Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2275-2283
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138234

一类无界域的陆启铿问题

刘 健，钟雨玲，胡琼方，杨 尧，谢 兵，冯志明*
乐山师范学院数理学院，四川 乐山

收稿日期：2023年6月29日；录用日期：2023年7月31日；发布日期：2023年8月7日

摘 要

陆启铿问题指的是一个域D是否是陆启铿域，陆启铿域是对所有的$z,w\in D$，Bergman核$K(z,w)$都不等于零的域。本文讨论了一类无界域$D=\left\{(z,u_1,u_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}:\mathrm{e}^{\lambda_1|z|^2}|u_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|z|^2}|u_2|^2<1\right\}$的陆启铿问题。

关键词

Bergman核，陆启铿问题

Lu Qi-Keng's Problem on Some Unbounded Domains

Jian Liu, Yuling Zhong, Qiongfang Hu, Yao Yang, Bing Xie, Zhiming Feng*
School of Mathematics and Physics, Leshan Normal University, Leshan Sichuan

Received: Jun. 29th, 2023; accepted: Jul. 31st, 2023; published: Aug. 7th, 2023

Abstract

The Lu Qi-keng problem refers to whether a domain D is a Lu Qi-keng domain. The Lu Qi-keng domain is a domain where all $z,w\in D$, and its Bergman kernel $K(z,w)$ are not equal to zero. In this paper, we investigate the Lu Qi-Keng problem for unbounded domains

$$D=\left\{(z,u_1,u_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}:\mathrm{e}^{\lambda_1|z|^2}|u_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|z|^2}|u_2|^2<1\right\}.$$

*通讯作者。

文章引用：刘健，钟雨玲，胡琼方，杨尧，谢兵，冯志明. 一类无界域的陆启铿问题[J]. 理论数学，2023，13(8): 2275-2283. DOI: 10.12677/pm.2023.138234

Keywords

Bergman Kernels, Lu Qi-Keng Problem

1. 引言

假定 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的域，定义 D 上平方可积解析函数空间

$$\mathcal{A}^2(D)=\left\{f\in\mathrm{Hol}(D):\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}V(z)<+\infty\right\},$$

这里 $z\in D$，$\mathrm{Hol}(D)$ 表示 D 上解析函数全体，$\mathrm{d}V$ 表示 Lebesgue 测度。如果 $\mathcal{A}^2(D)\neq 0$，记空间 $\mathcal{A}^2(D)$ 的标准正交基为 $\left\{\varphi_j(z):1\le j\le\dim\mathcal{A}^2(D)\right\}$，称

$$K(z,w)=\sum_{j=1}^{\dim\mathcal{A}^2(D)}\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

为域 D 的 Bergman 核，Bergman 核在 $\mathcal{A}^2(D)$ 中具有再生性，即对任意 $f\in\mathcal{A}^2(D)$，有

$$f(z)=\int_D K(z,w)f(w)\mathrm{d}V(w).$$

对于包含原点的 Reinhardt 域 D，D 上解析函数有以下幂级数表示：

$$f(z)=\sum_{\boldsymbol{m}\ge 0}c_{\boldsymbol{m}}z^{\boldsymbol{m}},$$

这里 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in D$，$\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{N}^n$，$z^{\boldsymbol{m}}=z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}$。并且 $\dfrac{z^{\boldsymbol{m}}}{\left\|z^{\boldsymbol{m}}\right\|}$ 是 $\mathcal{A}^2(D)$ 的标准正交基，因此[1]

$$K(z,w)=\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^n}\frac{z^{\boldsymbol{m}}\overline{w^{\boldsymbol{m}}}}{\left\|z^{\boldsymbol{m}}\right\|^2}.$$

