**Pure Mathematics** 理论数学, 2023, 13(7), 1953-1958
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137201

Hans汉斯

# Steiner对称化后对偶混合体积部分性质

**李朝衡**

重庆工商大学，数学与统计学院，重庆

收稿日期：2023年6月5日；录用日期：2023年7月10日；发布日期：2023年7月17日

## 摘 要

**在本文中，我们探讨对偶混合体的性质，考虑在星体的径向加法下，星体经过Steiner对称化后做加法与先加后做Steiner对称化两者之间的包含关系，继而利用包含性来得到星体经过Steiner对称化后相应的对偶混合体积性质，最后利用高斯球逼近定理构建单调序列来证明特殊星体的对偶Minkowski不等式。**

## 关键词

**径向加法，对偶混合体积，Steiner对称化，对偶Minkowski不等式**

# Partial Properties of Dual Mixed Volumes by Steiner Symmertrization

**Chaoheng Li**

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Received: Jun. 5th, 2023; accepted: Jul. 10th, 2023; published: Jul. 17th, 2023

## Abstract

**In this paper, we study the property of the dual mixed volumes, and consider the inclusive relationships between the radial addition of the star bodies after Steiner symmetrization and the symmetrization after doing the addition first. Then we use the inclusion to gain the trend of the dual mixed volumes after symmetrization. Finally, the Gaussian sphere approximation theorem is used to construct monotone sequences to prove the dual Minkowski inequality for special star bodies.**

## Keywords

**Radial Addition, Dual Mixed Volumes, Steiner Symmetrization, Dual Minkowski Inequality**

文章引用: 李朝衡. Steiner 对称化后对偶混合体积部分性质[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 1953-1958.
DOI: 10.12677/pm.2023.137201

## 1. 引言

Steiner 对称化是由 Steiner [1]提出的概念，用于证明等周不等式。一个多世纪以来，Steiner [2] [3] [4] [5]对称化在等周不等式和相关几何不等式问题的证明上发挥了重要作用；戴进[6]使用 Steiner 对称化研究混合体积并证明了混合体积的 Minkowski 不等式；类似地，我们使用 Steiner 对称化来研究对偶 Minkowski 不等式和对偶混合体积；E. Lutwak [7] [8]提出了对偶混合体积的定义和相关的经典不等式。

本文中，我们试图通过 Steiner 对称化来获得对偶混合体积的不等式关系；利用该关系，经有限次数的 Steiner 对称化后构建单调序列，对特殊的星体证明对偶 Minkowski 不等式，我们用 $\ell^n$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 中星体(见第 2 部分)的集合。

**定理 1** 如果 $K,L\in\ell^n$，$u\in S^{n-1}$，则 $\left(K\tilde{+}L\right)/u^{\perp}\subseteq K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}$。

**定理 2** 如果 $K,L\in\ell^n$，且 $K$ 与 $L$ 互为膨胀，有 $\tilde{V}_1\left(K,L\right)^n\le V\left(K\right)^{n-1}V\left(L\right)$。

## 2. 准备工作

我们记 $\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维欧式空间，用 $B^n$，$S^{n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球体和单位球面，$\kappa_n$ 表示 $V\left(B^n\right)$。$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $C$ 是凸的，如果对于任意两个点 $x,y\in C$，连接它们的线段 $\left[x,y\right]$ 包含在 $C$ 中，即：$0<\lambda<1$，$\left(1-\lambda\right)x+\lambda y\in C$；具有非空内部的紧凸集称为凸体，用 $C^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体的集合。$\mathbb{R}^n$ 中集合 $K$ 的点 $z$，如果通过 $z$ 的每条线与 $K$ 的交是线段，称 $K$ 相对于点 $z$ 是星型的；相对于原点来说，与 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集(星型的) $K$ 相关联的是其径向函数 $\rho\left(K,\cdot\right)$，定义在 $S^{n-1}$ 上，对于 $u\in S^{n-1}$

$$\rho\left(K,u\right):=Max\left\{\lambda\ge 0:\lambda u\in K\right\}, \tag{1.1}$$

