Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2621-2632
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139268

三维地核磁流体力学方程组在临界 Fourier-Besov 空间中的整体适定性

赵丹丹，孙晋易

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年8月4日；录用日期：2023年9月6日；发布日期：2023年9月14日

摘 要

三维地核磁流体力学方程组是描述地核中导电金属流体运动与地球磁场变化规律的基本方程组。通过运用 **Littlewood-Paley** 分解，并通过建立相应算子半群的一致有界性估计，证明了三维旋转磁流体力学方程组柯西问题关于 **Fourier-Besov** 空间中小初值的整体适定性。

关键词

三维旋转磁流体力学方程组，**Fourier-Besov** 空间，适定性

Global Well-Posedness of the Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Equations Arising from the Earth's Core in Critical Fourier-Besov Spaces

Dandan Zhao, Jinyi Sun

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Aug. 4^{th}, 2023; accepted: Sep. 6^{th}, 2023; published: Sep. 14^{th}, 2023

文章引用: 赵丹丹, 孙晋易. 三维地核磁流体力学方程组在临界Fourier-Besov 空间中的整体适定性[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2621-2632. DOI: 10.12677/pm.2023.139268

Abstract

The three-dimensional magnetohydrodynamics equations arising from the Earth's core are the basic equations describing the motion of the conducting metal fluids in the Earth's core and the changes of the Earth's magnetic field. With the help of the Littlewood-Paley decomposition and by establishing the uniformly bounded estimations of the corresponding operator semigroups on Fourier-Besov spaces, we prove the global well-posedness of Cauchy problem of this three-dimensional magnetohydrodynamics equations for small initial data in critical Fourier-Besov spaces.

Keywords

Three-Dimensional Magnetohydrodynamics Equations, Global Well-Posedness, Fourier-Besov Spaces

1. 引言

34.5 亿年前, 在地球生命诞生之际, 地球磁场就形成了. 地球磁场对宇宙射线和来自太阳的高能带电粒子进行阻挡, 对地球形成一个"保护盾", 使地球生命的生存滋长得到保证, 并把高能带电粒子引导至南北两极, 形成了梦幻般的极光. 此外, 海龟, 鲸鱼, 候鸟等众多迁徙动物通过地球磁场辨认方向, 每年旅行几千公里, 仍能精确测定位置. 但是, 地球磁场是怎样产生和维持的呢? 爱因斯坦在狭义相对论发表之后不久, 将地球磁场的形成和变化问题归结为物理学领域中尚未解决的重大难题之一.

1919 年, 爱尔兰物理学家, 数学家 J. Larmor [1] 在研究太阳磁场起源时首次提出了旋转的导电流体维持自激发电机的可能性. 随后, 地球物理学家们提出: 构成地球外核的液态金属环流在微弱磁场下运动产生电流, 接着电流产生的附加磁场又会加强原来的弱磁场, 从而形成自激发电, 在电磁耦合效应的作用下, 磁场被不断增强放大, 最终形成了地球磁场. 磁场的改变反过来又会影响地球外核中的液态金属的流动. 磁流体自激发电理论在大量观测, 实验和理论研究中得到了认证, 并被人们普遍认为是地球磁场的主要起因. 因此, 在地球物理学的研究中, 通常使用如下的三维地核磁流体力学方程组来描述地球磁场随地球外核金属流体的流动而发生的变化:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla)u - (B \cdot \nabla)B + \nabla p = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \partial_t B - \Delta B + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \mathrm{div} u = 0, \quad \mathrm{div} B = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad B|_{t=0} = B_0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, 未知函数 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 表示流体的速度场, $B = (B_1, B_2, B_3)$ 表示地球磁场, P 表示流体压力. $\Omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 称为 Coriolis 参数, 其大小描述地球旋转的快慢, $\Omega e_3 \times u$ 为 Coriolis 力. 地核磁流体力学方程组是借助磁对流现象和 Lorentz 力将控制导电流体介质运动的 Navier-Stokes 方程组与控制电磁学现象的 Maxwell 方程组耦合而成的. 对地核磁流体力学方程组的研究将进一步促进地磁导航、地磁发电、地磁探矿、地磁预测等科学技术的发展. 关于 (1.1) 的推导及其物理背景的更多相关研究, 可参考文献 [2,3].

当 $\Omega = 0$ 且 $B \equiv 0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为经典的三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \mathrm{div} u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.2}$$

其适定性理论在过去的八十年间受到了众多学者的广泛关注, 并被证明在以下临界空间中关于小初值是整体适定的:

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)(3 < p < \infty) \hookrightarrow BMO^{-1},$$

具体可见参考文献 [4–7].