Bergman 核在多复变函数论和复几何中起着重要的作用，虽然 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域都存在 Bergman 核，但其表达式一般没有显示公式，用显式公式计算 Bergman 核函数是多复变函数论的一个重要研究方向，用 Bergman 核的显示表达式，可以研究域的陆启铿问题，所谓陆启铿问题指的是一个域是否是陆启铿域，陆启铿域是对所有的 $z,w\in D$，Bergman 核 $K(z,w)$ 都不等于零的域，如果一个域是陆启铿域，则它的表示域存在[2]。关于 Bergman 核的计算，可参考综述文献[3] [4]，有界域的陆启铿问题研究可参考综述文献[5]，近期这方面的研究可参考[6] [7] [8] [9]等。在[7]和[9]中研究了一类无界域——Fock-Bargmann-Hartogs 域

$$D_{n,m}=\left\{(z,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m:\|w\|^2<\mathrm{e}^{-\mu\|z\|^2}\right\},\mu>0$$

的陆启铿问题，本文我们研究另一类无界域(定义见(2.1))的 Bergman 核的计算，并研究其陆启铿问题。

2. 主要结果

定理 2.1. 令 $\lambda_1 \ge \lambda_2 > 0$，

$$D=\left\{(z,u_1,u_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}:\mathrm{e}^{\lambda_1|z|^2}|u_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|z|^2}|u_2|^2<1\right\} \tag{2.1}$$

则域 D 的 Bergman 核为

$$K(Z,W)=\frac{2\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)z\bar{w}}}{\pi^3}\frac{(2\lambda_1-\lambda_2)\rho_1+(2\lambda_2-\lambda_1)\rho_2+\lambda_1+\lambda_2}{(1-\rho_1-\rho_2)^4}, \tag{2.2}$$

其中

$$Z=(z,u_1,u_2),\ W=(w,v_1,v_2)\in D$$

$$\rho_1=\mathrm{e}^{\lambda_1 z\bar{w}}u_1\overline{v_1},\ \rho_2=\mathrm{e}^{\lambda_2 z\bar{w}}u_2\overline{v_2}.$$

由**定理** 2.1，我们得到以下结论。

定理 2.2. 在**定理** 2.1 的假设下，则域 D 的 Bergman 核 $K(Z,W)$ 在 $D\times D$ 上有零点的充要条件是 $\lambda_1 > 2\lambda_2 > 0$。

3. 定理 2.1 的证明

证明. 记

$$\mathcal{A}^2(D)=\left\{f\in\mathrm{Hol}(D):\int_D|f(Z)|^2\,\mathrm{d}V(Z)<+\infty\right\},$$

这里 $Z=(z,u_1,u_2)\in D$， $\mathrm{Hol}(D)$ 表示 D 上解析函数全体， $\mathrm{d}V$ 表示 Lebesgue 测度。对于包含原点的 Reinhardt 域 D 上的全纯函数 f，在 D 上有幂级数展开式(见[1])

$$f(Z)=\sum\nolimits_{m,\boldsymbol{n}\ge 0}a_{m\boldsymbol{n}}z^m u^{\boldsymbol{n}},$$

这里

$$Z=(z,u)=(z,u_1,u_2),\boldsymbol{n}=(n_1,n_2),u^{\boldsymbol{n}}=u_1^{n_1}u_2^{n_2}.$$

容易直接证明 $\left\{\dfrac{z^m u^{\boldsymbol{n}}}{\|z^m u^{\boldsymbol{n}}\|}\right\}$ 是 Reinhardt 域上的一组规范正交系，可以证明它是完备的。因而有

$$K(Z,W)=\sum_{m,\boldsymbol{n}\ge 0}\frac{z^m u^{\boldsymbol{n}}\,\overline{w^m v^{\boldsymbol{n}}}}{\|z^m u^{\boldsymbol{n}}\|^2}$$

其中

$$Z=(z,u)=(z,u_1,u_2),W=(w,v)=(w,v_1,v_2)\in D,$$

$$\|z^m u^{\boldsymbol{n}}\|^2=\int_D|z^m u^{\boldsymbol{n}}|^2\,\mathrm{d}V(z)\mathrm{d}V(u_1)\mathrm{d}V(u_2).$$