对于 $K$ 的径向函数，我们用 $\rho_K$ 来代替 $\rho\left(K,\cdot\right)$，如果 $\rho_K$ 是连续的，$K$ 称作星体。我们用 $\ell^n$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 中星体的集合，显然 $K,L\in\ell^n$ 时，$K\subset L$ 当且仅当 $\rho_K\le\rho_L$。

由 E. Lutwak [8]，我们介绍一种定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量加法，称之为径向加法。如果 $x_1+\cdots+x_r\in\mathbb{R}^n$，则 $x_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}x_r$ 被定义为 $x_1,\cdots,x_r$ 的向量和，其中 $x_1,\cdots,x_r$ 都位于 $\mathbb{R}^n$ 中的 1 维子空间中，否则都为零向量。

如果 $K_1,\cdots,K_r\in\ell^n$，并且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\mathbb{R}$，那么径向 Minkowski 线性组合 $\lambda_1K_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}\lambda_rK_r$ 被定义为

$$\lambda_1K_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}\lambda_rK_r:=\left\{\lambda_1x_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}\lambda_rx_r:x_i\in K_i\right\}, \tag{1.2}$$

我们将这种加法称之为径向 Minkowski 加。我们注意到，对于凸体来说，径向 Minkowski 乘法跟 Minkowski 标量乘法是一致的；虽然对于向量的径向加法是不一致的，但是对于 $\ell^n$ 上的径向 Minkowski 加法却是相关的，对于 $K,L\in\ell^n$ 且 $\alpha,\gamma\ge 0$ 有：

$$\alpha\left(K\tilde{+}L\right)=\alpha K\tilde{+}\alpha L,\ \left(\alpha\tilde{+}\gamma\right)K=\alpha K\tilde{+}\gamma K, \tag{1.3}$$

容易验证当 $K,L\in\ell^n$ 且 $\alpha,\gamma\ge 0$ 有

$$\rho\left(\alpha K\tilde{+}\gamma L,\cdot\right)=\alpha\rho\left(K,\cdot\right)+\gamma\rho\left(L,\cdot\right), \tag{1.4}$$

通过使用体积的极坐标公式和(1.3)容易证明对于 $K_1,\cdots,K_r\in\ell^n$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_r\ge 0$，径向 Minkowski 线性组合的体积在 $\lambda_i$ 下是一个 $n$ 阶齐次多项式，

$$V\left(\lambda_1 K_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_r K_r\right)=\sum \tilde{V}_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}, \tag{1.5}$$

这里的和是取自所有的 $n$ 元数组 $\left(i_1, \cdots, i_n\right)$，其项是不超过 $r$ 的正整数。如果我们要求(1.4)中多项式的系数在其自变量下是对称的，那么它们是唯一确定的。系数 $\tilde{V}_{i_1 \cdots i_n}$ 是非负的且仅取决于星体 $K_{i_1}, \cdots, K_{i_n}$，$\tilde{V}\left(K_{i_1}, \cdots, K_{i_n}\right)$ 称为 $K_{i_1}, \cdots, K_{i_n}$ 的对偶混合体积，这里我们可以看出对偶混合体积的定义与混合体积的定义相似，仅是定义的加法不同。

令 $e_1$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个单位向量，$K$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，相对于超平面 $e_1^{\perp}$，$K$ 的 Steiner 对称化记作 $stK$，是由 $K$ 中平行于 $e_1$ 的所有弦生成的集合，并使弦的中点落在超平面 $e_1^{\perp}$ 上。

对偶混合体积有如下定义：

**定义 1** [7]

$$\tilde{V}\left(A_1, \cdots, A_n\right):=\frac{1}{n} \int_{\Omega} \rho_{A_1}(u) \cdots \rho_{A_n}(u) \mathrm{d} S(u)\left[A_i \in \ell^n\right].$$

**定义 2** [7]

$$\tilde{V}_i(A, B):=\tilde{V}(\underbrace{A, \cdots, A}_{n-i}, \underbrace{B, \cdots, B}_{i})\left[A, B \in \ell^n\right].$$

