Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2578-2586
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139263

一招解决积分学中的“偶倍奇零”问题

王前豹，张　颖

南京邮电大学通达学院基础教学部，江苏　扬州

收稿日期：2023年8月2日；录用日期：2023年9月4日；发布日期：2023年9月13日

摘　要

微积分中，定积分，二重积分，三重积分，第一类线面积分经常碰到积分区域区域有对称性，被积函数具有奇偶性的状况。如果针对每个积分列举偶倍奇零公式，则其繁杂程度超出学生的接受程度。如果要求学生根据这些公式来做题，则背离了高等教育的目的。特别对非数学专业的学生，微积分的教学应该提供给他们更为直观的解决方案！将所有的无方向的积分看作(广义)质量，则简单高效地解决了所有“偶倍奇零”问题。同时解决类似的含有对称性的积分问题！

关键词

重积分，线面积分，对称，置换群

One Way to Solve the Problem of “Even Times and Odd Zeros” in Calculus

Qianbao Wang, Ying Zhang

Department of Basic Teaching, Tongda College, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Yangzhou Jiangsu

Received: Aug. 2nd, 2023; accepted: Sep. 4th, 2023; published: Sep. 13th, 2023

Abstract

In calculus, the situation that the integration region has symmetry and the integrand has parity occur a lot in definite integrals, double integrals, triple integrals, line integrals of the first type, and area integrals of the first type, etc. If we list even-multiple-odd-zero formulas for each integral, the complexity is beyond the acceptance of students. If students are required to solve the problems by means of these formulas, it deviates from the purpose of higher education. The teaching of calculus should provide them with more intuitive solutions, especially for non-mathematics majors! We can solve all “even-multiple-odd-zero” problems simply and efficiently by treating all un-

directed integrals as (generalized) masses. At the same time, similar integration problems with symmetry can also be solved!

Keywords

Double Integrals, Line Area Integrals, Symmetry, Permutation Groups

1. 积分中的“偶倍奇零”

考虑积分学中一个问题：计算 $\iiint_{\Omega}\frac{z\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域。相关的辅导书籍[1]里面给出这样的解答：利用积分区域的对称与被积函数的奇偶性，有下列公式：

1) 若 Ω 关于 xoy 面对称，Ω_1 为 Ω 在 xoy 面上侧的部分，则

$$\iiint_{\Omega}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \text{函数 } f \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{函数 } f \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

2) 若 Ω 关于 yoz 面对称，Ω_1 为 Ω 在 yoz 面前侧的部分，则

$$\iiint_{\Omega}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \text{函数 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{函数 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

3) 若 Ω 关于 xoz 面对称，Ω_1 为 Ω 在 xoz 面右侧的部分，则

$$\iiint_{\Omega}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \text{函数 } f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{函数 } f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

实际上这是是积分学中常见的“偶倍奇零”问题，解答中仅针对三重积分就给出了 3 个复杂公式。第一类曲线积分也有类似公式，第一类平面曲线积分有 2 个，第一类空间曲线积分有 3 个。如果针对这些积分列出相关公式，则其繁杂程度超出学生的接受程度，而且这些公式并不能反映问题的实质。因此我们有必要探寻新的方法，使得“偶倍奇零”问题教师容易教，学生容易懂！

2. 积分的物理意义

定义 1. 将定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分，第一类曲面积分统称为无方向的积分；将第二类曲线积分，第二类曲面积分统称为有方向的积分。

定义 2. 令 $\int_{\Omega}f\mathrm{d}\omega$ 为某个无方向的积分，如果积分区域 Ω 与被积函数 f 具有某种对称性，则称该积分为“偶倍奇零”问题。

如果 Ω 关于坐标面对称，被积函数 f 关于某个变量有奇偶性，则 $\int_{\Omega}f\mathrm{d}\omega$ 当然是一个“偶倍奇零”问题。

定义 2 中还包括了 f 具有轮转对称性等情形，详见本文的例 6，例 7，我们都将其称作“偶倍奇零”问题。

定义 3. 设 Ω 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集[2]，如果在 Ω 上定义了实值函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$，则称 Ω 为广义物质，记作 Ω_f。