直接计算得

$$\begin{aligned}\|z^m u^{\boldsymbol{n}}\|^2&=\int_D|z^m u^{\boldsymbol{n}}|^2\,\mathrm{d}V(z)\mathrm{d}V(u_1)\mathrm{d}V(u_2)\\&=\int_{\mathbb{C}}|z^m|^2\,\mathrm{d}V(z)\int_{\mathrm{e}^{\lambda_1|z|^2}|u_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|z|^2}|u_2|^2<1}|u^{\boldsymbol{n}}|^2\,\mathrm{d}V(u_1)\mathrm{d}V(u_2)\\&=\int_{\mathbb{C}}|z^m|^2\,\mathrm{e}^{-\sum_i^2(n_i+1)\lambda_i|z|^2}\,\mathrm{d}V(z)\int_{|w_1|^2+|w_2|^2<1}|w^{\boldsymbol{n}}|^2\,\mathrm{d}V(w_1)\mathrm{d}V(w_2)\\&=\frac{\pi^3\boldsymbol{m}!}{\left(\sum_{i=1}^2(n_i+1)\lambda_i\right)^{\boldsymbol{m}+1}}\frac{n_1!n_2!}{(n_1+n_2+2)!}.\end{aligned}$$

上面用到

$$\begin{aligned}
&\int_{|w_1|^2+|w_2|^2<1}\left|w^{\boldsymbol{n}}\right|^2\mathrm{d}V(w_1)\mathrm{d}V(w_2)\\
&=(2\pi)^2\int_{\substack{r_1^2+r_2^2<1\\ r_1\ge0,r_2\ge0}}r_1^{2n_1+1}r_2^{2n_2+1}\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2=\pi^2\int_{\substack{x_1+x_2<1\\ x_1\ge0,x_2\ge0}}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&=\frac{\pi^2}{n_2+1}\int_0^1x_1^{n_1}(1-x_1)^{n_2+1}\mathrm{d}x_1=\pi^2\frac{n_1!n_2!}{(n_1+n_2+2)!}
\end{aligned}$$

以及

$$\int_{\mathbb{C}}\left|z^{\boldsymbol{m}}\right|^2\mathrm{e}^{-\sum_i^2(n_i+1)\lambda_i|z|^2}\mathrm{d}V(z)=\frac{\pi\boldsymbol{m}!}{\left(\sum_{i=1}^2(n_i+1)\lambda_i\right)^{\boldsymbol{m}+1}}.$$

这里用到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}}|z|^{2k}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}V(z)&=2\pi\int_0^{+\infty}r^{2k}\mathrm{e}^{-\alpha r^2}r\mathrm{d}r=\pi\int_0^{+\infty}x^k\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{\alpha^{k+1}}\int_0^{+\infty}x^k\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\pi\frac{k!}{\alpha^{k+1}}(\alpha>0).
\end{aligned}$$

所以当 $Z=(z,u_1,u_2),W=(w,v_1,v_2)\in D$ 时

$$\begin{aligned}
K(Z,W)&=\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\ge0}\frac{z^{\boldsymbol{m}}u^{\boldsymbol{n}}\overline{w^{\boldsymbol{m}}v^{\boldsymbol{n}}}}{\left\|z^{\boldsymbol{m}}u^{\boldsymbol{n}}\right\|^2}\\
&=\frac{1}{\pi^3}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\ge0}\frac{\left(\sum_{i=1}^2(n_i+1)\lambda_i\right)^{\boldsymbol{m}+1}(n_1+n_2+2)!}{\boldsymbol{m}!n_1!n_2!}z^{\boldsymbol{m}}u^{\boldsymbol{n}}\overline{w^{\boldsymbol{m}}v^{\boldsymbol{n}}}\\
&=\frac{1}{\pi^3}\sum_{\boldsymbol{n}\ge0}\varphi(n_1,n_2)\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^2(n_i+1)\lambda_iz\overline{w}}\frac{(n_1+n_2+2)!}{n_1!n_2!}u^{\boldsymbol{n}}\overline{v^{\boldsymbol{n}}}\\
&=\frac{\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^2\lambda_iz\overline{w}}}{\pi^3}\sum_{\boldsymbol{n}\ge0}\varphi(n_1,n_2)\frac{(n_1+n_2+2)!}{n_1!n_2!}\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2},
\end{aligned}$$

