde{V}-\tilde{U}}{2\tau}-\dfrac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(\tilde{U}-\tilde{V}\right)\tau-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}\tilde{V}\tau.\end{cases} \tag{3.17}$$

其中$F=F(\tau)$，$\rho=\rho(\tau)$，$\kappa=\kappa(\tau)$，$\tilde{U}(\tau,z)=\bar{U}(\tau,\bar{r}(\tau)-z)$和$\tilde{V}(\tau,z)=\bar{V}(\tau,\bar{r}(\tau)-z)$。

结合(3.12)可知其边界条件为

$$\begin{aligned}&\tilde{U}(0,z)=\tilde{V}(0,z)=a_0(z),\\&\tilde{U}_t(0,z)=-\tilde{V}_t(0,z)=-a_1(z),\quad \tau=0,\ 0\le z\le r_2-r_1,\\&\tilde{U}(\tau,0)=b_0(\tau),\quad z=0,\ 0\le\tau\le t_0,\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中 $a_0(z)=-\dfrac{1}{\hat{a}_0(r_2-z)}$，$a_1(z)=\dfrac{\hat{a}_1(r_2-z)}{\hat{a}_0^2(r_2-z)}$，$b_0(\tau)=\dfrac{1}{\overline{b_0}(\tau)}$，并满足在 $\tau=0$ 时的相容性条件。

接下来为了简化系统，令

$$R=\bar{U}-a_0(z)+a_1(z)\tau,\quad S=\bar{V}-a_0(z)-a_1(z)\tau.\tag{3.19}$$

因此

$$\begin{aligned}&R(0,z)=S(0,z)=R_\tau(0,z)=S_\tau(0,z)=0,\forall z\in[0,r_2-r_1),\\&R(\tau,0)=b_1(\tau),\forall\tau\in[0,t_0),\end{aligned}\tag{3.20}$$

其中的 $b_1(\tau)=b_0(\tau)-a_0(0)+a_1(0)\tau$，容易得到 $b_1(0)=b_1'(0)=0$。系统(3.15)化为

$$\begin{cases}R_\tau+\dfrac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}\tau^2}{F}R_z=\dfrac{R-S}{2\tau}+\dfrac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}(R-S)\tau-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}R\tau+F_1(\tau,z)\tau,\\ S_\tau=\dfrac{S-R}{2\tau}-\dfrac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}(R-S)\tau-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}S\tau+F_2(\tau,z)\tau.\end{cases}\tag{3.21}$$

其中

$$\begin{aligned}&F_1(\tau,z)=-\frac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}}{F}(a_0'-a_1'\tau)\tau-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}a_0-\frac{\kappa\tau^2-\kappa'\rho}{F}a_1\tau,\\&F_2(\tau,z)=\frac{\kappa\tau^2-\kappa'\rho}{F}a_1\tau-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}a_0.\end{aligned}$$

显然 F_1 和 F_2 都有关于 z 的连续导数，因此问题 2 转化成了线性退化初始特征问题(3.20) (3.21)，这两个特征值分别为

$$\lambda_-=0,\quad \lambda_+=\frac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}\tau^2}{F},\tag{3.22}$$

由 $z=\bar{z}(\tau)$ 定义的通过原点的正特征曲线为

$$\bar{z}(\tau)=\int_0^\tau\frac{2\kappa\sqrt{1-s^2}s^2}{F(s)}\mathrm{d}s.\tag{3.23}$$

