

拓扑空间上一类函数的极限及连续性

康晨佳, 邹志伟

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2023年6月25日; 录用日期: 2023年7月26日; 发布日期: 2023年8月2日

摘要

极限和连续是实数集理论最重要的概念, 而实数集可以看作特殊的拓扑空间, 因此如何定义拓扑空间到实数域上函数的极限及连续是具有重要研究意义的。本文借助于拓扑空间中邻域的概念给出了极限和连续的定义, 证明了它们的充要条件并讨论了相关性质。

关键词

拓扑空间, 连续函数, 极限

Limit and Continuity of a Class of Functions on Topological Spaces

Chenjia Kang, Zhiwei Zou

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: Jun. 25th, 2023; accepted: Jul. 26th, 2023; published: Aug. 2nd, 2023

Abstract

Limit and continuity are the most important concepts in the theory of the real number set, and the real number set can be regarded as a special topological space, so how to define the limit and continuity of the function from the topological space to the real number field is of great research significance. In this paper, we give the definition of limit and continuity by means of the concept of neighborhood in topological space, prove their sufficient and necessary conditions, and discuss their related properties.

Keywords

Topological Space, Continuous Function, Limit

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

众所周知, 拓扑空间是一种数学结构, 可以在上面形式化地定义出如收敛、连通、连续等概念。拓扑空间在现代数学的各个分支都有应用, 是一个居于中心地位的、统一性的概念。拓扑空间有独立研究的价值, 研究拓扑空间的数学分支称为拓扑学。连续映射理论是拓扑学中最重要研究内容之一。不少学者在拓扑空间中引入了各种各样的极限和连续性的概念, 并系统研究了各种连续的性质及其应用(参考文献[1]-[9]等), 丰富了拓扑空间理论。本文在此研究基础上对拓扑空间到拓扑空间, 实数到实数的连续函数和恒等映射等概念进行推广给出了拓扑空间到实数域上极限和连续函数等概念(参考文献[10] [11] [12]), 研究了拓扑空间上连续映射的等价条件, 并讨论了拓扑空间中连续函数的基本性质。本文进一步丰富和完善了连续映射理论, 为深入研究拓扑空间理论提供了新的理论工具。

2. 预备知识

本节给出实数集上极限和连续函数以及拓扑空间中的基本概念, 更多结果见参考文献[10] [11] [12]:

定义 2.1. [10] 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U_{\delta(x_0)}$ 中有定义, 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时有极限存在且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么我们就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

定义 2.2. [10] (函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义) 设函数 f 在点 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0; \delta')$ 内有定义, A 为定数。若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta (< \delta')$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

定义 2.3. [11] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$, 如果 Y 中每一个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的一个开集, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个连续映射, 简称映射 f 连续。

定义 2.4. [11] 设 X 是一个拓扑空间, 如果 X 的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖, 则称拓扑空间 X 是一个紧致空间。

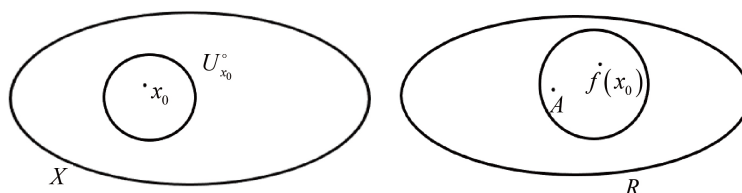
定义 2.5. [11] 设 X 是一个拓扑空间, Y 是 X 中的一个子集。如果 Y 作为 X 的子空间是一个紧致子空间, 则称 Y 是拓扑空间 X 的一个紧致子集。

3. 主要结果与证明

实数集上极限可用邻域来刻画, 即 $f: X \rightarrow Y$ 在 x 趋于 x_0 时有极限, 而拓扑空间天然有邻域的定义, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 。类似可给出拓扑空间到实数域上函数极限的定义:

定义 3.1. 当 $f: X \rightarrow R$, $x_0 \in X$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U_{x_0}^\circ$, 使得 $\forall x \in U_{x_0}^\circ$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称拓扑连续函数 f 在 x_0 的极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0)$ 。

图片示例如下:



定理 3.1. (极限的唯一性) 设 A, B 都是连续函数 f 在点 x_0 处的极限, 则 $A = B$ 。

证明: 根据拓扑连续函数极限的定义可知: $\forall \varepsilon > 0, \exists U_1^\circ(x_0), \forall x \in U_1^\circ(x_0): |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \varepsilon > 0, \exists U_2^\circ(x_0), \forall x \in U_2^\circ(x_0): |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ 取 $U^\circ(x_0) = \min\{U_1^\circ(x_0), U_2^\circ(x_0)\}$, 当 $\forall x \in U^\circ(x_0)$ 时由于 ε 可以任意接近于 0 可知 $A = B = f(x_0)$ 。