这里

$$\rho_1=\mathrm{e}^{\lambda_1z\overline{w}}u_1\overline{v_1},\ \ \rho_2=\mathrm{e}^{\lambda_2z\overline{w}}u_2\overline{v_2},\ \ \varphi(n_1,n_2)=\sum_{i=1}^2(n_i+1)\lambda_i\text{。}$$

由于

$$(1-\rho_1-\rho_2)^{-\alpha}=\sum_{n_1\ge0,n_2\ge0}\frac{\Gamma(\alpha+n_1+n_2)}{\Gamma(\alpha)n_1!n_2!}\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}(\alpha>0),$$

$$\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^kt^n=n^kt^n,$$

于是有

$$\begin{aligned}
K(Z,W)&=\frac{2\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^2\lambda_iz\overline{w}}}{\pi^3}\sum_{\boldsymbol{n}\ge0}\varphi(n_1,n_2)\frac{\Gamma(n_1+n_2+3)}{\Gamma(3)n_1!n_2!}\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\\
&=\frac{2\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^2\lambda_iz\overline{w}}}{\pi^3}\varphi\left(t_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1},t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right)\frac{1}{(1-t_1\rho_1-t_2\rho_2)^3}\bigg|_{t_1=1,t_2=1}.
\end{aligned}$$

记

$$\varphi\left(n_1,n_2\right)=c_1n_1+c_2n_2+c_0,$$

这里

$$c_1=\lambda_1,\ c_2=\lambda_2,\ c_0=\lambda_1+\lambda_2.$$

根据

$$\begin{aligned}t_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\frac{1}{\left(1-t_1\rho_1-t_2\rho_2\right)^3}&=\frac{3\rho_1t_1}{\left(1-t_1\rho_1-t_2\rho_2\right)^4},\\ t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\frac{1}{\left(1-t_1\rho_1-t_2\rho_2\right)^3}&=\frac{3\rho_2t_2}{\left(1-t_1\rho_1-t_2\rho_2\right)^4},\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}&\varphi\left(t_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1},t_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right)\frac{1}{\left(1-t_1\rho_1-t_2\rho_2\right)^3}\Bigg|_{t_1=1,t_2=1}\\ &=\frac{3c_1\rho_1}{\left(1-\rho_1-\rho_2\right)^4}+\frac{3c_2\rho_2}{\left(1-\rho_1-\rho_2\right)^4}+\frac{c_0}{\left(1-\rho_1-\rho_2\right)^3}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}K\left(Z,W\right)&=\frac{2\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{2}\lambda_iz\overline{w}}}{\pi^3}\left(\frac{3c_1\rho_1+3c_2\rho_2}{\left(1-\rho_1-\rho_2\right)^4}+\frac{c_0}{\left(1-\rho_1-\rho_2\right)^3}\right)\\ &=\frac{2\mathrm{e}^{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)z\overline{w}}}{\pi^3}\frac{\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)\rho_1+\left(2\lambda_2-\lambda_1\right)\rho_2+\lambda_1+\lambda_2}{\left(1-\rho_1-\rho_2\right)^4}.\end{aligned}$$

证毕

4. 定理 2.2 的证明

为了研究**定理** 2.1 中域 D 的陆启铿问题，我们先给出以下结论。

定理 4.1. 在定理 2.1 的条件下，以下结论成立：

(i) 如果 $Z,W\in D$，那么

$$\left|\rho_1\right|<1,\ \left|\rho_2\right|<1,\ \left|\rho_1+\rho_2\right|<1 \tag{4.1}$$

