

# 两类King型算子一致逼近的误差估计

黄婕妤<sup>1</sup>, 董 惠<sup>1</sup>, 齐秋兰<sup>1,2\*</sup>, 杨 戈<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>河北师范大学数学科学学院, 河北 石家庄

<sup>2</sup>河北省计算数学与应用重点实验室, 河北 石家庄

收稿日期: 2023年6月20日; 录用日期: 2023年7月24日; 发布日期: 2023年7月31日

## 摘 要

本文借助 $C^*[0, \infty)$ 空间与 $C[0, 1]$ 空间之间的变换, 将 $C^*[0, \infty)$ 空间上的逼近问题转变到 $C[0, 1]$ 空间上进行研究。应用一阶、二阶模, 证明了两类保持函数1和 $e^{-\mu x}$  ( $\mu > 0$ )的King型算子一致逼近的误差估计。

## 关键词

King型算子, 光滑模, 一致逼近, 误差估计

# An Uniform Error Estimate for Two Kinds of King Type Operators

Jieyu Huang<sup>1</sup>, Hui Dong<sup>1</sup>, Qiulan Qi<sup>1,2\*</sup>, Ge Yang<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei

<sup>2</sup>Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang Hebei

Received: Jun. 20<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jul. 24<sup>th</sup>, 2023; published: Jul. 31<sup>st</sup>, 2023

## Abstract

By means of a transformation between  $C^*[0, \infty)$  and  $C[0, 1]$ , the approximation problem in the space  $C^*[0, \infty)$  can be reduced the same one in the space  $C[0, 1]$ . Using the first and second order moduli, we show a further uniform error estimate for two kinds of King-type operators which preserve 1 and  $e^{-\mu x}$  ( $\mu > 0$ ).

## Keywords

King Type Operators, Modulus of Smoothness, Uniform Approximation, Error Estimate

\*通讯作者。



## 1. 引言

逼近论在计算数学、工程数学与信息理论等领域广泛应用并为之提供理论支持和方法依据。由于各类曲线曲面设计的需要,含形状参数的算子受到人们的关注。同时,为了改善逼近的效果,King [1]提出了保持函数 1,  $x^2$  的 Bernstein 型算子。受到 King 构造算子方法的启发, Acar [2]和 Devici [3]分别构造了保持函数 1,  $e^{2ax}$  ( $a > 0$ ) 的 Szász 型和 Gamma 型算子。Huang 和 Qi 在文献[4] [5]中研究了保持函数  $e^{-\mu}$  ( $\mu > 0$ ) 的两类 King 型算子的一致逼近及统计逼近。有关 King 型算子的研究成果见文献[2]-[12]。

Korovkin 定理为人们提供了检验正线性算子列在空间  $C[a, b]$  上一致收敛的判定条件。为了得到无穷区间上一致逼近的误差刻画, Păltănea 和 Smuc [13]利用变换将  $[0, \infty)$  区间上的问题转化到  $[0, 1]$  区间上进行研究,得到了算子逼近的量化估计。这一研究方法最早由 Gonska [14]提出,之后被 Păltănea [15]进一步改进。受此启发,在本文中,我们应用此方法得到了保持函数  $e^{-\mu}$  ( $\mu > 0$ ) 的 King-Gamma 和 King-Szász 型算子一致收敛逼近误差的进一步量化估计。

King-Gamma 型算子定义如下[5]: 对于  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha = \frac{\mu x^2}{n \left( e^{\frac{\mu x}{n+1}} - 1 \right)}$  ( $\mu > 0$ ),

$$G_n^\mu(f; x) := \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^n f\left(\frac{x^2 \tau}{\alpha n}\right) d\tau. \quad (1)$$

King-Szász 型算子定义如下[4]: 对于  $x \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = \frac{\mu x}{n \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{n}} \right)}$  ( $\mu > 0$ ),

$$S_n^\mu(f; x) := e^{-n\beta} \sum_{k=0}^\infty f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\beta)^k}{k!}. \quad (2)$$

注 1. 为了简化证明的过程,我们引入统一的记号:

$$L_n(f; x) := \begin{cases} G_n^\mu(f; x), & x \in D := (0, \infty); \\ S_n^\mu(f; x), & x \in D := [0, \infty). \end{cases}$$

根据算子的定义(1) (2), 知  $L_n(e^{-\mu}; x) = e^{-\mu}$ , 这意味着算子  $L_n(f; x)$  保持函数 1 和  $e^{-\mu}$  ( $\mu > 0$ )。

注 2.  $\varphi(x)$  是 Ditzian-Totik 模中的步长权函数[16]:

$$\varphi(x) := \begin{cases} x, & \text{if } L_n = G_n^\mu; \\ \sqrt{x}, & \text{if } L_n = S_n^\mu. \end{cases}$$

注 3.  $C(D)$  表示定义于区间  $D$  上的所有连续函数所构成的空间;  $C_B(D)$  表示定义于区间  $D$  上的有界连续函数构成的空间;  $C^*(D) := \{f \in C(D) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ 存在且有限}\}$ 。

注 4. 本文中, 范数  $\|\cdot\|$  定义为一致范数, 即:  $\|f\|_E := \sup_{x \in E} |f(x)|$ , 其中  $E$  可以是  $D$  或  $[0, 1]$ 。