定理 3.2. (局部保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$, $\exists U_{x_0}^\circ$, 使得当 $\forall x \in U^\circ(x_0)$ 时, $f(x) > 0$ 成立。

证明: 取 $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, 由 $\forall \varepsilon > 0, \exists U_{x_0}^\circ$, 使得 $\forall x \in U_{x_0}^\circ$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ 即 $f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$, 当 $\forall x \in U^\circ(x_0)$ 时, 有 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$ 。

推论 3.1. (线性关系) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 由此可推出下列式子也成立

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k_1 f(x) + k_2 g(x)) = k_1 f(x_0) + k_2 g(x_0)。$$

证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists U_{x_0}^\circ$, 使得 $\forall x \in U_{x_0}^\circ$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|k_1|}, |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|k_2|}$

$$|[k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] - [k_1 f(x_0) \pm k_2 g(x_0)]| \leq |k_1 f(x) - k_1 f(x_0)| + |k_2 g(x) - k_2 g(x_0)| < \frac{|k_1| \varepsilon}{2|k_1|} + \frac{|k_2| \varepsilon}{2|k_2|} = \varepsilon。$$

推论 3.2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则 $\exists U_{x_0}^\circ > 0$, 当 $x \in U^\circ(x_0)$ 时, $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ 成立。

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 及 $||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A|$ 可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ 令 $g(x) = \frac{|A|}{2}$, 由 $\frac{|A|}{2} < |A|$ 及定理 3.2 可知 $\exists U_{x_0}^\circ > 0$, 当 $x \in U_{x_0}^\circ$ 时成立 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ 。

推论 3.3. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $\exists U_{x_0}^\circ$, 使得 $x \in U^\circ(x_0)$ 时, 成立 $f(x) > g(x)$ 则 $A > B$ 。

证明: (反证法) 若 $B > A$, 则由定理 3.2 知, 当 $x \in U_{1(x_0)}^\circ$ 时 $\exists U_{1(x_0)}^\circ, g(x) > f(x)$ 取 $U_2^\circ(x_0) = \min\{U^\circ(x_0), U_{1(x_0)}^\circ\}$, 则当 $x \in U_{2(x_0)}^\circ$ 时, 既有 $g(x) > f(x)$ 又有 $g(x) \leq f(x)$ 从而产生矛盾。

推论 3.4. (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists U_{x_0}^\circ$ 使得 $f(x)$ 在 $U_{x_0}^\circ$ 中有界。

证明: 取常数 M 和 m , 满足 $m < A < M$, 令 $g(x) = m, h(x) = M$ 为两个常拓扑算子, 由定理 3.2 可知 $\exists U_{x_0}^\circ$, 当 $x \in U_{x_0}^\circ$ 时成立 $m < f(x) < M$ 。

顺便指出, 如果 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 我们可以取 $G = \max\{|m|, |M|, |f(x_0)|\}$, 则当 $x \in U_{x_0}^\circ$ 时成立 $|f(x)| \leq G$ 。

定理 3.3. (迫敛性) 若 $\exists U_{x_0}^\circ$, 使得 $x \in U_{x_0}^\circ$ 时成立 $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 可知 $\exists U_1(x_0)$, $\forall x \in U_1(x_0): |h(x) - A| < \varepsilon$, 从而 $h(x) < A + \varepsilon$ 由

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ 可知 $\exists U_2(x_0) > 0$, $\forall x \in U_2(x_0): |g(x) - A| < \varepsilon$, 从而 $A - \varepsilon < g(x)$ 取

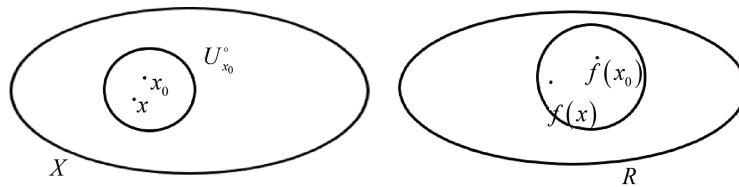
$U_3(x_0) = \min\{U_1(x_0), U_2(x_0), U(x_0)\}$, $\forall x \in U_3(x_0): A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$ 时 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