定义区域 $\Omega:\{(\tau,z)|0\le\tau\le\delta,0\le z\le\delta\}$，其中 δ 是常数且 $\delta>0$。对于 $\forall(\xi,\eta)\in\Omega$，我们沿着特征线对系统(3.21)积分可得

$$\begin{aligned}&S(\xi,\eta)=\int_0^\xi\left\{\frac{S-R}{2\tau}-\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}(R-S)\tau-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}S\tau+F_2(\tau,z)\tau\right\}(\tau,z_-(\tau))\mathrm{d}\tau,\\&R(\xi,\eta)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\xi\left\{\frac{R-S}{2\tau}+\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}(R-S)\tau-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}R\tau+F_1(\tau,z)\tau\right\}(\tau,z_+(\tau))\mathrm{d}\tau,\\ \qquad\qquad\eta\ge\bar{z}(\xi),\quad\xi\ge0,\\ \displaystyle\int_{\xi_1}^\xi\left\{\frac{R-S}{2\tau}+\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}(R-S)\tau-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}R\tau+F_1(\tau,z)\tau\right\}(\tau,z_+(\tau))\mathrm{d}\tau\\ \quad+b_1(\xi_1),\qquad\qquad 0\le\eta\le\bar{z}(\xi),\quad\xi\ge0,\end{cases}\end{aligned}\tag{3.24}$$

这里的 $z_+(\tau)=z_+(\tau;\xi,\eta)$， $z_-(\tau)=z_-(\tau;\xi,\eta)$ 分别是沿着点 (ξ,η) 的正负特征线，其中 ξ_1 由下式定义

$$\eta=\int_{\xi_1}^{\xi}\frac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}\tau^2}{F(\tau)}\mathrm{d}\tau. \tag{3.25}$$

通过迭代确定(3.24)解的存在性。定义 $R^{(0)}(t,r)=S^{(0)}(t,r)\equiv 0$，对 $R^{(m)}(\tau,z)$， $S^{(m)}(\tau,z)$ 有

$$\begin{aligned}S^{(m)}(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}\Big\{&\frac{S^{(m-1)}-R^{(m-1)}}{2\tau}-\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(R^{(m-1)}-S^{(m-1)}\right)\tau\\&-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}S^{(m-1)}\tau+F_2(\tau,z)\tau\Big\}(\tau,z_-(\tau))\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

$$R^{(m)}(\xi,\eta)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\xi}\Big\{\frac{R^{(m-1)}-S^{(m-1)}}{2\tau}+\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(R^{(m-1)}-S^{(m-1)}\right)\tau\\ \displaystyle-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}R^{(m-1)}\tau+F_1(\tau,z)\tau\Big\}(\tau,z_+(\tau))\mathrm{d}\tau,\quad \eta\ge\bar{z}(\xi),\ \xi\ge 0,\\ \displaystyle\int_{\xi_1}^{\xi}\Big\{\frac{R^{(m-1)}-S^{(m-1)}}{2\tau}+\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(R^{(m-1)}-S^{(m-1)}\right)\tau\\ \displaystyle-\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}R^{(m-1)}\tau+F_1(\tau,z)\tau\Big\}(\tau,z_+(\tau))\mathrm{d}\tau+b_1(\xi_1),\quad 0\le\eta\le\bar{z}(\xi),\ \xi\ge 0,\end{cases} \tag{3.26}$$

现应证明序列 $\left\{\left(R^{(m)},S^{(m)}\right)\right\}$ 在 $\Omega(\delta>0)$ 内一致收敛。

4. 在新平面解的存在性

本节主要证明了一些关键的引理，通过这些引理可得所研究系统的解的存在性。

4.1. 一些引理的证明

由于 δ 足够小，存在只依赖于 a_0 和 a_1 的常数 M，使得对 $(t,r)\in\bar{D}_\delta$ 有

$$\begin{aligned}&0\le\left|\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}\right|\le 2,\ 0\le\left|\frac{\kappa\sqrt{1-\tau^2}}{F}\right|\le 1,\\&|F_1|+|F_{1z}|+|F_2|+|F_{2z}|\le M.\end{aligned} \tag{4.1}$$

