Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2024-2031
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137208

Hans汉斯

求解多维非特征柯西问题的修正核方法

韩晶晶

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月12日；录用日期：2023年7月17日；发布日期：2023年7月24日

摘　要

讨论了多维非特征柯西问题，这是一个严重不适定的问题，即解(如果存在的话)不连续地依赖于数据。在简单地分析了频率空间中柯西问题的不适定性之后，提出了一种修正核方法来解决这个问题，从而产生了一个适定的问题，并在正则化参数的先验选择规则下，给出并证明了正则化解和精确解之间的误差估计。

关键词

非特征柯西问题，修正核方法，误差估计

A Modified Kernel Method for Solving a Non-Characteristic Cauchy Problem in Multiple Dimensions

Jingjing Han

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 12th, 2023; accepted: Jul. 17th, 2023; published: Jul. 24th, 2023

Abstract

We study a non-characteristic Cauchy problem in multiple dimensions. This is a severely ill-posed problem, *i.e.*, the solution (if it exists) does not depend continuously on the data. After simply analyzing the ill-posedness of the Cauchy problem in the frequency space, we propose to solve this problem by modifying the kernel, which generates a well-posed problem. Error estimates between the exact solution and the regularized solution are given. At last, we employ some numerical examples to illustrate the behavior of the proposed methods.

文章引用: 韩晶晶. 求解非特征柯西问题的修正核方法[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2024-2031.
DOI: 10.12677/pm.2023.137208

Keywords

Non-Characteristic Cauchy Problem, Modified Kernel Method, Error Estimation

1. 引言

在本文中，我们考虑以下非特征柯西问题

$$Lu(x,y,t)+\Delta_y u(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t),\ x\in(0,l),(y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \tag{1.1a}$$

$$u(0,y,t)=\varphi(y,t),\ (y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \tag{1.1b}$$

$$u_x(0,y,t)=0,\ (y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \tag{1.1c}$$

其中$l>0$，$\Delta_y=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$L=a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial}{\partial x}+c(x)$，且$L$的系数函数满足以下条件

$$a\in W^{2,\infty}[0,l],\ b\in W^{1,\infty}[0,l],\ c\in L^{\infty}[0,l],$$
$$0<\lambda\le a(x)\le A,c(x)\le 0,\ x\in[0,l].$$

精确数据$\varphi(y,t)$和噪声数据$\varphi_\delta(y,t)$都在$L_2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$空间中，假设

$$\|\varphi(y,t)-\varphi_\delta(y,t)\|\le\delta, \tag{1.4}$$

其中$\|\cdot\|$是L^2-范数，正数δ表示噪声水平。

众所周知，柯西问题通常是不适定的，[1] [2] [3]讨论了一维空间中问题(1.1)的正则化情况，[4] [5] [6] [7]讨论了二维空间中问题(1.1)的正则化情况，也有很多学者用不同的数值方法研究了问题(1.1)，比如Tikhonov 正则化和傅里叶截断法[4]、小波法[5]等。与一维和二维热传导方程的柯西问题进行比较，非特征柯西问题是更不适定的，即它们的解的存在性、唯一性和稳定性并不总是得到保证的，这使得求解问题(1.1)的难度更大。另外，对于$0<x\le l$，数据$\varphi_\delta(y,t)$中的一个小扰动可能会导致相应的解$u(x,y,t)$产生巨大的误差。这种不适定是由高频的扰动引起的。因此，本文提出一种修正核方法来讨论问题(1.1)，并给出正则化解和精确解之间的误差估计。

在第 2 节中，我们给出一些准备知识，并讨论频域中的柯西问题。在第 3 节中，我们提出了一种修正核方法来解决不适定问题(1.1)，并在正则化参数的先验选择规则下，给出正则化解和精确解之间的误差估计。

2. 准备知识

问题(1.1)的定义域为$x\in(0,l)$，$(y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$，则傅里叶变换的定义域为$(\eta,\xi)\in(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$。对于$\varphi(y,t)$，引入其傅里叶变换

$$\hat{\varphi}(\eta,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\varphi(y,t)\mathrm{e}^{-i(\eta\cdot y+\xi t)}\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\ (\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