注 5. 本文中,  $C$  表示与  $x$ ,  $n$  无关的常数, 不同的情况下可以取不同的值。

本篇文章由以下几部分组成：在第二节中，我们给出了上述定义的两类 King 型算子的一些性质；在第三节中，借助一阶、二阶模，我们得到了与之前不同的正定理以及 Voronovskaja 型弱逆定理；在第四节中，借助空间  $C^*[0, \infty)$  与空间  $C[0, 1]$  之间的变换，我们得到了与一阶、二阶模有关的一致逼近误差的进一步估计；在第五节中，利用 Matlab 软件绘图，我们研究了 King-Szász 型算子作用于三类不同类型函数上的逼近误差；在第六节中，我们总结了不同算子对不同类型函数的逼近情况，并提出今后进一步需要研究的问题。

## 2. 所需引理

**引理 2.1.** ([4], Lemma 2.1, 2.2, [5], Lemma 2(5)) 设  $x \in D$ ,  $\mu > 0$ , 我们有

$$L_n^\mu(1; x) = 1; \quad G_n^\mu(t; x) = \frac{(n+1)x^2}{n\alpha}; \quad G_n^\mu(t^2; x) = \frac{(n+1)(n+2)x^4}{n^2\alpha^2}; \quad S_n^\mu(t; x) = \beta; \quad S_n^\mu(t^2; x) = \beta^2 + \frac{\beta}{n}.$$

**引理 2.2.** ([4], Lemma 2.3, [5], Lemma 2(6)) 令  $\Phi^m(x) := L_n((t-x)^m; x)$ ,  $x \in D$ ,  $m = 1, 2, 4$ , 我们可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n\Phi^1(x) &= \frac{\mu}{2}\varphi^2(x); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n\Phi^2(x) &= \varphi^2(x); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2\Phi^4(x) &= 3\varphi^4(x). \end{aligned}$$

**引理 2.3.** 对于  $f(x) \in C_B(D)$ , 借助算子的定义(1)(2), 知

$$\|L_n(f)\|_D \leq \|f\|_D.$$

光滑模为人们处理最佳逼近的阶及逆定理提供了一个较好的工具，我们常用光滑模来描述逼近误差的量化，下面给出本文用到的光滑模与  $K$ -泛函的定义。

**定义 2.1.** [16] 光滑模与  $K$ -泛函的定义如下：对于  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $E = [0, 1]$  或  $D$ ,  $\varphi(x)$  的定义见注 2,

$$\begin{aligned} \omega_{\varphi^\lambda}(f; t)_E &:= \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x \pm \frac{h\varphi^\lambda(x)}{2} \in E} \left| f\left(x + \frac{h\varphi^\lambda(x)}{2}\right) - f\left(x - \frac{h\varphi^\lambda(x)}{2}\right) \right|; \\ \omega_{\varphi^\lambda}^2(f; t)_E &:= \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x \pm h\varphi^\lambda(x) \in E} \left| f(x + h\varphi^\lambda(x)) - 2f(x) + f(x - h\varphi^\lambda(x)) \right|; \\ K_\varphi(f; t^r) &:= \inf_{g \in W^r} \left\{ \|f - g\|_E + t^r \|\varphi^r g^{(r)}\|_E \right\}, \end{aligned}$$

其中  $W^r := \left\{ g^{(r-1)} \in AC_{loc}(E) : \|\varphi^r g^{(r)}\|_E < \infty \right\}$ ,  $r = 1, 2$ .

**注 6.** 当  $\lambda = 0$  时，我们分别记为  $\omega_1(f; t)_E$  和  $\omega_2(f; t)_E$ ；当  $\lambda = 1$  时， $\omega_\varphi^r(f; t)_E$  为 Ditzian-Totik 模。

**引理 2.4.** ([16], Theorem 2.1.1) 对于上述定义的模与  $K$ -泛函，存在一个常数  $C > 0$  满足：

$$C^{-1}\omega_\varphi^r(f; t)_E \leq K_\varphi(f; t^r) \leq C\omega_\varphi^r(f; t)_E \quad (r = 1, 2).$$

**引理 2.5.** ([4], Theorem 3.1, [5], Theorem 1)

$$\begin{aligned} \|L_n(e^{-t}; x) - e^{-x}\|_D &:= \alpha'_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); \\ \|L_n(e^{-2t}; x) - e^{-2x}\|_D &:= \beta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

**引理 2.6.** ([15], Corollary 3.1) 令  $K = [a, b]$ ,  $K' \subset K$ , 如果  $L: C(K) \rightarrow C(K')$  是一个正线性算子，那

么对于  $f \in C(K)$  和  $0 < h < \frac{1}{2} \text{length}(K)$ , 有下面的关系:

$$|L(f; x) - f(x)| \leq |L(1; x) - 1| \cdot |f(x)| + \frac{1}{h} |L(t-x; x)| \omega_1(f; h)_K + \left[ L(1; x) + \frac{1}{2h^2} L((t-x)^2; x) \right] \omega_2(f; h)_K.$$

### 3. 正定理及 Voronovskaja 型弱逆定理

**定理 3.1.** 令  $\alpha_n(x) := L_n(t-x; x)$ ,  $\beta_n(x) := L_n((t-x)^2; x)$ , 对于  $f \in C_B(D)$ ,  $n \geq 2$ , 我们有

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq C \omega_\varphi^2 \left( f; \frac{\sqrt{\beta_n(x) + \alpha_n^2(x)}}{\varphi(x)} \right) + \omega_\varphi \left( f; \frac{\alpha_n(x)}{\varphi(x)} \right)_D.$$