实数集上连续函数也可用邻域来刻画, 即 $f: X \rightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处连续, 而拓扑空间天然有邻域的定义, 具体见参考文献[10], 因此给出拓扑空间上连续函数的定义:

定义 3.2. 设 (X, τ) 是个拓扑空间, 我们有映射 $f: X \rightarrow R$, $x \mapsto f(x)$, 则称 f 为拓扑空间 (X, τ) 上的一个拓扑连续函数。

定义 3.3. 设 f 为拓扑空间 (X, τ) 上的一个拓扑连续函数, $x_0 \in X$ 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0$ 的一个开邻域 U_{x_0} , 使得当 $x \in U_{x_0}$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续。若 $\forall x \in X$, f 在 x 处连续, 则称 f 为拓扑的连续函数。

图片示例如下:



例 3.1. $X = \{a, b, c\}$ $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ 则 f 在 $x = a$ 处连续, f 在 $x = b$ 及 $x = c$ 处不连续。

例 3.2. 若 X 为离散拓扑空间, 则 X 上任意拓扑函数必连续。

证明: (反证法) 假设 $\exists x_1, x_2 \in X$, 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 必 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $f(x_2) \notin U(f(x_1), \varepsilon)$ 又因为 f 在 x_1 处连续, $\exists U_{x_1}$ 使得 $\forall x \in U_{x_1}$, 必有 $f(x) \in U(f(x_1), \varepsilon)$, 得到 $f(x_2) \in U_{x_1}$ 所以 $f(x_2) \in U(f(x_1), \varepsilon)$, 与假设矛盾。

例 3.3. 平庸拓扑空间上的拓扑连续函数必为恒等映射。

证明: 已知 (X, τ) 为平庸拓扑空间, 对 $\forall x \in X$, $f(x) \in X$, $\exists$ 映射 $f: X \rightarrow X$, 定义 $f(x) = x$, 则必为恒等映射。

推论 3.5. 设 $f: X \rightarrow R$ 是一个映射, 则以下两个条件等价:

- (1) $f: X \rightarrow R$ 是拓扑连续函数;
- (2) f 为 (X, τ) 到 (R, τ_0) 上的拓扑连续映射。

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $V \in \tau_0$, 令 $f^{-1}(V) = U$, $\forall x \in U$, 即要证 $U \in \tau$, $\forall x \in U$ 有 $f(x_0) \in V$ $\exists a, b \in R$ 使得 $f(x_0) \in (a, b) \subseteq V$ 又因为 f 在 x_0 处连续所以 $\exists U_{x_0} \in \tau$ 使得 $f(U_{x_0}) \subseteq (a, b) \subseteq V$ 有 $U_{x_0} \subseteq U$ 所以 $U \in \tau$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall x_0 \in X$, $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \in \tau_0$, 令 $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) = U$ 因为 f 为 $X \rightarrow R$ 上的拓扑连续映射, 所以我们有 $f^{-1}(U) = V \in \tau$, $f(V) = U$, $x_0 \in V$ 即 $f(V) \subseteq U = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ 因此 f 在 x_0 处连续, 又因为 x 的任意性, 所以 f 在 x 处连续。

推论 3.6. 设 $f: X \rightarrow R$ 是一个映射, 若 $X \subseteq R$, τ_0 继承拓扑, 则以下条件两两等价:

- (1) $f: X \rightarrow R$ 是拓扑连续函数;
- (2) $f: X \rightarrow R$ 拓扑连续;

(3) $f: X \rightarrow R$ 是连续函数。

证明: 由推论 3.5 可知, (1) $\Leftrightarrow$ (2) 显然成立. 下面我们只证明 (1) $\Leftrightarrow$ (3) 便可全部证出 (1) $\Rightarrow$ (3) $\exists U_{x_0}$, 使得, 当 $f(U_{x_0}) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ 时有 $x_0 \in (a, b) \subseteq U_{x_0}$, $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ 所以 $x_0 \in U(x_0, \delta) \subseteq (a, b) \subseteq U_{x_0}$, $f(U(x_0, \delta)) \subseteq f(U_{x_0}) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ 我们得 $f: X \rightarrow R$ 是连续函数。

(3) $\Rightarrow$ (1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有 $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ 因为 $U(x_0, \delta)$ 为包含 x_0 的一个邻域, 所以 $\exists$ 开集 U_{x_0} 使得 $x_0 \in U_{x_0} \subseteq U(x_0, \delta)$, $f(U_{x_0}) \subseteq f(U(x_0, \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ 因此对 $\forall x_0 \in X$, $\exists U_{x_0}$ 的开邻域 U_{x_0} 使得当 $x \in U_{x_0}$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 因此得到 $f: X \rightarrow R$ 是拓扑连续函数。