其中内积$\eta \cdot y=\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i y_i$。

现在讨论频率空间中的非特征柯西问题(1.1)。为此，我们先考虑以下初值问题：

$$Lv(x,\eta,\xi)=\left(i\xi+\eta^2\right)v(x,\eta,\xi),\ (\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \tag{2.1a}$$

$$v(0,\eta,\xi)=1,\ (\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \tag{2.1b}$$

$$v_x(0,\eta,\xi)=0,\ (\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \tag{2.2c}$$

令

$$A(x):=\int_0^x a(s)^{-1/2}\,\mathrm{d}s,\ x\in(0,l). \tag{2.2d}$$

因此，问题(1.1)的解$u(x,y,t)$的傅里叶变换为

$$\hat{u}(x,\eta,\xi)=v(x,\eta,\xi)\hat{\varphi}(\eta,\xi), \tag{2.3a}$$

或

$$u(x,y,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}v(x,\eta,\xi)\hat{\varphi}(\eta,\xi)\mathrm{e}^{i(\eta\cdot y+\xi t)}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi. \tag{2.3b}$$

假设问题(1.1)的解在$x=l$处存在并属于$H^s\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\right)$空间，其中$s\in\mathbb{R}$。令$f(y,t):=u(l,y,t)$，则

$$\hat{\varphi}(\eta,\xi)=\frac{\hat{f}(\eta,\xi)}{v(l,\eta,\xi)}, \tag{2.4}$$

因此，

$$\hat{u}(x,\eta,\xi)=\frac{v(x,\eta,\xi)}{v(l,\eta,\xi)}\hat{f}(\eta,\xi). \tag{2.5}$$

为更好地讨论误差估计，我们给出以下引理。

引理 2.1 (见[8]) 当(1.2)和(1.3)成立时，(2.1)存在唯一解$v(x,\eta,\xi)$，使得对任意的$(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$，有

1) $v(\cdot,\eta,\xi)\in W^{2,\infty}[0,l]$；

2) 对任意的$x\in(0,l)$，$v(l,\eta,\xi)$关于变量$\xi,\eta_i,i=1,2,\cdots,n-1$是整函数；

3) 对任意的$x\in(0,l)$，有$v(x,\eta,\xi)\neq 0$；

4) 对$x\in(0,l)$，存在只与a,b,c的界有关的正常数$C_i,i=1,2$，有

$$|v(x,\eta,\xi)|\leq C_1\exp\left(d(\eta,\xi)A(x)\right) \tag{2.6a}$$

$$|v(l,\eta,\xi)|\leq C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right) \tag{2.6b}$$

其中

$$d(\eta,\xi):=re\left(\sqrt{i\xi+\eta^2}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+|\eta|^2}+|\eta|^2}{2}}. \tag{2.6c}$$

一般情况下，对$x>0$，$v(x,\eta,\xi)$关于变量η和ξ是无界的，数据中的误差太小可能导致大家很难得到任何有意义的解。此外，高频空间中分量的误差存在被因子$\exp\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+|\eta|^2}+|\eta|^2}{2}}A(l)\right)$放大的情况。

3. 修正核方法

本节通过修正核来重构问题(1.1)，我们重构后的正则化解为

$$\hat{u}^{\alpha,\delta}\left(x,\eta,\xi\right)=\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}\hat{\varphi}_{\delta}\left(\eta,\xi\right) \tag{3.1a}$$

或

$$u^{\alpha,\delta}\left(x,y,t\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}\hat{\varphi}_{\delta}\left(\eta,\xi\right)\mathrm{e}^{i(\eta\cdot y+\xi t)}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.1b}$$

重构正则化解的基础是通过有界近似消除所有的高频或替换核 $v\left(x,\eta,\xi\right)$，如果参 α 足够小，则 $\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}$ 近似于 $v\left(x,\eta,\xi\right)$，因此 $\left\|u^{\alpha,\delta}-u\right\|\to 0$。另外，对固定的 $\alpha>0$，$\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}$ 有界。