**证明:** 为了证明这一结论, 我们需要定义下面的算子:

$$\bar{L}_n(f; x) := L_n(f; x) + f(x) - f(L_n(t; x)).$$

使用引理 2.3,

$$\begin{aligned} |\bar{L}_n(f; x) - f(x)| &\leq |\bar{L}_n(f-g; x)| + |\bar{L}_n(g; x) - g(x)| + |f(x) - g(x)| \\ &\leq 4 \|f-g\|_D + |\bar{L}_n(g; x) - g(x)|. \end{aligned}$$

借助于关系式,

$$g(t) - g(x) - (t-x)g'(x) = \int_x^t (t-u)g''(u)du,$$

并注意到  $\bar{L}_n(1; x) = 1$  且  $\bar{L}_n(t; x) = x$ , 即  $\bar{L}_n(t-x; x) = 0$ , 我们可以得到

$$\begin{aligned} |\bar{L}_n(g; x) - g(x)| &= \left| \bar{L}_n \left( \int_x^t |t-u| \cdot |g''(u)| du; x \right) \right| \\ &\leq L_n \left( \int_x^t |t-u| \cdot |g''(u)| du; x \right) + \left| \int_x^{x+\alpha_n(x)} |x+\alpha_n(x)-u| \cdot |g''(u)| du \right| \\ &\leq \|\varphi^2 g''\|_D \left[ L_n \left( \int_x^t \frac{|t-u|}{\varphi^2(u)} du; x \right) + \left| \int_x^{x+\alpha_n(x)} \frac{|x+\alpha_n(x)-u|}{\varphi^2(u)} du \right| \right]. \end{aligned}$$

下面, 我们将对 King-Szász 和 King-Gamma 型算子分别进行估计。

1) 当  $\varphi^2(x) = x$  时,  $\varphi(x)$  是凹函数, 因此  $\frac{|t-u|}{\varphi^2(u)} \leq \frac{|t-x|}{\varphi^2(x)}$ 。那么

$$S_n^\mu \left( \int_x^t \frac{|t-u|}{\varphi^2(u)} du; x \right) \leq \varphi^{-2}(x) S_n^\mu \left( (t-x)^2; x \right)$$

2) 当  $\varphi(x) = x$  时, 有

$$\int_x^t \frac{|t-u|}{\varphi^2(u)} du \leq (t-x)^2 \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{x^2} \right).$$

由 King-Gamma 型算子的定义(1), 当  $n \geq 2$  时,

$$G_n^\mu \left( \frac{1}{t^2}; x \right) = \frac{n\alpha^2}{(n-1)x^4} \leq \frac{n}{(n-1)x^4} \cdot \frac{(n+1)^2 x^2}{n^2} \leq \frac{9}{2x^2}.$$

因此

$$G_n^\mu \left( \left| \int_x^t \frac{|t-u|}{\varphi^2(u)} du \right|; x \right) \leq \frac{11}{2x^2} G_n^\mu \left( (t-x)^2; x \right) = \frac{11}{2} \varphi^{-2}(x) G_n^\mu \left( (t-x)^2; x \right).$$

借助光滑模与 K-泛函的等价性, 即引理 2.4, 我们有

$$|\bar{L}_n(f; x) - f(x)| \leq 4 \|f - g\|_D + \frac{11}{2} \varphi^{-2}(x) \|\varphi^2 g''\|_D (\beta_n(x) + \alpha_n^2(x)) \leq C \omega_\varphi^2 \left( f; \frac{\sqrt{\beta_n(x) + \alpha_n^2(x)}}{\varphi(x)} \right)_D.$$

又因为

$$|f(x + \alpha_n(x)) - f(x)| = \left| f \left( x + \varphi(x) \frac{\alpha_n(x)}{\varphi(x)} \right) - f(x) \right| \leq \omega_\varphi \left( f; \frac{\alpha_n(x)}{\varphi(x)} \right)_D,$$

综上, 我们可以得到

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq |\bar{L}_n(f; x) - f(x)| + |f(x + \alpha_n(x)) - f(x)| \\ &\leq C \omega_\varphi^2 \left( f; \frac{\sqrt{\beta_n(x) + \alpha_n^2(x)}}{\varphi(x)} \right)_D + \omega_\varphi \left( f; \frac{\alpha_n(x)}{\varphi(x)} \right)_D. \end{aligned}$$

**定理 3.2.** 对于  $f' \in C_B(D)$ , 我们可以得到下列不等式:

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq |\alpha_n(x)| \cdot |f'(x)| + 2\sqrt{\beta_n(x)} \omega_1(f'; \sqrt{\beta_n(x)})_D.$$

**证明:** 我们将算子  $L_n$  作用在下列不等式两边,

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \int_x^t (t-u)f''(u)du,$$

可以得到

$$L_n(f(t) - f(x); x) = f'(x)L_n(t-x; x) + L_n \left( \int_x^t [f'(u) - f'(x)] du; x \right).$$

对于任意的  $\xi > 0$ , 我们有

$$|f(u) - f(x)| \leq \omega_1(f; \xi)_D \left( \frac{|u-x|}{\xi} + 1 \right).$$

通过上述不等式, 我们能得到

$$\left| \int_x^t f'(u) - f'(x) du \right| \leq \omega_1(f; \xi)_D \left( \frac{(t-x)^2}{\xi} + |t-x| \right).$$