(ii) 如果 $\theta_1\in\mathbb{R},\theta_2\in\mathbb{R},0\le r_1<1,0\le r_2<1$ 和 $r_1+r_2<1$，则存在 $Z,W\in D$，使得 $\rho_1\left(Z,W\right)=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $\rho_2\left(Z,W\right)=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$。

证明. (i) 由于

$$\begin{aligned}\rho_1&=\mathrm{e}^{\lambda_1z\overline{w}}u_1\overline{v_1}=u_1\overline{v_1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}z\right)^m}{\sqrt{m!}}\overline{\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}w\right)^m}{\sqrt{m!}}}\\ &=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(u_1\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}z\right)^m}{\sqrt{m!}}\right)\left(\overline{v_1\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}w\right)^m}{\sqrt{m!}}}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\psi_m^{\lambda_1}\left(z,u_1\right)\overline{\psi_m^{\lambda_1}\left(w,v_1\right)}\end{aligned}$$

同样得

$$\rho_2=\mathrm{e}^{\lambda_2 z\bar{w}}u_2\overline{v_2}=\sum_{m=0}^{+\infty}\psi_m^{\lambda_2}(z,u_2)\overline{\psi_m^{\lambda_2}(w,v_2)},$$

其中

$$\psi_m^{\lambda}(z,u)=u\frac{\left(\sqrt{\lambda}z\right)^m}{\sqrt{m!}}$$

于是由不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{+\infty}a_i\overline{b_i}\right|^2\le\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|^2\sum_{i=1}^{+\infty}|b_i|^2$$

得

$$\begin{aligned}|\rho_1+\rho_2|^2&\le\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\psi_m^{\lambda_1}(z,u_1)\overline{\psi_m^{\lambda_1}(z,u_1)}+\sum_{m=0}^{+\infty}\psi_m^{\lambda_2}(z,u_2)\overline{\psi_m^{\lambda_2}(z,u_2)}\right)\\&\times\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\psi_m^{\lambda_1}(w,v_1)\overline{\psi_m^{\lambda_1}(w,v_1)}+\sum_{m=0}^{+\infty}\psi_m^{\lambda_2}(w,v_2)\overline{\psi_m^{\lambda_2}(w,v_2)}\right)\\&=\left(\mathrm{e}^{\lambda_1|z|^2}|u_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|z|^2}|u_2|^2\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda_1|w|^2}|v_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|w|^2}|v_2|^2\right).\end{aligned}$$

再根据

$$\mathrm{e}^{\lambda_1|z|^2}|u_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|z|^2}|u_2|^2<1,\ \mathrm{e}^{\lambda_1|w|^2}|v_1|^2+\mathrm{e}^{\lambda_2|w|^2}|v_2|^2<1$$

得

$$|\rho_1+\rho_2|<1.$$

同样得

$$|\rho_1|<1,\ |\rho_2|<1.$$

(ii) 令 $Z=(z,,u_1,u_2)=(0,u_1,u_2),W=(w,v_1,v_2)=(0,v_1,v_2)$，则 $\rho_1=u_1\overline{v_1},\rho_2=u_2\overline{v_2}$，并且

$$|u_1|^2+|u_2|^2<1,\ |v_1|^2+|v_2|^2<1.$$

如果 r_1 和 r_2 至少有一个为零，则结论成立。以下假定 $0<r_1<1,0<r_2<1,r_1+r_2<1$，并证明关于 (u_1,u_2,v_1,v_2) 的不等式组

$$\begin{cases}u_1\overline{v_1}=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\\u_2\overline{v_2}=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},\\|u_1|^2+|u_2|^2<1,\\|v_1|^2+|v_2|^2<1.\end{cases}\tag{4.2}$$

有解。

令 $u_j=\sqrt{x_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_j},0<x_j,1\le j\le2$，则上面不等式组(4.2)等价于

$$v_j=\frac{r_j}{\sqrt{x_j}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi_j-\theta_j)},\ 0<x_1+x_2<1,\ \frac{r_1^2}{x_1}+\frac{r_2^2}{x_2}<1.$$