下面，我们将讨论正则化解和精确解之间的误差估计。

定理 3.1. 令 $u\left(x,y,t\right)$ 是问题(1.1)在 $\varphi\left(y,t\right)$ 下的精确解，$u^{\alpha,\delta}\left(x,y,t\right)$ 是问题(1.1)在 $\varphi_{\delta}\left(y,t\right)$ 下的正则化解。假设(1.1)的精确解在 $x=l$ 处有先验界

$$\left\|f\left(y,t\right)\right\|\le E\,, \tag{3.2}$$

其中常数 $E>0$，且(1.4)成立。若取正则化参数 α 为

$$\alpha=\left(\frac{\delta}{E}\right)^{m}, \tag{3.3}$$

则对任意的 $0<x<l$，有如下误差估计

$$\left\|u^{\alpha,\delta}\left(x,y,t\right)-u\left(x,y,t\right)\right\|\le K\delta^{1-\frac{A(x)}{A(l)}}E^{\frac{A(x)}{A(l)}}\,, \tag{3.4}$$

其中 $K=C+C'=\frac{C_1C_2^{-\frac{A(x)}{A(l)}}}{mA(l)}\left(A\left(x\right)\right)^{\frac{A(x)}{mA(l)}}\left(mA\left(x\right)-A\left(l\right)\right)^{1-\frac{A(x)}{mA(l)}}+C_1^mC_2^{-\frac{(m-1)A(l)+A(x)}{mA(l)}}\left(\frac{\left(m-1\right)A\left(l\right)+A\left(x\right)}{A\left(l\right)-A\left(x\right)}\right)^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}$。

证明. 由 Parseval 等式和三角不等式可得

$$\begin{aligned}\left\|u^{\alpha,\delta}\left(x,y,t\right)-u\left(x,y,t\right)\right\|&=\left\|\hat{u}^{\alpha,\delta}\left(x,\eta,\xi\right)-\hat{u}\left(x,\eta,\xi\right)\right\|\\&\le\left\|\hat{u}^{\alpha,\delta}\left(x,\eta,\xi\right)-\hat{u}^{\alpha}\left(x,\eta,\xi\right)\right\|+\left\|\hat{u}^{\alpha}\left(x,\eta,\xi\right)-\hat{u}\left(x,\eta,\xi\right)\right\|.\end{aligned} \tag{3.5}$$

先计算不等式右侧的第一项，

$$\begin{aligned}\left\|\hat{u}^{\alpha,\delta}\left(x,\eta,\xi\right)-\hat{u}^{\alpha}\left(x,\eta,\xi\right)\right\|&=\left\|\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}\left(\hat{\varphi}_{\delta}\left(\eta,\xi\right)-\hat{\varphi}\left(\eta,\xi\right)\right)\right\|\\&\le\sup_{(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\left|\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}\right|\left\|\hat{\varphi}_{\delta}\left(\eta,\xi\right)-\hat{\varphi}\left(\eta,\xi\right)\right\|\\&\le\sup_{(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\left|\frac{v\left(x,\eta,\xi\right)}{1+\alpha\left|v\left(l,\eta,\xi\right)\right|^{m}}\right|\delta,\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$B=\frac{v(x,\eta,\xi)}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}. \tag{3.7}$$

由引理 2.1 可得

$$B\le\frac{C_1\exp\left(d(\eta,\xi)A(x)\right)}{1+\alpha\left(C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m}}.$$

令

$$f\left(d(\eta,\xi)\right)=\frac{C_1\exp\left(d(\eta,\xi)A(x)\right)}{1+\alpha\left(C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m}}. \tag{3.8}$$

若 $f'\left(d_0(\eta,\xi)\right)=0$，易得

$$d_0(\eta,\xi)=\frac{1}{mA(l)}\ln\left(\frac{A(x)}{\alpha C_2^m\left(mA(l)-A(x)\right)}\right).$$