故,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq |f'(x)| \cdot |L_n(t-x; x)| + \omega_1(f; \xi)_D \left[ \frac{1}{\xi} L_n((t-x)^2; x) + L_n(|t-x|; x) \right].$$

借助于 Hölder 不等式, 选取  $\xi = \sqrt{\beta_n(x)}$ , 可得到

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq |\alpha_n(x)| \cdot |f'(x)| + 2\sqrt{\beta_n(x)} \omega_1(f'; \sqrt{\beta_n(x)})_D.$$

**定理 3.3.** 令  $f, f', f'' \in C_B(D)$ , 当  $n$  足够大时, 我们有

$$\left| L_n(f; x) - f(x) - \alpha_n(x)f'(x) - \frac{\beta_n(x)}{2}f''(x) \right| \leq \frac{C}{n} \varphi^2(x) \omega_\varphi\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_D.$$

**证明:** 由于

$$f(t) - f(x) - (t-x)f'(x) - \frac{f''(x)}{2}(t-x)^2 = \int_x^t (t-u) \cdot (f''(u) - f''(x)) du,$$

将算子  $L_n$  同时作用在上述关系式两边, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \left| L_n(f; x) - f(x) - L_n((t-x); x)f'(x) - \frac{f''(x)}{2}L_n((t-x)^2; x) \right| \\ & \leq L_n\left(\left|\int_x^t |t-u| \cdot |f''(u) - f''(x)| du\right|; x\right). \end{aligned}$$

根据关系式[17]: 令  $g \in W^2$ , 有

$$\left|\int_x^t |t-u| \cdot |f''(u) - f''(x)| du\right| \leq 2\|f'' - g\|_D \cdot (t-x)^2 + 2\|\varphi g'\|_D \varphi^{-1}(x)|t-x|^3,$$

当  $n$  足够大时, 由引理 2.2 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} & \left| L_n(f; x) - f(x) - L_n(t-x; x)f'(x) - \frac{f''(x)}{2}L_n((t-x)^2; x) \right| \\ & \leq 2\|f'' - g\|_D \cdot L_n((t-x)^2; x) + 2\|\varphi g'\|_D \varphi^{-1}(x)L_n(|t-x|^3; x) \\ & \leq \frac{C}{n} \varphi^2(x) \|f'' - g\|_D + 2\|\varphi g'\|_D \varphi^{-1}(x) \left(L_n((t-x)^2; x)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(L_n((t-x)^4; x)\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{C}{n} \varphi^2(x) \left(\|f'' - g\|_D + \frac{1}{\sqrt{n}} \|\varphi g'\|_D\right). \end{aligned}$$

对  $g \in W^2$  取下确界, 并注意到引理 2.4 中光滑模与  $K$ -泛函的等价关系, 我们可以得到结论。

#### 4. 一致逼近的进一步估计

由文献[13] [15], 知  $(C^*[0, \infty), \|\cdot\|_{[0, \infty)})$  空间与  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{[0, 1]})$  空间之间是等距同构的。令  $\psi(t) := e^{-t}$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,

$$\psi^{-1}(x) := \begin{cases} -\ln x, & x \in (0, 1]; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t, & x = 0, \end{cases}$$

算子  $T: C[0, 1] \rightarrow C^*[0, \infty)$  定义为:

$$T(f^*)(x) = f(t) = f^*(\psi(t)) = f^* \circ \psi, \quad f^*(x) \in C[0, 1],$$

$$T^{-1}(f)(t) = f^*(x) = f(\psi^{-1}(x)) = f \circ \psi^{-1}, \quad f(t) \in C^*[0, \infty).$$

易知  $\lim_{x \rightarrow 0} f^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , 且  $T$  是一个线性双射。

对于  $f \in C^*[0, \infty)$ ,  $f^* = f \circ \psi^{-1}$ , 有  $\|Tf^*\|_{[0, 1]} = \sup_{t \in [0, \infty)} |f^*(\psi(t))| = \|f^*\|_{[0, 1]}$ 。由于  $L_n: C^*(D) \rightarrow C^*(D)$  是一个保持常数的正线性算子, 则  $L := T^{-1} \circ L_n \circ T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  是一个正线性算子。根据引理 2.6 ([15],

Corollary 3.1), 我们可以得到下面的结论。

**定理 4.1.** 对于上述定义的算子  $L$  和  $L_n$ , 设  $f \in C^*(D)$  和  $0 < h \leq \frac{1}{2}$ , 下面的不等式成立:

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\|_D &\leq \frac{1}{h} \|L_n(\psi) - \psi\|_D \cdot \omega_1(f^*; h)_{[0,1]} \\ &\leq \left[ 1 + \frac{1}{2h^2} (\|L_n(\psi^2) - \psi^2\|_D + 2\|L_n(\psi) - \psi\|_D) \right] \cdot \omega_2(f^*; h)_{[0,1]}. \end{aligned}$$

**证明:** 令  $L := T^{-1} \circ L_n \circ T$ , 借助引理 2.6 ([15], Corollary 3.1), 对于任意的  $x \in [0, 1]$ ,  $L(1) = 1$ , 有

$$\begin{aligned} \|Lf^* - f^*\|_{[0,1]} &= \|T^{-1} \circ L_n \circ T(f^*) - f^*\|_{[0,1]} = \|T^{-1} \circ L_n(f) - T^{-1}(f)\|_{[0,1]} \\ &= \|L_n(f) \circ \psi^{-1} - f \circ \psi^{-1}\|_{[0,1]} = \|L_n(f) - f\|_D. \end{aligned}$$