定理 3.3. 若 $f: X \rightarrow R$ 为拓扑连续函数, $\forall D \subseteq X$, 若 D 为 X 中的一个紧集, 则 $f(D)$ 为 R 中的一个紧集。

证明: D 为 X 中的一个紧集, 又因为 $f: X \rightarrow R$ 为拓扑连续函数由推论 3.6 知 $f: X \rightarrow R$ 为拓扑连续映射因此得出 $f(D)$ 为 R 的一个紧集。

定理 3.4. (有界定理) 设 $f: X \rightarrow R$ 为拓扑连续函数, $\forall D \subseteq X$, 若 D 为 X 中的一个紧集, 则 $f(D)$ 有界。

证明: D 为 X 中的一个紧集, $f: X \rightarrow R$ 为拓扑连续函数, 由定理 3.3. 知 $f(D)$ 为 R 的一个紧集, 所以 $f(D)$ 为 R 上的闭区间, 因此 $f(D)$ 有界。

定理 3.5. (最值定理) 设 $f: X \rightarrow R$ 为拓扑连续函数, $\forall D \subseteq X$, 若 D 为拓扑空间 X 上的一个紧致子集, 则 $f(D)$ 在 R 上必能取到最大值和最小值。

证明: 由定理 3.4 知 $R_f = \{f(x) | x \in D\}$ 是有界的, 所以必有上确界 $M = \sup R_f$ 和下确界 $m = \inf R_f$ 现在证明 $\exists y \in D$, 使得 $f(y) = M$ 。设, 对于 $\forall x \in D$ 有 $f(x) < M$, 令 $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$, $\forall x \in D$, 因为 R_f 有界, 所以对 $\forall x \in D$, $\exists g_1, g_2$ 使得 $g_1 < \frac{1}{M - f(x)} < g_2$, $M - \frac{1}{g_1} < f(x) < M - \frac{1}{g_2}$ 得到 $(M - \frac{1}{g_1}, M - \frac{1}{g_2})$ 为 $f(x)$ 的一个邻域, 又因为 f 为拓扑连续函数, 所以一定 $\exists x$ 的一个邻域 U_x 使得 $f(U_x) \subseteq (M - \frac{1}{g_1}, M - \frac{1}{g_2})$, $g(U_x) \subseteq (g_1, g_2)$, 由于 g 在点 x 处连续得到 g 在 D 上连续, 所以对 $\forall x \in D$, $g(x)$ 在 R 上有界 $R_g = \{g(x) | x \in D\}$ 。令 $G = \sup R_g$, $0 < \frac{1}{M - f(x)} < G$ 对 $\forall x \in D$ 成立, $f(x) < M - \frac{1}{G}$ 与 M 为 $f(x)$ 的上确界矛盾, 因此 $\exists y \in D$, 使得 $f(y) = M$ 。

基金项目

湖南省自然科学基金青年项目: Domain 理论中一类新近似算子的研究(项目编号: 2019JJ50505)。

参考文献

- [1] 卢天秀, 朱培勇. 拓扑空间上半连续函数的等价条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2010, 35(5): 50-53.
- [2] 张风, 魏建刚. 下半连续函数的逼近性质[J]. 数学研究, 1999, 32(2): 194-197.
- [3] Borsík, J. (1993) Errata to "Limits of Simply Continuous Functions". *Real Analysis Exchange*, 19, 57. <https://doi.org/10.2307/44153813>
- [4] 熊良鹏. 一类和式数列极限探讨[J]. 高等数学研究, 2021, 24(6): 23-25.
- [5] 陈舒婷, 陈水利, 蔡璐蔚, 等. 拓扑空间中的半弱连续映射及其性质[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2020, 25(4): 311-316.

- [6] 陈英玮, 钱有华. 关于算子连续映射[J]. 南昌大学学报(理科版), 2005, 29(6): 577-578.
- [7] Vechtomov, M.E. (1990) On Semigroups of Continuous Partial Functions of Topological Spaces. *Russian Mathematical Surveys*, **45**, 192-193. <https://doi.org/10.1070/RM1990v045n04ABEH002384>
- [8] 何晓丹. 拓扑空间中的连续映射分解及几种近似紧性[D]: [硕士学位论文]. 江门: 五邑大学, 2013.
- [9] 安艳. 拓扑空间中一类紧性与分离性的研究[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2018.
- [10] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [11] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [12] 朱培勇, 雷银彬. 拓扑学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.