又因为当 $d(\eta,\xi)\ge d_0(\eta,\xi)$ 时，$f'\left(d(\eta,\xi)\right)<0$；当 $d(\eta,\xi)<d_0(\eta,\xi)$ 时，$f'\left(d(\eta,\xi)\right)>0$，因此 $f\left(d(\eta,\xi)\right)$ 在 $d(\eta,\xi)$ 取得最大值，即

$$f\left(d(\eta,\xi)\right)\le f\left(d_0(\eta,\xi)\right)=C\alpha^{-\frac{A(x)}{mA(l)}}, \tag{3.9}$$

其中 $C=\frac{C_1C_2^{-\frac{A(x)}{A(l)}}}{mA(l)}\left(A(x)\right)^{\frac{A(x)}{mA(l)}}\left(mA(x)-A(l)\right)^{1-\frac{A(x)}{mA(l)}}$。

因此

$$B\le\frac{C_1\exp\left(d(\eta,\xi)A(x)\right)}{1+\alpha\left(C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m}}\le C\alpha^{-\frac{A(x)}{mA(l)}}. \tag{3.10}$$

由(3.6)和(3.13)可知，

$$\left\|\hat{u}^{\alpha,\delta}(x,\eta,\xi)-\hat{u}^{\alpha}(x,\eta,\xi)\right\|\le C\alpha^{-\frac{A(x)}{mA(l)}}\delta. \tag{3.11}$$

现在计算不等式右侧的第二项，

$$\begin{aligned}\left\|\hat{u}^{\alpha}(x,\eta,\xi)-\hat{u}(x,\eta,\xi)\right\|&=\left\|\frac{v(x,\eta,\xi)}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}\hat{\varphi}(\eta,\xi)-v(x,\eta,\xi)\hat{\varphi}(\eta,\xi)\right\|\\&=\left\|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}v(x,\eta,\xi)\frac{\hat{f}(\eta,\xi)}{v(l,\eta,\xi)}\right\|\\&\le\sup_{(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\left|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m-1}}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}v(x,\eta,\xi)\right|\left\|\hat{f}(\eta,\xi)\right\|\\&\le\sup_{(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\left|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m-1}}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}v(x,\eta,\xi)\right|E.\end{aligned} \tag{3.12}$$

令

$$D=\left|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m-1}}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}v(x,\eta,\xi)\right|,\tag{3.13}$$

由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}D&=\left|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m-1}}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^{m}}v(x,\eta,\xi)\right|\le\frac{\alpha C_1\exp\left(d(\eta,\xi)A(x)\right)\left(C_1\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m-1}}{1+\alpha\left(C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m}}\\&=\frac{\alpha C_1^m\exp\left[d(\eta,\xi)\left(A(x)+(m-1)A(l)\right)\right]}{1+\alpha\left(C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m}}.\end{aligned}$$

令 $h\left(d(\eta,\xi)\right)=\dfrac{\alpha C_1^m\exp\left[d(\eta,\xi)\left(A(x)+(m-1)A(l)\right)\right]}{1+\alpha\left(C_2\exp\left(d(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{m}}$。假设 $h'\left(d_1(\eta,\xi)\right)=0$，可得

$$d_1(\eta,\xi)=\frac{1}{mA(l)}\ln\frac{A(x)+(m-1)A(l)}{\alpha C_2^m\left(A(l)-A(x)\right)}.$$

若 $d(\eta,\xi)>d_1(\eta,\xi)$，有 $h'\left(d(\eta,\xi)\right)<0$；若 $d(\eta,\xi)<d_1(\eta,\xi)$，有 $h'\left(d(\eta,\xi)\right)>0$，因此 $h\left(d(\eta,\xi)\right)$ 在 $d(\eta,\xi)$ 处取得最大值，所以

$$h\left(d(\eta,\xi)\right)\le h\left(d_1(\eta,\xi)\right)=C_1^mC_2^{-\frac{(m-1)A(l)+A(x)}{mA(l)}}\left(\frac{(m-1)A(l)+A(x)}{A(l)-A(x)}\right)^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}\alpha^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}=C'\alpha^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}\tag{3.14}$$

因此，

$$\left\|\hat{u}^{\alpha}(x,\eta,\xi)-\hat{u}(x,\eta,\xi)\right\|\le C'\alpha^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}E.\tag{3.15}$$