**定义 3** [7]由定义 1，$\tilde{V}$ 是一个映射，$\tilde{V}: \underbrace{\ell_n \times \cdots \times \ell_n}_{n} \rightarrow \mathbb{R}$，该映射有如下性质：

1) $\tilde{V}$ 是连续的；

2) $\tilde{V}\left(A_1, \cdots, A_n\right)>0$；

3) $\tilde{V}\left(\lambda_1 A_1, \cdots, \lambda_n A_n\right)=\lambda_1 \cdots \lambda_n \tilde{V}\left(A_1, \cdots, A_n\right)\left[\lambda_i>0\right]$；

4) 如果 $A_i \subset B_i$，对于所有的 $i$，$\tilde{V}\left(A_1, \cdots, A_n\right) \leq \tilde{V}\left(B_1, \cdots, B_n\right)$，当 $A_i=B_i$ 时，等号成立；

5) $\tilde{V}(A, \cdots, A)=\tilde{V}(A)$。

**推论 1** [9]令 $K, L \in C^n$，凸体关于给定超平面 $H$ 的 Steiner 对称化具有以下性质：

1) 对于 $K \in C^n$ 有 $stK \in C$；

2) 对于 $\lambda \geq 0$，$K \in C^n$ 有 $st \lambda K=\lambda stK$；

3) 对于 $K \in C^n$ 有 $V(stK)=V(K)$。

## 3. 主要定理证明

我们给出后续过程中需要使用的引理。

**引理 1 (高斯球逼近定理)**令 $K, L \in \ell^n$，存在对于超平面(相对于原点) $H_1, H_2, \cdots$ 的 Steiner 对称化 $st_{H_1}, st_{H_2}, \cdots$，使得

$$K_n=st_{H_n} \cdots st_{H_1} K \rightarrow\left(\frac{V(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}} B^n,$$

$$L_n=st_{H_n} \cdots st_{H_1} L \rightarrow\left(\frac{V(L)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}} B^n.$$

引理 1 的详细证明可见 Gruber ([9], P. 172, P. 174)本文不过多阐述，引理 1 的思想也被应用于证明经典 Brun-Minkowski 不等式 $V(K+L)^{\frac{1}{n}} \geq V(K)^{\frac{1}{n}}+V(L)^{\frac{1}{n}}$ 详情可见[10]。

**引理 2** 如果 $K, L \in \ell^n$，有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(K \tilde{+} \varepsilon L)-V(K)}{\varepsilon}=n \tilde{V}_1(K, L).$$

**证明：**由(1.4)式

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V\left(K\tilde{+}\varepsilon L\right)-V\left(K\right)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{V}_0\left(K,L\right)+n\varepsilon\tilde{V}_1\left(K,L\right)+o\left(\varepsilon^2\right)-V\left(K\right)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{V}\left(K\right)+n\varepsilon\tilde{V}_1\left(K,L\right)+o\left(\varepsilon^2\right)-V\left(K\right)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n\varepsilon\tilde{V}_1\left(K,L\right)+o\left(\varepsilon^2\right)}{\varepsilon}\\
&=n\tilde{V}_1\left(K,L\right)
\end{aligned}
$$

考虑 Steiner 对称化后的情形，自然的有 $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V\left(stK\tilde{+}st\varepsilon L\right)-V\left(stK\right)}{\varepsilon}=n\tilde{V}_1\left(stK,stL\right)$。

**引理 3** 如果 $K,L\in\ell^n$，$K$ 与 $L$ 互为膨胀，则 $stK\tilde{+}stL\supseteq st\left(K\tilde{+}L\right)$，并且 $\tilde{V}\left(stK,\cdots,stK,stL\right)\geq\tilde{V}\left(K,\cdots,K,L\right)$。

**引理 3 的证明需利用定理 1，所以我们先证明定理 1。**

**定理 1 证明：**

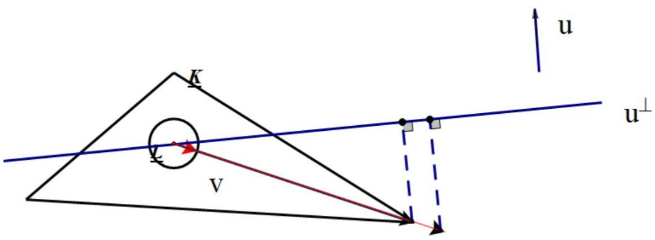


**Figure 1.** Radial addition of unit circle and star body after their respective projections on the hyperplane
**图 1.** 单位圆与星体在超平面上各自投影后的径向加法