令 $P(\xi,\eta)\in\Omega$，由 b_1 的表达式可得，对于 $\eta\le\bar{z}(\xi)$，有

$$b_1(\xi_1)\le\frac{M}{2}\xi_1^2\le\frac{M}{2}\xi^2. \tag{4.2}$$

除此之外我们也能得到关于 $\left|z_+(\tilde{\xi})-z_-(\tilde{\xi})\right|$ 的估计

$$\begin{aligned}\left|z_+(\tilde{\xi})-z_-(\tilde{\xi})\right|&=\left|r_+(\tilde{\xi};\xi,\eta)-r_-(\tilde{\xi};\xi,\eta)\right|\\&\le\left|\int_0^{\xi}\frac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}\tau^2}{F(\tau)}\mathrm{d}\tau\right|\le\frac{2}{3}\xi^3.\end{aligned} \tag{4.3}$$

对 $\forall\tilde{\xi}\in[0,\xi]$ 成立，对于 $\eta\ge\bar{z}(\xi)$ 也有同样的结果。接下来证明以下引理。

引理 4.1 对于 $\forall m\ge 1$，下列不等式在 $\bar{D}_\delta$ 中成立

$$\begin{cases}\left|R^{(m)}(\xi,\eta)\right|;\left|S^{(m)}(\xi,\eta)\right|\le M\xi^2\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j,\\ \left|R^{(m)}(\xi,\eta)-S^{(m)}(\xi,\eta)\right|\le M\xi^2\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j.\end{cases}\tag{4.4}$$

证明：我们使用数学归纳法来证明此引理。对$\left|R^{(m)}(\xi,\eta)\right|$的证明分为两部分，我们这里仅仅证明$\eta\le\overline{z}(\xi)$的情况，对$\eta\ge\overline{z}(\xi)$以及$\left|S^{(m)}(\xi,\eta)\right|$的情况类似可证明。

当$n=1$时，当$\eta\le\overline{z}(\xi)$有

$$\begin{aligned}\left|R^{(1)}(\xi,\eta)\right|&\le\int_{\xi_1}^{\xi}\left|F_1\tau\right|\mathrm{d}\tau+\left|b_1(\xi_1)\right|\le\int_{\xi_1}^{\xi}M\tau\mathrm{d}\tau+\frac{M}{2}\xi^2\\&\le\frac{M}{2}\left(\xi^2-\xi_1^2\right)+\frac{M}{2}\xi^2\le M\xi^2\sum_{j=0}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^j.\end{aligned}\tag{4.5}$$

为了估计$\left|R^{(m)}(\xi,\eta)-S^{(m)}(\xi,\eta)\right|$，首先估计以下表达式

$$\begin{aligned}&\left|F_1\left(\tau,z_+(\tau;\xi,\eta)\right)-F_2\left(\tau,z_-(\tau;\xi,\eta)\right)\right|\\&\le\frac{2\kappa\sqrt{1-\tau^2}}{F}\left(\left|a_0'\right|+\left|a_1'\right|\tau\right)\tau+\frac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}\left|a_0\left(z_+(\tau;\xi,\eta)\right)-a_0\left(z_-(\tau;\xi,\eta)\right)\right|\\&\quad+\frac{\left|a_1\left(z_+(\tau;\xi,\eta)\right)\right|+\left|a_1\left(z_-(\tau;\xi,\eta)\right)\right|}{F}\tau^3\\&\le2(M+M\tau)\tau+2M\left|z_+(\tau;\xi,\eta)-z_-(\tau;\xi,\eta)\right|+2M\tau^3\\&\le2(M+M\xi)\xi+\frac{4}{3}M^3\xi^3+2M\xi^3\le3M\xi.\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中$\tau\in[\xi_1,\xi]$。接下来估计$\left|R^{(1)}(\xi,\eta)-S^{(1)}(\xi,\eta)\right|$，得到