综上可得，

$$\left\|u^{\alpha,\delta}(x,y,t)-u(x,y,t)\right\|\le C\alpha^{-\frac{A(x)}{mA(l)}}\delta+C'\alpha^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}E.\tag{3.16}$$

取 $\alpha=\left(\dfrac{\delta}{E}\right)^m$，则误差估计为

$$\left\|u^{\alpha,\delta}(x,y,t)-u(x,y,t)\right\|\le C\alpha^{-\frac{A(x)}{mA(l)}}\delta+C'\alpha^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}E=K\delta^{1-\frac{A(x)}{A(l)}}E^{\frac{A(x)}{A(l)}},\tag{3.17}$$

其中 $K=C+C'=\dfrac{C_1C_2^{-\frac{A(x)}{A(l)}}}{mA(l)}\left(A(x)\right)^{\frac{A(x)}{mA(l)}}\left(mA(x)-A(l)\right)^{1-\frac{A(x)}{mA(l)}}+C_1^mC_2^{-\frac{(m-1)A(l)+A(x)}{mA(l)}}\left(\dfrac{(m-1)A(l)+A(x)}{A(l)-A(x)}\right)^{\frac{A(x)-A(l)}{mA(l)}}$。

定理得证。 □

定理 3.1 考虑了 $0<x<l$ 的误差估计，若要得到 $x=l$ 处的误差估计，我们要给出更强的先验界

$$\left\|u(l,y,t)\right\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}u(l,y,t)\exp\left(pd(\eta,\xi)A(l)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\le E',p>0.\tag{3.18}$$

其中 $\left\|u(l,y,t)\right\|_p$ 是 p-范数，且 $p=0$ 时，$\left\|u(l,y,t)\right\|_p$ 是 L^2-范数。

定理 3.2. 令 $u(l,y,t)$ 是问题(1.1)的精确解，$u^{\alpha,\delta}(l,y,t)$ 是问题(1.1)在 $x=l$ 处的正则化解。假设(1.4)和先验假设(3.18)成立。假设正则化参数为

$$\alpha=\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{m}{p+1}}, \tag{3.19}$$

则有如下的误差估计：

$$\left\|u^{\alpha,\delta}(x,y,t)-u(x,y,t)\right\|\le\left(\frac{C_1}{mC_2}(m-1)^{1-\frac{1}{m}}+C_1^mC_2^{p-m}\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}}\right)\delta^{\frac{p}{p+1}}E'^{\frac{1}{p+1}}. \tag{3.20}$$

证明. 同定理 3.1，可以分为两部分来证明此定理。不等式右侧第一项和定理 3.1 的证明类似，可得

$$\left\|\hat{u}^{\alpha,\delta}(x,\eta,\xi)-\hat{u}^{\alpha}(x,\eta,\xi)\right\|\le\frac{C_1}{mC_2}(m-1)^{1-\frac{1}{m}}\alpha^{-\frac{1}{m}}\delta. \tag{3.21}$$

现在证明不等式右侧第二项，

$$\begin{aligned}\left\|\hat{u}^{\alpha}(l,\eta,\xi)-\hat{u}(l,\eta,\xi)\right\|&=\left\|\frac{v(l,\eta,\xi)}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^m}\hat{\varphi}(\eta,\xi)-v(l,\eta,\xi)\hat{\varphi}(\eta,\xi)\right\|\\&=\left\|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^m}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^m}v(l,\eta,\xi)\frac{\hat{f}(\eta,\xi)}{v(l,\eta,\xi)}\right\|\\&\le\sup_{(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\left|\frac{\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^m}{1+\alpha\left|v(l,\eta,\xi)\right|^m}\exp\left(-d(\eta,\xi)A(l)\right)\right|\left\|\hat{f}(\eta,\xi)\right\|\\&\le\sup_{(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}}\left|\frac{\alpha C_1^m\exp\left(md(\eta,\xi)A(l)\right)}{1+\alpha C_2^m\exp\left(md(\eta,\xi)A(l)\right)}\exp\left(-d(\eta,\xi)A(l)\right)\right|E'.\end{aligned} \tag{3.22}$$