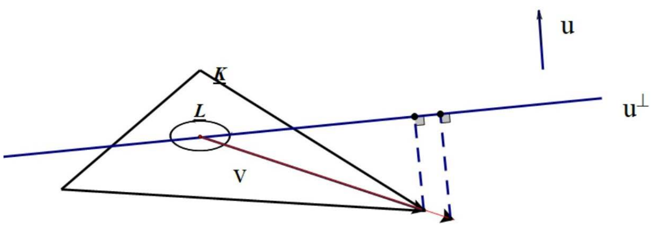


**Figure 2.** Radial addition of ellipsoid and star body after their respective projections on the hyperplane
**图 2.** 椭圆与星体在超平面上各自投影后的径向加法

当两个星体互为膨胀时，定理 1 平凡；

在图 1 中，我们不妨设 $L$ 是单位圆，$K$ 是星体，$\theta$ 是方向 $v$ 与 $u^{\perp}$ 的夹角，沿着方向 $v$ 有

$$
\begin{aligned}
\left(K\tilde{+}L\right)/u^{\perp}&=\rho_{K\tilde{+}L}\left(v\right)\cdot v\cdot\cos\theta\\
&=\rho_K\left(v\right)\cdot v\cdot\cos\theta\tilde{+}\rho_L\left(v\right)\cdot v\cdot\cos\theta\\
&=\rho_K\left(v\right)\cdot\cos\theta\tilde{+}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

并且 $K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}=\rho_K(v)\cdot\cos\theta\tilde{+}1$，即 $(K\tilde{+}L)/u^{\perp}\subset K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}$。

在图 2 中，我们不妨设 $L$ 是椭圆，$K$ 是星体，$\theta$ 是方向 $v$ 与 $u^{\perp}$ 的夹角，沿着方向 $v$ 有

$$(K\tilde{+}L)/u^{\perp}=\rho_{K\tilde{+}L}(v)\cdot v\cdot\cos\theta=\rho_K(v)\cdot\cos\theta\tilde{+}\rho_L(v)\cdot\cos\theta,$$
$$K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}=\rho_K(v)\cdot\cos\theta\tilde{+}\rho_L(v)\cdot\cos\theta.$$

即 $(K\tilde{+}L)/u^{\perp}=K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}$。

综上所述，我们有 $(K\tilde{+}L)/u^{\perp}\subseteq K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}$，定理 1 证明完毕。

**引理 3 证明：**

当 $K$ 与 $L$ 是互为膨胀的星体时，不妨考虑简单的情况，两个以原点为圆心的不同半径圆，对于任意方向上的径向加法，由径向加法的定义，显然 $stK\tilde{+}stL=st(K\tilde{+}L)$；由于 Steiner 对称化本就是与 $u^{\perp}$ 上的投影相关，由定理 1，选取任意星体在 $u^{\perp}$ 上的投影并做径向加法后，$(K\tilde{+}L)/u^{\perp}\subseteq K/u^{\perp}\tilde{+}L/u^{\perp}$，则 $stK\tilde{+}stL\subseteq st(K\tilde{+}L)$ 不可能成立，当 $K$ 与 $L$ 是互为膨胀的星体时，$stK\tilde{+}stL\supseteq st(K\tilde{+}L)$ 成立；由推论 1 的(1) (2)式，任取 $\varepsilon>0$，有

$$st(K\tilde{+}\varepsilon L)\subseteq stK\tilde{+}st\varepsilon L=stK\tilde{+}\varepsilon stL,$$