进一步化简得

$$r_1^2 < x_1 < 1,\ \frac{r_2^2 x_1}{x_1 - r_1^2} < x_2 < 1 - x_1.$$

于是不等式组(4.2)有解等价于不等式组

$$r_1^2 < x_1 < 1,\ -x_1^2 + \left(1 + r_1^2 - r_2^2\right)x_1 - r_1^2 > 0$$

有解。容易验证当 $r_1 + r_2 < 1$ 时，$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + r_1^2 - r_2^2\right)$ 是它的解。**证毕**

现在给出**定理** 2.2 的证明。

定理 2.2 的证明。(i) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时，有

$$K(Z,W) = \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda_1 z\bar{w}}}{\pi^3}\frac{\lambda_1(\rho_1 + \rho_2 + 2)}{(1 - \rho_1 - \rho_2)^4}.$$

因

$$|\rho_1 + \rho_2 + 2| \ge 2 - |\rho_1 + \rho_2| \ge 1,$$

所以

$$K(Z,W) \ne 0,\ \forall Z,W \in D.$$

(ii) 当 $\lambda_1 = 2\lambda_2$ 时，有

$$K(Z,W) = \frac{2\mathrm{e}^{3\lambda_2 z\bar{w}}}{\pi^3}\frac{3\lambda_2(\rho_1 + 1)}{(1 - \rho_1 - \rho_2)^4}.$$

由此得

$$K(Z,W) \ne 0,\ \forall Z,W \in D.$$

(iii) 当 $\lambda_1 \ne \lambda_2, \lambda_1 \ne 2\lambda_2$ 时，如果 $K(Z,W) = 0$，根据(2.2)有

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1 - 2\lambda_2}{2\lambda_1 - \lambda_2}\rho_2 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1 - \lambda_2},\ \rho_1 + \rho_2 = \frac{3(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\lambda_1 - \lambda_2}\rho_2 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{4.3}$$

令 $\rho_2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$|\rho_1|^2 = \frac{(\lambda_1 - 2\lambda_2)^2 r^2 - 2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2) r\cos(\theta) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

$$|\rho_1 + \rho_2|^2 = \frac{9(\lambda_1 - \lambda_2)^2 r^2 - 6(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) r\cos(\theta) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

根据

$$|\rho_1| < 1,\ |\rho_2| < 1,\ |\rho_1 + \rho_2| < 1,$$

得不等式组

$$\begin{cases} 0 \le r < 1, \\ \dfrac{(\lambda_1 - 2\lambda_2)^2 r^2 - 2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2) r\cos(\theta) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} < 1, \\ \dfrac{9(\lambda_1 - \lambda_2)^2 r^2 - 6(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) r\cos(\theta) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} < 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

关于 (r,θ) 有解。

记

$$f(r,\theta)=(\lambda_1-2\lambda_2)^2r^2-2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-2\lambda_2)r\cos(\theta)+(\lambda_1+\lambda_2)^2-(2\lambda_1-\lambda_2)^2,$$
$$g(r,\theta)=9(\lambda_1-\lambda_2)^2r^2-6(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)r\cos(\theta)+(\lambda_1+\lambda_2)^2-(2\lambda_1-\lambda_2)^2.$$

则 $f=0$ 的解为

$$r=\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)\pm\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2(\cos(\theta))^2+3(\lambda_1-2\lambda_2)\lambda_1}}{\lambda_1-2\lambda_2};$$

$g=0$ 的解为

$$r=\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)\pm\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2(\cos(\theta))^2+3(\lambda_1-2\lambda_2)\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

(iii-1) 当 $\lambda_1>2\lambda_2$ 时，令 $\theta=0, f=0$ 的解为

$$r=-1,\frac{3\lambda_1}{\lambda_1-2\lambda_2}=3+\frac{6\lambda_2}{\lambda_1-2\lambda_2};$$

$g=0$ 的解为

$$r=-\frac{\lambda_1-2\lambda_2}{3(\lambda_1-\lambda_2)},\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}=1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