注： 如果 Ω 上定义了不同的实值函数 f，g，则 Ω_f,Ω_g 是不同的。

定义 4. 设 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为实值函数，f 黎曼可积，其中 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集。则称积分 $\int_\Omega f\mathrm{d}\omega$ 是 Ω_f 的广义质量，简称质量，记作 $m(\Omega_f)$，即 $m(\Omega_f)=\int_\Omega f\mathrm{d}\omega$。具体地：

1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可积，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是线段 $[a,b]_f$ 的广义质量；

2) $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 可积，则二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是薄片 D_f 的广义质量；

3) $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 可积，则三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是立体 Ω_f 的广义质量；

4) $f:\Gamma\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 可积，Γ 为可求长的曲线，则第一类线积分 $\int_\Lambda f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 是曲线 Γ_f 的广义质量；

5) $f:\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 可积，Σ 为可求面积的曲面，则第一类面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 为曲面 Σ_f 的广义质量。

注： 我们生活的空间 $\mathbb{R}^3$ 中的物质都是密度函数大于 0 的广义物质。因而，广义物质就是宇宙空间中物质的推广。无方向积分 $\int_\Omega f\mathrm{d}\omega$ 中的被积函数 f 可看成 Ω_f 的“广义密度”。

3. 结论

无方向积分中，三重积分的积分区域为空间子集，且其出现的对称性情形最多，第一类平面曲线积分的积分区域为平面子集，且定积分是其特殊情形。因此，我们将以第一类平面曲线积分和三重积分为例来说明结论。

定义 5. 在空间直角坐标系中，若空间区域 Ω 满足

$$(a,b,c)\in\Omega\Leftrightarrow(-a,b,c)\in\Omega$$

则称 Ω 在 x 轴方向上有对称性。

类似可定义 Ω 在 y 轴方向上有对称性，Ω 在 z 轴方向上有对称性。

如果积分区域 D 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的子集，可将 D 看成空间 $\mathbb{R}^3$ 的子集，从而可定义 D 在 x 轴方向上有对称性，在 y 轴方向上有对称性等概念。

定理 1. 若平面曲线 L 有长度，且在 x 轴方向上有对称性，记 $L_1=\{(x,y)\in L:x\ge0\}$，$L_2=\{(x,y)\in L:x\le0\}$，L 上的实值函数 f 黎曼可积，则

(1)
$$\mathrm{m}(L_f)=\begin{cases}2\mathrm{m}(L_{1f}) & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}=\begin{cases}2\mathrm{m}(L_{2f}) & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

(2)
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}=\begin{cases}2\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

根据广义物质质量的定义，命题(1)与(2)是等价的，因此我们只证明(2)。

证明：L 在 x 轴方向上有对称性，对 L 作黎曼分割[3]时，使该分割 x 轴方向上对称，即若 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 为 L_1 中的第 i 个小弧段，则 L_2 中有相应的小弧段 $\overset{\frown}{P'_{i-1}P'_i}$，且

$$(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}\Leftrightarrow(-\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{P'_{i-1}P'_i}$$

用 Δs_i 表示 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 的弧长，$\Delta s'_i$ 表示 $\overset{\frown}{P'_{i-1}P'_i}$ 的弧长则 $\Delta s_i=\Delta s'_i$。同时，我们也对称地取黎曼和：

情形(a)：若 f 关于 x 为奇函数，则

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s&=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s\\&=\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\lim\sum_i f(-\xi_i,\eta_i)\Delta s'_i\\&=\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\lim\sum_i -f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\\&=0\end{aligned}$$

情形(b)：若 f 关于 x 为偶函数，则

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s&=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s\\&=\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\lim\sum_i f(-\xi_i,\eta_i)\Delta s'_i\\&=\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\\&=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