$$\begin{aligned}&\left|R^{(1)}(\xi,\eta)-S^{(1)}(\xi,\eta)\right|\\&\le\int_{\xi_1}^{\xi}\left\{\left|F_1\left(\tau,z_+(\tau;\xi,\eta)\right)-F_2\left(\tau,z_-(\tau;\xi,\eta)\right)\right|\tau\right\}\mathrm{d}\tau+\int_0^{\xi_1}\left\{\left|F_2\left(\tau,z_-(\tau;\xi,\eta)\right)\right|\tau\right\}\mathrm{d}\tau+\left|b_1(\xi_1)\right|\\&\le\int_{\xi_1}^{\xi}3M\xi\tau\mathrm{d}\tau+\int_0^{\xi_1}M\tau\mathrm{d}\tau+\frac{M}{2}\xi^2\le M^2\xi^2(1+2\delta)\le M\xi^2\sum_{j=0}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^j.\end{aligned}\tag{4.7}$$

假设当$n=m$时成立，当$n=m+1$时

$$\begin{aligned}&\left|R^{(m+1)}(\xi,\eta)\right|\\&\le\int_{\xi_1}^{\xi}\left\{\frac{\left|R^{(m)}-S^{(m)}\right|}{2\tau}+\left|R^{(m)}-S^{(m)}\right|\tau+2\left|R^{(m)}\right|\tau+M\tau\right\}\left(\tau,z_+(\tau)\right)\mathrm{d}\tau+\frac{M}{2}\xi^2\\&\le\int_0^{\xi}\left\{\frac{M}{2}\tau\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j+3M\tau^3\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j+M\tau\right\}\mathrm{d}\tau+\frac{M}{2}\xi^2\\&\le M\xi^2\left[\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{4}+\delta^2\right)+1\right]\le M\xi^2\sum_{j=0}^{m+1}\left(\frac{2}{3}\right)^j.\end{aligned}\tag{4.8}$$

同理

$$\begin{aligned}
&\left|R^{(m+1)}(\xi,\eta)-S^{(m+1)}(\xi,\eta)\right| \\
&\le \int_0^{\xi} 2\frac{\left|R^{(m)}-S^{(m)}\right|}{2\tau}+2\left|R^{(m)}-S^{(m)}\right|\tau+2\left|R^{(m)}\right|\tau+\left|F_1-F_2\right|\tau \mathrm{d}\tau \\
&\le \int_0^{\xi}\left\{M\tau\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j+2M\tau^3\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j+2M\tau^3\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j+3M\xi\tau\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\le M\xi^2\left[\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{2}+\delta^2\right)+2\delta\right]\le M\xi^2\sum_{j=0}^{m+1}\left(\frac{2}{3}\right)^j.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

引理得证。

引理 4.2 对于 $\forall m\ge 1$，下列不等式在 $\bar{D}_\delta$ 中成立

$$\begin{cases}
\left|R^{(m+1)}(\xi,\eta)-R^{(m)}(\xi,\eta)\right|;\left|S^{(m+1)}(\xi,\eta)-S^{(m)}(\xi,\eta)\right|\le M\xi^2\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j, \\
\left|R^{(m+1)}(\xi,\eta)+S^{(m+1)}(\xi,\eta)-R^{(m)}(\xi,\eta)-S^{(m)}(\xi,\eta)\right|\le M\xi^2\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^j.
\end{cases} \tag{4.10}$$

证明：$n=1$ 时在(4.5) (4.7)中已证，假设对 $n=m$ 成立。

当 $n=m+1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|S^{(m+1)}(\xi,\eta)-S^{(m)}(\xi,\eta)\right| \\
&\le \int_0^{\xi}\left\{\frac{\left|S^{(m)}-R^{(m)}-S^{(m-1)}+R^{(m-1)}\right|}{2\tau}+\left|R^{(m)}-S^{(m)}-R^{(m-1)}+S^{(m-1)}\right|\tau\right. \\
&\quad\left.+\left|S^{(m)}-S^{(m-1)}\right|\tau\right\}\left(\tau,z_-(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\
&\le \int_0^{\xi}\left\{\frac{M}{2}\tau\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}+M\tau^3\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}+2M\tau^3\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\le M\xi^2\left(\frac{1}{4}+\delta^2\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\le M\xi^2\left(\frac{2}{3}\right)^m.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