此时不等式 $f<0$ 的解为

$$\theta=0,-1<r<3+\frac{6\lambda_2}{\lambda_1-2\lambda_2}.$$

不等式 $g<0$ 的解为

$$\theta=0,-\frac{\lambda_1-2\lambda_2}{3(\lambda_1-\lambda_2)}<r<1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

这表明不等式组(4.4)有解

$$\theta=0,\ 0\le r<1,$$

$$\rho_2=r,\ \rho_1=\frac{\lambda_1-2\lambda_2}{2\lambda_1-\lambda_2}r-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_1-\lambda_2}.$$

当 $0\le r<\min\left\{1,\frac{\lambda_1-2\lambda_2}{3(\lambda_1-\lambda_2)}\right\}$ 时，有 $|\rho_1|+|\rho_2|<1$，根据定理 4.1 得 $K(Z,W)=0$ 在 $D\times D$ 内有解。

(iii-2) 当 $\lambda_2<\lambda_1<2\lambda_2$ 时，如果不等式组(4.4)有解，则 $r=0$ 不可能是(4.4)的解，这是因为

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)^2}>1.$$

于是解 (r,θ) 满足以下条件

$$\max\left\{0,\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)+\sqrt{\Delta}}{\lambda_1-2\lambda_2},\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)-\sqrt{\Delta}}{3(\lambda_1-\lambda_2)}\right\} < r < \min\left\{1,\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)-\sqrt{\Delta}}{\lambda_1-2\lambda_2},\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)+\sqrt{\Delta}}{3(\lambda_1-\lambda_2)}\right\}, \tag{4.5}$$

这里

$$\Delta=(\lambda_1+\lambda_2)^2(\cos(\theta))^2+3(\lambda_1-2\lambda_2)\lambda_1.$$

由(4.5)可知

$$\frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)-\sqrt{\Delta}}{\lambda_1-2\lambda_2}>0,\ \frac{\cos(\theta)(\lambda_1+\lambda_2)+\sqrt{\Delta}}{3(\lambda_1-\lambda_2)}>0.$$

这等价于

$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda_1+\lambda_2}<\cos(\theta)<\frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

进一步化简得

$$0<3(\lambda_1-2\lambda_2)\lambda_1.$$

这和条件 $\lambda_1-2\lambda_2<0$ 矛盾。因此在 $\lambda_2<\lambda_1<2\lambda_2$ 时，对一切 $Z,W\in D$，Bergman 核 $K(Z,W)\neq 0$。**证毕**

致　谢

大学生创新创业训练计划项目(No: S202210649222)。

参考文献

[1] 史济怀. 多复变函数论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 陆启铿. 关于常曲率的 Kähler 流形[J]. 数学学报, 1966, 16(2): 269-281.

[3] 殷慰萍. 有界域的 Bergman 核函数显示表示的最新进展[J]. 数学进展, 2002, 31(4): 295-312.

[4] 殷慰萍. 华罗庚域研究的综述[J]. 数学进展, 2007, 36(2): 129-152.

[5] 殷慰萍. $\mathbb{C}^n$ 中有界域的 Bergman 核函数的零点问题[J]. 数学进展, 2008, 37(1): 1-14.

[6] Zhang, L. and Yin, W. (2009) Lu Qi-Keng's Problem on Some Complex Ellipsoids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **357**, 364-370. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.04.018

[7] Yamamori, A. (2013) The Bergman Kernel of the Fock-Bargmann-Hartogs Domain and the Polylogarithm Function. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **58**, 783-793. https://doi.org/10.1080/17476933.2011.620098

[8] Hao, Y.H. and Wang, A. (2015) The Bergman Kernels of Generalized Bergman-Hartogs Domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **429**, 326-336. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.04.023

[9] Dai, J. and Li, Y. (2022) The Bergman Kernel and Projection on the Fock-Bargmann-Hartogs Domain. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **67**, 34-48. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1816982