说明：在数学分析的教学中，以上证明要求学生掌握并理解。在非数学专业的微积分教学中，按照如下的方法向学生讲解：在 L_1 任意选取一点 (a,b)，则其密度为 $f(a,b)$，对称地，在 L_2 中有点 $(-a,b)$，若 f 关于 x 为奇函数，则其密度为 $f(-a,b)=-f(a,b)$，因而“这两点的质量相互抵消”。从整体看，L_1 的质量与 L_2 的质量相互抵消。见图 1。

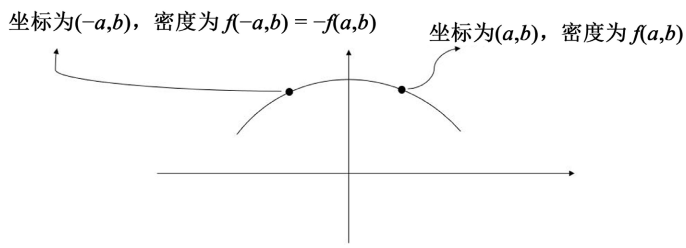


Figure 1. Diagram of first type line integrals of even function
图 1. 偶函数的第一类曲线积分

定理 2. 若空间区域 Ω 有体积且在 x 轴方向上有对称性，记 $\Omega_1=\{(x,y,z)\in\Omega:x\ge0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\in\Omega:x\le0\}$。$\Omega$ 上的函数 f 黎曼可积，则

$$\mathrm{m}(\Omega_f)=\begin{cases}2\mathrm{m}(\Omega_{1f}) & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}\qquad(1)$$
$$=\begin{cases}2\mathrm{m}(\Omega_{2f}) & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

(2)
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}\\ 0 & \text{如果 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}\end{cases}$$

我们只证明(2)。

证明：我们先证明 f 关于 x 为奇函数的情形。

Ω 在 x 轴方向上有对称性，将 Ω 作黎曼分割时，使该分割 x 轴方向上对称，即若 V_i 为 Ω_1 中的第 i 个小块，则 Ω_2 中有相应的小块 V_i'，且

$$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in V_i \Leftrightarrow (-\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in V_i'$$

用 ΔV_i 表示 V_i 的体积，则 $\Delta V_i=\Delta V_i'$。同时，我们也对称地取黎曼和：

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i+\lim\sum_i f(-\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i\\&=\lim\sum_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i+\lim\sum_i -f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i\\&=0\end{aligned}$$

f 关于 x 为偶函数的情形类似可得。

说明：可按照如下的方法向学生讲解：在 Ω_1 任意选取一点 (a,b,c)，则其密度为 $f(a,b,c)$，对称地，在 Ω_2 中有点$(-a, b, c)$，则其密度为 $f(-a,b,c)=-f(a,b,c)$，因而“这两点的质量相互抵消”。从整体看，Ω_1 的质量与 Ω_2 的质量相互抵消。见图 2。

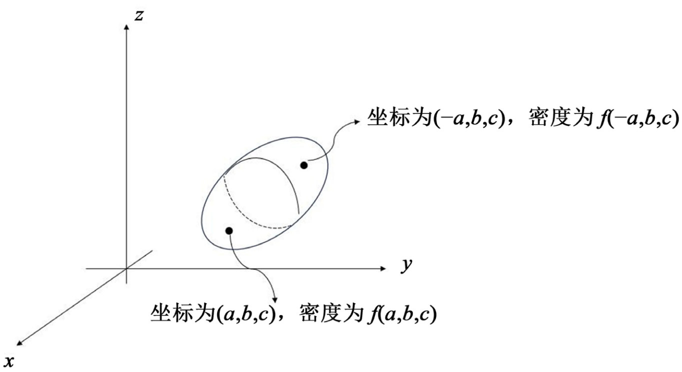


Figure 2. Triple integrals for the symmetric region
图 2. 对称区域的三重积分

4. 应用实例

例 1. 计算 $\int_{-9}^{9} x^{88}\sin x\mathrm{d}x$

分析：积分区域为闭区间 $[-9,9]$，在 x 轴方向上有对称性，被积函数 f 关于 x 为奇函数，线段 $[-9,0]_f$ 与线段 $[0,9]_f$ 的广义质量相互抵消，因而积分为 0。