上式对 $\left|R^{(m+1)}(\xi,\eta)-R^{(m)}(\xi,\eta)\right|$ 也成立。

同理

$$\begin{aligned}
&\left|R^{(m+1)}(\xi,\eta)+S^{(m+1)}(\xi,\eta)-R^{(m)}(\xi,\eta)-S^{(m)}(\xi,\eta)\right| \\
&\le \int_0^{\xi}\{2\frac{\left|S^{(m)}-R^{(m)}-S^{(m-1)}+R^{(m-1)}\right|}{2\tau}+2\left|R^{(m)}-S^{(m)}-R^{(m-1)}+S^{(m-1)}\right|\tau \\
&\quad\left.+2\left|S^{(m)}-S^{(m-1)}\right|\tau+2\left|R^{(m)}-R^{(m-1)}\right|\tau\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\le \int_0^{\xi}\left\{M\tau\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}+2M\tau^3\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}+4M\tau^3\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\le M\xi^2\left(\frac{1}{2}+2\delta^2\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\le M\xi^2\left(\frac{2}{3}\right)^m.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

引理证明完成。

4.2. 解的存在性

通过引理 4.1 得到函数列 $\left(R^{(m)},S^{(m)}\right)(\xi,\eta)$ 在 Ω 内一致收敛。显然，由 $\left(R^{(m)},S^{(m)}\right)$ 定义的极限函数 (R,S) 是连续的，由(4.4)得知 (R,S) 满足

$$\left|R(\xi,\eta)\right|\le 3M\xi^2,\quad \left|S(\xi,\eta)\right|\le 3M\xi^2,\quad \left|R(\xi,\eta)-S(\xi,\eta)\right|\le 3M\xi^2 \tag{4.13}$$

容易得到极限函数 (R,S) 满足该系统(3.24)和 $R(0,\eta)=S(0,\eta)=0$。同时也可以得到边界条件 $R_\xi(0,\eta)=S_\xi(0,\eta)=0$。显然，$R(\xi,\eta)$ 和 $S(\xi,\eta)$ 有关于 ξ 一阶连续偏导，为了确定 $\left(R_\eta,S_\eta\right)$ 在 $\xi=0$ 附近的存在性，考虑对 η 求导的该系统的积分形式

$$\begin{cases} R_\eta^{(m)}(\xi,\eta)=\displaystyle\int_0^\xi\left\{\frac{R_z^{(m-1)}-S_z^{(m-1)}}{2\tau}+\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(R_z^{(m-1)}-S_z^{(m-1)}\right)\tau\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}R_z^{(m-1)}\tau+F_{1z}(\tau,z)\tau\right\}\left(\tau,\dfrac{\partial z_+}{\partial\eta}(\tau,z_+(\tau))\right)\mathrm{d}\tau, \\ S_\eta^{(m)}(\xi,\eta)=\displaystyle\int_0^\xi\left\{\frac{S_z^{(m-1)}-R_z^{(m-1)}}{2\tau}-\frac{2\kappa+1-\kappa\tau^2}{2F}\left(R_z^{(m-1)}-S_z^{(m-1)}\right)\tau\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{2\kappa+1-2\kappa\tau^2+\kappa'\rho}{F}S_z^{(m-1)}\tau+F_{2z}(\tau,z)\tau\right\}\left(\tau,\dfrac{\partial z_-}{\partial\eta}(\tau,z_-(\tau))\right)\mathrm{d}\tau. \end{cases} \tag{4.14}$$