2) 注意到  $Tf^* = f^* \circ \psi$ ,  $T^{-1}f = f \circ \psi^{-1}$ ,  $Tt = \psi$ , 我们有

$$\begin{aligned} \|L(t) - x\|_{[0,1]} &= \|T^{-1} \circ L_n \circ T(t) - x\|_{[0,1]} = \|T^{-1} \circ (L_n \circ \psi) - T^{-1}\psi\|_{[0,1]} \\ &= \|L_n(\psi) \circ \psi^{-1} - \psi \circ \psi^{-1}\|_{[0,1]} = \|L_n(\psi) - \psi\|_D; \\ \|L(t^2) - x^2\|_{[0,1]} &= \|T^{-1} \circ L_n \circ T(t^2) - x^2\|_{[0,1]} = \|T^{-1} \circ L_n(\psi^2) - T^{-1}(\psi^2)\|_{[0,1]} \\ &= \|L_n(\psi^2) \circ \psi^{-1} - (\psi^2) \circ \psi^{-1}\|_{[0,1]} = \|L_n(\psi^2) - \psi^2\|_D. \end{aligned}$$

综上, 可得到定理 4.1。

在定理 4.1 中, 令  $\psi(t) = e^{-t}$ , 选取  $h = \sqrt{\alpha'_n + \frac{1}{2}\beta'_n}$ , 对于足够大的  $n$ , 结合引理 2.5, 可以得到

**定理 4.2.** 设  $f \in C^*(D)$ ,  $f^* = f \circ \psi^{-1}$ , 对于足够大的  $n$ , 我们有

$$\|L_n(f) - f\|_D \leq \omega_1\left(f^*; \sqrt{\alpha'_n + \frac{1}{2}\beta'_n}\right)_{[0,1]} + 2\omega_2\left(f^*; \sqrt{\alpha'_n + \frac{1}{2}\beta'_n}\right)_{[0,1]}.$$

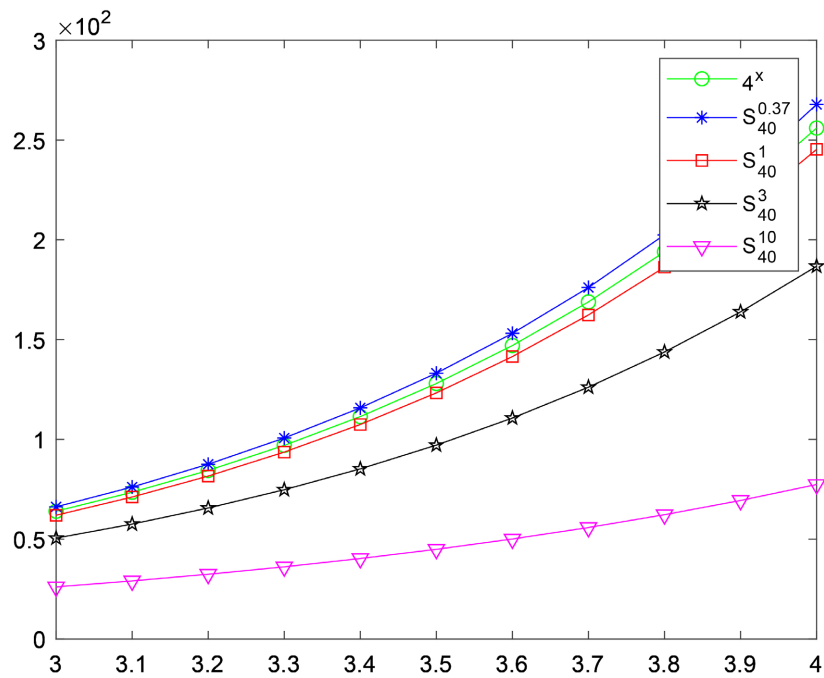
### 5. 数值实验

为了更直观地了解不同类型算子的逼近效果, 本节借助 Matlab 软件绘制了三类 Szász 算子分别作用于函数  $4^x$  (见 图1、图2)、 $\frac{30}{2^x}$  (见 图3、图4)、 $x^3 \log(1+x^6)$  (见 图5、图6) 上的图像, 并计算了它们逼近的均方根误差(见表 1~3)。

**Table 1.** Root mean square error of approximation of the function  $4^x$  by three kinds of operators ( $\mu = 1$ )

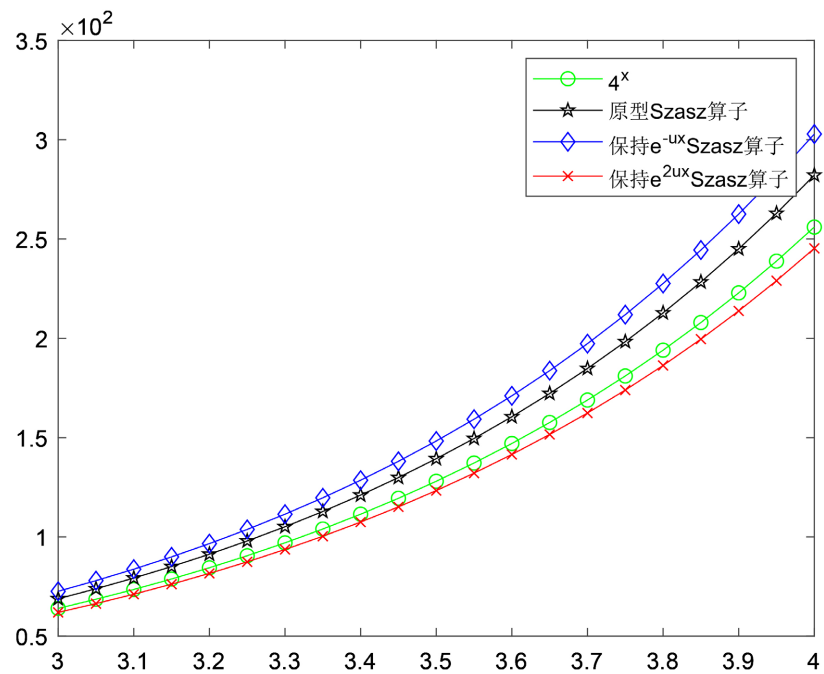
**表 1.** 三类算子对函数  $4^x$  逼近的均方根误差 ( $\mu = 1$ )