例 2. 计算 $I=\iint_D\left(x^2+xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为

(1) D 为圆域 $x^2+y^2\le 1$；

(2) D 由直线 $y=x, y=-1, x=1$ 所围成

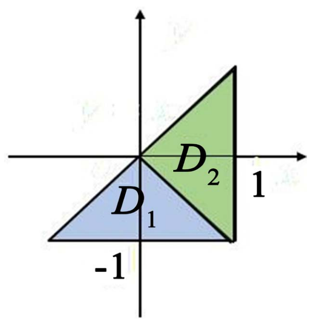
解：1) 记 $D_1=\{(x,y)\in D: x\ge 0\}$，$D_2=\{(x,y)\in D: x<0\}$，$I'=\iint_D xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 则该积分中的被积函数 f 关于 x 为奇函数，广义物质 D_{1f} 与 D_{2f} 的质量相互抵消，D_f 质量为 0，因而 $I'=0$。利用极坐标，

$$I=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$

2) 如下图所示，用直线 $y=-x$ 将其 D 分割为 $D_1\cup D_2$，则 D_1 在 x 轴方向上由对称性，以 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ 为密度的广义物质 D_{1f} 质量为 0，因此 $\iint_{D_1}xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

广义物质 D_{2f} 质量也为 0，$\iint_{D_2}xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是 $\iint_D xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。所以

$$I=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x\int_{-1}^x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$



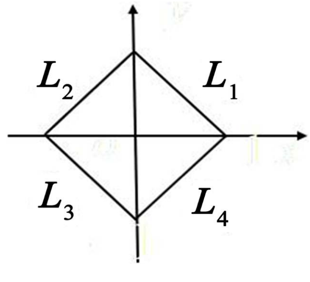
例 3. 计算 $\iiint_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域。

分析：记 $\Omega_1=\{(x,y,z)\in\Omega: z\ge 0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\in\Omega: z<0\}$，被积函数 f 关于 z 为奇函数，广义物质 Ω_{1f} 与 Ω_{2f} 质量刚好抵消，Ω_f 的质量为 0，因而积分为 0。

例 4. 计算 $\oint_L \frac{|x|}{|x|+|y|}\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $|x|+|y|=1$。

解：将积分看作广义物质 L_f 的质量。如下图所示，将 L 分割为 $L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$，$L_1$ 上点 (ξ,η) 的密度为 ξ，对称地，点 $(-\xi,\eta)\in L_2$，$(-\xi,-\eta)\in L_3$，$(\xi,-\eta)\in L_4$ 的密度均为 ξ，因而 L_f 的质量为 L_{1f} 质量的 4 倍！于是

$$I=4\int_{L_1}\frac{|x|}{|x|+|y|}\mathrm{d}s=4\int_0^1 x\sqrt{2}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$$



例 5. 令 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2, z>0$。$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦象的部分，记 $I_1=\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S$，$I_2=\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S$，$I_3=\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$，$I_4=\iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$，判断 $I_1=4I_3$，$I_2=4I_4$ 是否成立。

分析：记 $f=xyz, g=z$，容易看出广义物质 Σ_f 质量为 0 因而 $I_1=0$，而广义物质 Σ_{1f} 质量严格大于 0，于是 $I_3>0$，因此 $I_1\neq 4I_3$。

另一方面，对于积分 I_2 而言，若 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma_1$，则该点的密度为 ζ，对称地，Σ 上 $(\xi,-\eta,\zeta),(-\xi,\eta,\zeta),(-\xi,-\eta,\zeta)$ 这三点的密度也为 ζ，Σ_g 的质量为 Σ_{1g} 的 4 倍，因此 $I_2=4I_4$ 成立。