其中 $\dfrac{\partial z_\pm}{\partial\eta}(\tau;\xi,\eta)=\exp\left(\displaystyle\int_\xi^\tau\frac{\partial\lambda_\pm}{\partial z}\left(s,z_\pm(s;\xi,\eta)\right)\mathrm{d}s\right)$。由于 $\dfrac{\partial\lambda_\pm}{\partial z}\equiv 0$，所以 $\dfrac{\partial z_\pm}{\partial\eta}=1$。

上述证明与前面类似，所以 $\left(R_\eta^{(m)},S_\eta^{(m)}\right)(\xi,\eta)$ 一致收敛。这表明 $\left(R_\eta,S_\eta\right)(\xi,\eta)$ 是连续的，进而 $R_\eta(0,\eta)=S_\eta(0,\eta)=0$。因此可以得到 (R,S) 是 C^1 函数。由于满足(3.24)的 (R,S) 有微分性质，因此系统(3.21)有解。

接下来证明解的唯一性，令 (R_1,S_1) 和 (R_2,S_2) 都是系统(3.21)的解，定义 $\tilde R=R_2-R_1$ 和 $\tilde S=S_2-S_1$，则 $\left(\tilde R,\tilde S\right)$ 也满足类似于(4.10)的积分方程，即也满足不等式(4.10)，则有 $\left|\tilde R\right|\le\tilde M\left(\dfrac{2}{3}\right)^m$ 和 $\left|\tilde S\right|\le\tilde M\left(\dfrac{2}{3}\right)^m$，对任意的 $m,\tilde M$ 是正的常数。因此 $\tilde R=\tilde S\equiv 0$。

最后，指出带有条件(3.20)的系统(3.21)等价于柯西问题(3.4) (3.12)，因此完成了(3.4)解的存在性的证明。

5. 初始平面上的解

本节将 (t,r) 平面上的解回到 (x,y) 平面上。将验证它是问题 1 的解，于是可以得到定理 1。

通过对(3.1)的变形，可得

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\theta_y}{J},\quad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\theta_x}{J},\quad \frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\sin\omega\omega_y}{J},\quad \frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{\sin\omega\omega_x}{J}, \tag{5.1}$$

其中 J 是由(3.2)定义的 Jacobi 变换的变形。结合(2.6)，(2.12)和(2.13)，可以得到 x_t,y_t 以及 x_r,y_r 的值，因此可以得到

$$\frac{\mathrm{d}x\left(t,r_-(t)\right)}{\mathrm{d}t}=-\frac{t\cos r+\sqrt{1-t^2}\sin r}{2F(t)V(t,r)}t,\quad \frac{\mathrm{d}y\left(t,r_-(t)\right)}{\mathrm{d}t}=-\frac{t\sin r-\sqrt{1-t^2}\cos r}{2F(t)V(t,r)}t. \tag{5.2}$$

通过对上式积分，可以得到(x, y)的值，因此可以验证系统(1.3)成立，以及u和v是问题1的解。

参考文献

[1] Li, J.Q. and Zheng, Y.X. (2010) Interaction of Four Rarefaction Waves in the Bi-Symmetric Class of the Two-Dimensional Euler Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **296**, 303-321. https://doi.org/10.1007/s00220-010-1019-6

[2] Hu, Y.B. and Li, J.Q. (2020) Sonic-Supersonic Solutions for the Two-Dimensional Steady Full Euler Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **235**, 1819-1871. https://doi.org/10.1007/s00205-019-01454-w

[3] Zhang, T. and Zheng, Y. (2014) Sonic-Supersonic Solutions for the Steady Euler Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **63**, 1785-1817. https://doi.org/10.1512/iumj.2014.63.5434

[4] 张天佑, 郑玉玺. 拟平稳 Euler 方程古典音速-超音速解的存在性[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(10): 1367-1384.

[5] Li, F.Y. and Hu, Y.B. (2019) On a Degenerate Mixed-Type Boundary Value Problem to the 2-D Steady Euler Equation. *Journal of Differential Equations*, **267**, 6265-6289. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.06.022