$n$	原型 Szász 算子	保持 $e^{-\mu x}$ 的 Szász 型算子	保持 $e^{2\mu x}$ 的 Szász 型算子
5	1.8187e+02	4.6815e+02	4.1836e+01
10	6.8980e+01	1.4096e+02	2.2405e+01
20	3.0439e+01	5.6721e+01	1.1590e+01
40	1.4341e+01	2.5645e+01	5.8935e+00



**Figure 1.** Estimate of the function  $4^x$  by the Szász operators preserving  $e^{2\mu x}$ , here  $n = 40$ ,  $\mu = 0.37, 1, 3, 10$

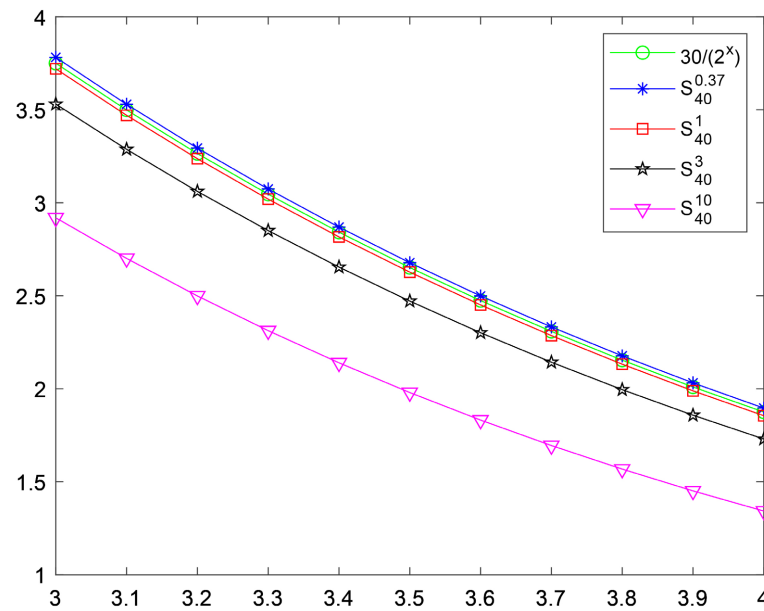
**图 1.** 保持函数  $e^{2\mu x}$  的 Szász 型算子对函数  $4^x$  的逼近情况, 其中  $n = 40$ ,  $\mu = 0.37, 1, 3, 10$



**Figure 2.** Estimate of the function  $4^x$  by three kinds of Szász operators preserving  $e^{2\mu x}$ ,  $e^{-\mu x}$ ,  $x$  respectively, here  $n = 40$ ,  $\mu = 1$

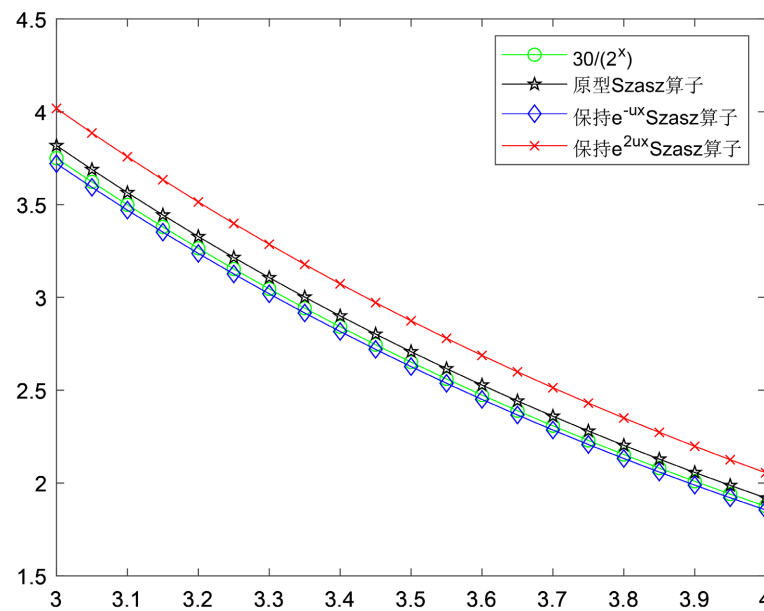
**图 2.** 保持函数  $e^{2\mu x}$ ,  $e^{-\mu x}$ ,  $x$  的三类 Szász 型算子对函数  $4^x$  的逼近情况, 其中  $n = 40$ ,  $\mu = 1$