最后来两个难度稍大的例子。

例 6. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明：

$$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

解：记 $F(x,y)=f(x)f(y)$，$D=\{(x,y):0\le x\le a, 0\le y\le a\}$。

对于二重积分 $\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 而言，积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，函数 F 关于直线 $y=x$ 对称，即

$$F(\xi,\eta)=F(\eta,\xi)$$

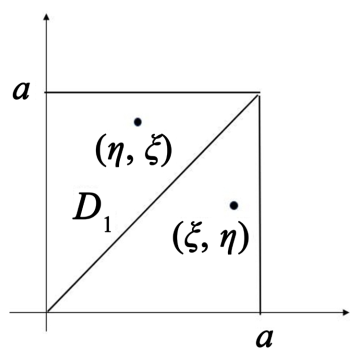
令 D_1 如下图所示，则广义物质 D_F 的质量为 2 倍的 D_{1F} 的质量，即

$\mathrm{m}(D_F)=2\mathrm{m}(D_{1F})$，于是

$$\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y$$

又 $\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a F(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2$

因而 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2$ 成立。



例 7. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明：

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3$$

证明：记 $\Omega=\{(x,y,z):0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$

$$\Omega_1=\{(x,y,z):0\le x\le 1, x\le y\le 1, x\le z\le y\}$$

则 Ω 为图 3 中立方体，则 Ω_1 为锥体 $OABC$。

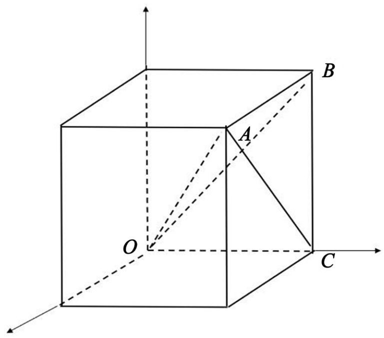


Figure 3. Ω
图 3. Ω

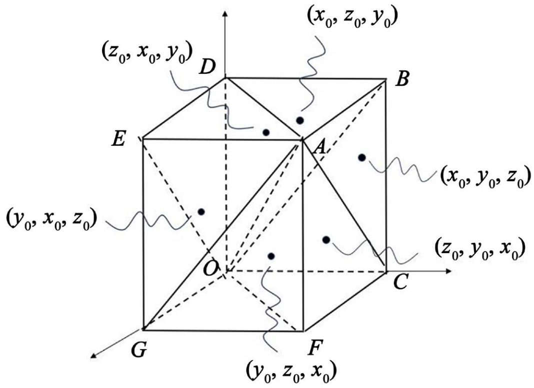


Figure 4. The Symmetry of Ω
图 4. Ω 的对称性

注意到锥体实际上为立方体的六分之一！具体地，如图 4 所示，若 $(x_0, y_0, z_0) \in OABC$，则

$$\begin{cases} (x_0, z_0, y_0) \in OABD \\ (z_0, y_0, x_0) \in OACF \\ (z_0, x_0, y_0) \in OADE \\ (y_0, x_0, z_0) \in OAEG \\ (y_0, z_0, x_0) \in OAGG \end{cases}$$

现在考虑三重积分 $I = \iiint_{\Omega} F(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，被积函数 $F(x, y, z) = f(x) f(y) f(z)$ 在置换群 S_3 作用下不变，即 $F(x, y, z) = F(x, z, y) = F(y, x, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y) = F(z, y, x)$。由此知图 4 中标明的对称 6 点“质量相同”，整体上看，有 $\mathrm{m}(\Omega_F) = 6\mathrm{m}(\Omega_{1F})$，于是

$$\iiint_{\Omega} F(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\iiint_{\Omega_1} F(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

而 $LHS = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \int_0^1 f(z)\mathrm{d}z = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3$

$RHS = 6\iiint_{\Omega_1} f(x) f(y) f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \int_x^y f(z)\mathrm{d}z$ 证毕

致　谢

感谢南京邮电大学通达学院数学教研室全体同仁。

基金项目

项目单位：南京邮电大学通达学院；项目名称：通达学院拔尖人才培养模式研究；项目编号：JG20619001。

参考文献

[1] 李永乐, 王式安, 武忠祥, 等. 考研数学复习全书(数学一) [M]. 北京: 国家行政学院出版社, 2020.

[2] 刘培德. 实变函数教程[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[3] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013.