令 $z\left(d(\eta,\xi)\right)=\left|\frac{\alpha C_1^m\exp\left(md(\eta,\xi)A(l)\right)}{1+\alpha C_2^m\exp\left(md(\eta,\xi)A(l)\right)}\exp\left(-d(\eta,\xi)A(l)\right)\right|$。当 $z'\left(d_2(\eta,\xi)\right)=0$ 时，有 $d_2(\eta,\xi)=\frac{1}{mA(l)}\ln\frac{m-p}{p\alpha C_2^m}$。若 $d(\eta,\xi)>d_2(\eta,\xi)$，有 $z'\left(d(\eta,\xi)\right)<0$；若 $d(\eta,\xi)<d_2(\eta,\xi)$，有 $z'\left(d(\eta,\xi)\right)>0$，因此 $z\left(d(\eta,\xi)\right)$ 在 $d_2(\eta,\xi)$ 处取得最大值，所以

$$z\left(d(\eta,\xi)\right)\le z\left(d_2(\eta,\xi)\right)=C_1^mC_2^{p-m}(p\alpha)^{\frac{p}{m}}\frac{(m-p)^{1-\frac{p}{m}}}{m}\le C_1^mC_2^{p-m}(p\alpha)^{\frac{p}{m}}m^{-\frac{p}{m}}=C_1^mC_2^{p-m}\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}}\alpha^{\frac{p}{m}}. \tag{3.23}$$

所以，

$$\left\|\hat{u}^{\alpha}(l,\eta,\xi)-\hat{u}(l,\eta,\xi)\right\|\le z\left(d_2(\eta,\xi)\right)\le C_1^mC_2^{p-m}\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}}\alpha^{\frac{p}{m}}E'. \tag{3.24}$$

合并(3.26)和(3.29)，并带入 $\alpha=\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{m}{p+1}}$ 可得

$$\left\|u^{\alpha,\delta}(x,y,t)-u(x,y,t)\right\|\le\left(\frac{C_1}{mC_2}(m-1)^{1-\frac{1}{m}}+C_1^mC_2^{p-m}\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}}\right)\delta^{\frac{p}{p+1}}E'^{\frac{1}{p+1}}. \tag{3.25}$$

定理得证。 □

4. 结论

本文用一种正则化方法来解决非特征柯西问题，该方法通过修改核，证明了整个域的收敛估计，即包括 $0<x<l$ 和 $x=l$，并在正则化参数的先验选择规则下，给出并证明了正则化解和精确解之间的误差估计。

参考文献

[1] Knabner, P. and Vessella, S. (1988) The Optimal Stability Estimate for Some Ill-Posed Cauchy Problems for a Parabolic Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **10**, 575-583. https://doi.org/10.1002/mma.1670100507

[2] Meyer, Y. (1992) Wavelets and Operators. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Elden, L. (1987) Approximations for a Cauchy Problem for the Heat Equation. *Inverse Problems*, **3**, 263-273. https://doi.org/10.1088/0266-5611/3/2/009

[4] Zhi, Q. (2009) Regularization Methods for a Cauchy Problem for a Parabolic Equation in Multiple Dimensions. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **17**, 891-911. https://doi.org/10.1515/JIIP.2009.052

[5] Knosowski, Y., Lieres, E. and Schneider, A. (1999) Regularization of a Non-Characteristic Cauchy Problem for a Parabolic Equation in Multiple Dimensions. *Inverse Problems*, **15**, 731-743. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/3/307

[6] Qian, Z. and Fu, C.L. (2007) Regularization Strategies for a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problem*, **23**, 1053-1068. https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/3/013

[7] Qian, Z., Fu, C.L. and Xiong, X.T. (2007) A Modified Method for Determining the Surface Heat Flux of IHCP. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **15**, 249-265. https://doi.org/10.1080/17415970600725128

[8] Hao, D.N., Schneider, A. and Reinhardt, H.-J. (1995) Regularization of a Non-Characteristic Cauchy Problem for a Parabolic Equation. *Inverse Problems*, **11**, 1247-1263. https://doi.org/10.1088/0266-5611/11/6/009