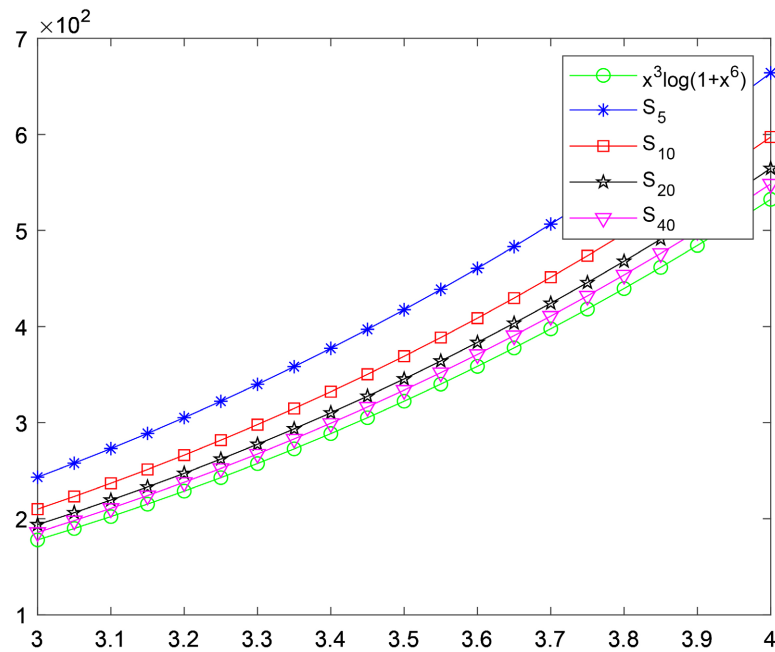
**Figure 3.** Estimate of the function  $\frac{30}{2^x}$  by the Szász operators preserving  $e^{-\mu x}$ , here  $n=40$ ,  $\mu=0.37,1,3,10$

**图 3.** 保持函数  $e^{-\mu x}$  的 Szász 型算子对函数  $\frac{30}{2^x}$  的逼近情况, 其中  $n=40$ ,  $\mu=0.37,1,3,10$



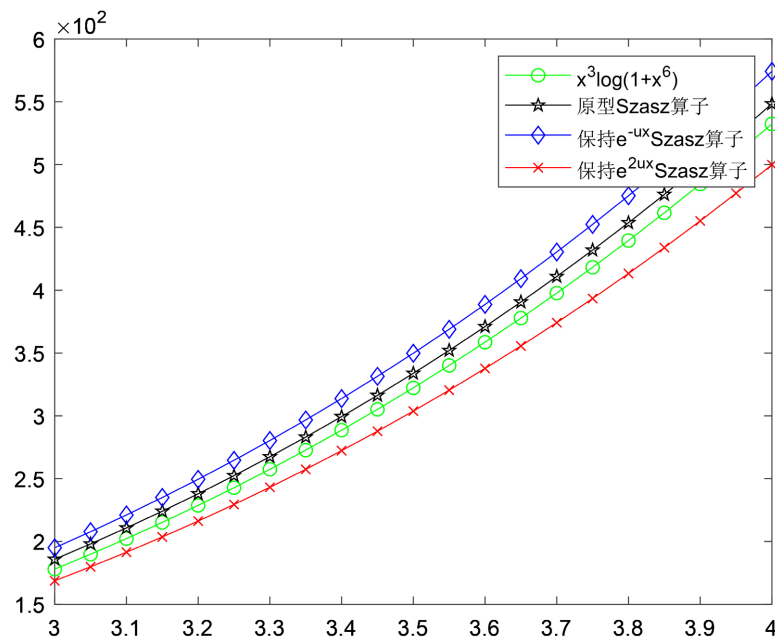
**Figure 4.** Estimate of the function  $\frac{30}{2^x}$  by three kinds of Szász operators preserving  $e^{2\mu x}$ ,  $e^{-\mu x}$ ,  $x$  respectively, here  $n=40$ ,  $\mu=1$

**图 4.** 保持函数  $e^{2\mu x}$ ,  $e^{-\mu x}$ ,  $x$  的三类 Szász 型算子对函数  $\frac{30}{2^x}$  的逼近情况, 其中  $n=40$ ,  $\mu=1$



**Figure 5.** Estimate of the function  $x^3 \log(1+x^6)$  by the Szász operators preserving  $x$ , here  $\mu=1$ ,  $n=5,10,20,40$

**图 5.** 保持函数  $x$  的 Szász 型算子对函数  $x^3 \log(1+x^6)$  的逼近情况, 其中  $\mu=1$ ,  $n=5,10,20,40$



**Figure 6.** Estimate of the function  $x^3 \log(1+x^6)$  by three kinds of Szász operators preserving  $e^{2\mu x}$ ,  $e^{-\mu x}$ ,  $x$  respectively, here  $n=40$ ,  $\mu=1$

**图 6.** 保持函数  $e^{2\mu x}$ ,  $e^{-\mu x}$ ,  $x$  的三类 Szász 型算子对函数  $x^3 \log(1+x^6)$  的逼近情况, 其中  $n=40$ ,  $\mu=1$

**Table 2.** Root mean square error of approximation of the function  $\frac{30}{2^x}$  by three kinds of operators ( $\mu = 1$ )**表 2.** 三类算子对函数  $\frac{30}{2^x}$  逼近的均方根误差 ( $\mu = 1$ )