又因混合体积是连续的、非负的，对偶混合体积是正的、连续的，且 Steiner 对称化是保单调性的[9]，利用推论 1 中的(3)式，得到以下关系：

$$\frac{V(stK\tilde{+}st\varepsilon L)-V(stK)}{n\varepsilon}\geq\frac{V(st(K\tilde{+}\varepsilon L))-V(stK)}{n\varepsilon}=\frac{V(K\tilde{+}\varepsilon L)-V(K)}{n\varepsilon},$$

令 $\varepsilon\to 0$，左右两式取极限，由引理 2 以及[10]中混合体积的相似等式，有 $\tilde{V}_1(stK,stL)\geq\tilde{V}_1(K,L)$，引理 3 证明完毕。

**定理 2 证明：**

作为引理 1 和引理 3 的应用，我们证明特殊星体(互为膨胀)的对偶 Minkowski 不等式：

令 $K,L\in\ell^n$，$K$ 与 $L$ 互为膨胀，由高斯球逼近定理，序列 $\{K_n\},\{L_n\},u_n\in S^{n-1}$，$K_1=K$，$L_1=L$，并且 $K_{n+1}=(K_n)^{u_n}$，$L_{n+1}=(L_n)^{u_n}$，$n=1,2,3,\cdots$，$u_n$ 表示第 $n$ 次 Steiner 对称化，有

$$K_n\to\left(\frac{V(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}}B^n,L_n\to\left(\frac{V(L)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}}B^n,n\to\infty.$$

由引理 3 $\tilde{V}(K_n,\cdots,K_n,L_n)\leq\tilde{V}\left((K_n)^{u_n},\cdots,(K_n)^{u_n},(L_n)^{u_n}\right)=\tilde{V}(K_{n+1},\cdots,K_{n+1},L_{n+1})$。

因此我们得到一个正的并且单调递增的序列 $\{\tilde{V}(K_n,\cdots,K_n,L_n)\}$，收敛到其上确界。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\tilde{V}(K_n,\cdots,K_n,L_n)\\&=\tilde{V}\left(\left(\frac{V(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}}B^n,\cdots,\left(\frac{V(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}}B^n,\left(\frac{V(L)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}}B^n\right)\\&=\left(\frac{V(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{V(L)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n}}V(B^n,B^n,\cdots,B^n)\\&=V(K)^{\frac{n-1}{n}}V(L)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

即 $\tilde{V}(K,\cdots,K,L)=\tilde{V}(K_1,\cdots,K_1,L_1)\leq V(K)^{\frac{n-1}{n}}V(L)^{\frac{1}{n}}$，证明完成。

## 致　谢

感谢我的导师蔺友江教授对本篇论文的指导。

## 基金项目

国家自然科学基金(11971080)；重庆市教委基金项目(KJQN202000838)；重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0790, cstc2020jcyj-msxmX0328)；重庆工商大学研究生创新型科研项目(yjscxx2022-112-72)。

## 参考文献

[1] Falconer, K.J. (1976) A Result on the Steiner Symmetrization of a Compact Set. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 385-386. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-14.3.385

[2] Gardner, R.J. (2002) The Brunn-Minkowski Inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39**, 355-405. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-02-00941-2

[3] Gardner, R.J. (1995) Geometric Tomography. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Lin, Y. (2018) Smoothness of the Steiner Symmetrization. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **146**, 345-357. https://doi.org/10.1090/proc/13683

[5] Lin, Y. (2017) Affine Orlicz Pólya-Szegö Principle for Log-Concave Functions. *Journal of Functional Analysis*, **273**, 3295-3326. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.08.017

[6] 戴进. 凸体的两个几何量在 Steiner 对称化下的变化及其应用[J]. 数学进展, 2018, 47(5): 767-772.

[7] Lutwak, E. (1975) Dual Mixed Volumes. *Pacific Journal of Mathematics*, **58**, 531-538. https://doi.org/10.2140/pjm.1975.58.531

[8] Lutwak, E. (1988) Intersection Bodies and Dual Mixed Volumes. *Advances in Mathematics*, **71**, 232-261. https://doi.org/10.1016/0001-8708(88)90077-1

[9] Gruber, P.M. (2007) Convex and Discrete Geometry. Springer, Berlin.

[10] Schneider, R. (2013) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, Cambridge.