$n$	原型 Szász 算子	保持 $e^{-\mu x}$ 的 Szász 型算子	保持 $e^{2\mu x}$ 的 Szász 型算子
5	4.6653e-01	1.9000e-01	2.1126e+00
10	2.2945e-01	9.7375e-02	9.6686e-01
20	1.1374e-01	4.9292e-02	4.6071e-01
40	5.6617e-02	2.4799e-02	2.2467e-01

**Table 3.** Root mean square error of approximation of the function  $x^3 \log(1+x^6)$  by three kinds of operators ( $\mu = 1$ )**表 3.** 三类算子对函数  $x^3 \log(1+x^6)$  逼近的均方根误差 ( $\mu = 1$ )

$n$	原型 Szász 算子	保持 $e^{-\mu x}$ 的 Szász 型算子	保持 $e^{2\mu x}$ 的 Szász 型算子
5	9.8496e+01	2.8100e+02	1.3337e+02
10	4.8439e+01	1.2647e+02	7.5136e+01
20	2.4018e+01	5.9975e+01	3.9958e+01
40	1.1958e+01	2.9202e+01	2.0615e+01

对于不同类型的函数, 不同算子的逼近效果不同, 参数  $\mu$  的取值也影响着算子的逼近效果。因此在处理实际问题中, 我们需要根据具体情况进行分析, 选取适当的参数, 以达到理想的逼近效果。

## 6. 结论

本文从理论上讨论了 King 型算子一致逼近的误差, 用一阶、二阶模给出了误差的具体量化表示。一方面为实际问题的解决提供了新的逼近工具; 另一方面进一步完善了逼近论的相关理论。为了满足计算机几何辅助作图的需要, 我们需要进一步研究构成该类算子的基函数的保形性质。

## 基金项目

国家自然科学基金(11871191); 河北省教育厅重点基金(ZD2019053); 河北师范大学重点基金(L2020Z03)。

## 参考文献

- [1] King, J.P. (2003) Positive Linear Operators Which Preserve  $x^2$ . *Acta Mathematica Hungarica*, **99**, 203-208. <https://doi.org/10.1023/A:1024571126455>
- [2] Acar, T., Aral, A. and Gonska, H. (2016) On Szász-Mirakyan Operators Preserving  $e^{2ax}$ ,  $a > 0$ . *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, 1-14. <https://doi.org/10.1007/s00009-016-0804-7>
- [3] Deveci, S., Acar, T. and Alagoz, O. (2020) Approximation by Gamma Type Operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 2772-2782. <https://doi.org/10.1002/mma.6083>
- [4] Huang, J., Qi, Q. and Yang, G. (2022) Approximation Properties of a Modified Szász Type Operators. *Pure Mathematics*, **12**, 803-813. <https://doi.org/10.12677/PM.2022.125091>
- [5] Huang, J. and Qi, Q. (2022) Approximation Properties of a New Gamma Operator. *Journal of Mathematics*, **2022**, Ar-

title ID: 5408136. <https://doi.org/10.1155/2022/5408136>

- [6] Ozsarac, F. and Acar, T. (2019) Reconstruction of Baskakov Operators Preserving Some Exponential Functions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 5124-5132. <https://doi.org/10.1002/mma.5228>
- [7] Acar, T., Aral, A. and Rasa, I. (2019) Positive Linear Operators Preserving  $\tau$  and  $\tau^2$ . *Constructive Mathematical Analysis*, **2**, 98-102. <https://doi.org/10.33205/cma.547221>
- [8] Acar, T., Montano, M., Garrancho, P. and Leonessa, V. (2019) On Bernstein-Chlodovsky Operators Preserving  $e^{-2x}$ . *The Bulletin of the Belgian Mathematical Society—Simon Stevin*, **26**, 681-698. <https://doi.org/10.36045/bbms/1579402817>
- [9] Acar, T., Montano, M., Garrancho, P. and Leonessa, V. (2020) Voronovskaya Type Results for Bernstein-Chlodovsky Operators Preserving  $e^{-2x}$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **49**, Article ID: 124307. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124307>
- [10] Acar, T., Mursaleen, M. and Deveci, S. (2020) Gamma Operators Reproducing Exponential Functions. *Advances in Difference Equations*, **1**, Article No. 423. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02880-x>
- [11] Duman, O. and Özarlan, M. (2007) Szász-Mirakyan Type Operators Providing a Better Error Estimation. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 1184-1188. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.10.007>
- [12] Duman, O., Özarlan, M. and Vecchia, B. (2009) Modified Szász-Mirakyan-Kantorovich Operators Preserving Linear Functions. *Turkish Journal of Mathematics*, **33**, 151-158. <https://doi.org/10.3906/mat-0801-2>
- [13] Păltănea, R. and Smuc, M. (2015) General Estimates of the Weighted Approximation on Interval  $[0, \infty)$  Using Moduli of Continuity. *Bulletin of the Transilvania University of Brăşov*, **8**, 93-108.
- [14] Gonska, H. (1984) Quantitative Korovkin-Type Theorems on Simultaneous Approximation. *Mathematische Zeitschrift*, **186**, 419-433. <https://doi.org/10.1007/BF01174895>
- [15] Păltănea, R. (1997) Optimal Estimates with Moduli of Continuity. *Results in Mathematics*, **32**, 318-331. <https://doi.org/10.1007/BF03322143>
- [16] Ditzian, Z. and Totik, V. (1987) Moduli of Smoothness. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4778-4>
- [17] Finta, Z. (2011) Remark on Voronovskaja Theorem for  $q$ -Bernstein Operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, **56**, 335-339.