当 $\Omega \neq 0$ 但 $B \equiv 0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为三维旋转 Navier-Stokes 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \mathrm{div} u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.3}$$

当参数 Ω 充分大时, 通过充分利用 Coriolis 力 $\Omega e_3 \times u$ 所带来的色散效应, Babin 等人在空间周期情形下证明了问题(1.2)关于 H^s 中大初值的整体适定性, 见文献 [8,9]. 在文献 [10] 中, Chemin等人证明了存在正常数 $\Omega_0 > 0$, 当 $|\Omega| > \Omega_0$ 时, 问题 (1.2) 对任意初值 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) + H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 存在唯一的整体解. 对文献 [10] 中结果的推广可参见文献 [11–13]. Konieczny 和 Yoneda [14] 和 Iwabuchi 和 Takada [15]在临界 Fourier-Besov 空间中建立了问题 (1.2) 关于小初值的整体适定性以及不适定性理论, 随后这一结果被文献 [16] 推广至三维 Primitive方程组.

当 $\Omega = 0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为经典的三维磁流体力学方程组:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u - (B \cdot \nabla)B + \nabla p = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \partial_t B - \Delta B + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \mathrm{div} u = 0, \quad \mathrm{div} B = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad B|_{t=0} = B_0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.4}$$

Davaut 和 Lions 在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$ 中建立了问题 (1.4) 关于一般初值的局部适定性和小初始值的整体适定性, 见文献 [17]. 在文献 [18] 中, Sermange 和 Temam 证明了 $(u,B)\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))$ 时弱解的正则性. 最近, 翟小平, 李用声和闫威 [19]在一定小性条件下建立了问题 (1.4) 在临界 Besov 空间中的整体适定性, 该结果允许初始速度场和初始磁场的第三分量不小.

三维地核磁流体力学方程组柯西问题作为一类色散-耗散交织型偏微分方程, 方程结构的复杂性导致一些经典的研究方法和技巧已不再适用. 受文献 [14–16] 的启发, 本文借助于 Coriolis 色散算子在 Fourier-Besov 空间上良好的有界性质以及 Young 不等式, 建立相应算子半群的一致有界性估计, 并通过运用 Littlewood-Paley 理论和 Banach 不动点定理, 证明了问题 (1.1) 关于 Fourier-Besov 空间中一致小初值的整体适定性. 本文主要研究结果具体如下:

定理 1.1 设 $p\in(1,\infty]$, $r\in[1,\infty]$, 则存在正常数 $C>0$, 使得当初值 $(u_0,B_0)\in \dot{FB}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^3)$, 且满足 $\mathrm{div}u_0=0$, $\mathrm{div}B_0=0$ 以及

$$\|(u_0,B_0)\|_{\dot{FB}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}\le C$$

时, 问题 (1.1) 存在唯一的整体温和解 $(u,B)\in C\big([0,\infty),\dot{FB}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^3)\big)\cap X^\alpha$, 其中参数 $\alpha\in(0,1)$,

$$X^\alpha:=\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{3-\frac{3}{p}+\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^3))\cap\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{3-\frac{3}{p}-\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^3)).$$

定理 1.2 设 $r\in[1,2]$, 则存在正常数 $C>0$, 使得当初值 $(u_0,B_0)\in\dot{FB}^{-1}_{1,r}(\mathbb{R}^3)$, 且满足 $\mathrm{div}u_0=0$, $\mathrm{div}B_0=0$ 以及

$$\|(u_0,B_0)\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,r}}\le C$$

时, 问题 (1.1) 存在唯一的整体温和解 $(u,B)\in C\big([0,\infty),\dot{FB}^{-1}_{1,r}(\mathbb{R}^3)\big)\cap Y^\alpha$, 其中参数 $\alpha\in(0,1)$,

$$Y^\alpha=\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{\alpha}_{1,r}(\mathbb{R}^3))\cap\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{-\alpha}_{1,r}(\mathbb{R}^3)).$$

本文的其余部分安排如下: 在第二节中, 我们将给出 Littlewood-Paley 理论和 Fourier-Besov 空间的定义, 以及半群 $\{T_\Omega(t)\}_{t>0}$ 的具体表达式和相关的有界性估计; 在第三节中, 我们将建立热半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ 在 Fourier-Besov 空间上的线性估计; 最后, 我们给出主要结果的证明.

一些记号: $i=\sqrt{-1}$, $\mathcal{F}g$ 和 $\hat{g}$ 均表示 g 关于空间变量的傅里叶变换, $\mathcal{F}^{-1}$ 表示相应的傅里叶逆变换. 我们用 C 表示一个绝对常数, 它的值可能随着位置的变化而变化.

2. 预备知识

首先, 我们将介绍 Littlewood-Paley 理论, 并给出 Fourier-Besov 空间的定义及其上的乘积法则. 更多关于 Littlewood-Paley 理论的讨论, 可参阅专著 [16].

设 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ 为 Schwartz 空间, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ 为缓增广义函数空间. 选择径向函数 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ 使得 $\hat{\varphi},\hat{\psi}$ 满足下列性质:

$$\mathrm{supp}\,\hat{\varphi}\subset\mathcal{C}:=\{\xi\in\mathbb{R}^3:\frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\},$$

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}\subset\mathcal{B}:=\{\xi\in\mathbb{R}^3:|\xi|\le\frac{4}{3}\},$$

且

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)=1,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}.$$

对任意的 $j\in\mathbb{Z}$, 令 $\varphi_j(x):=2^{2j}\varphi(2^jx),\psi_j(x):=2^{2j}\psi(2^jx)$, 定义频率局部化算子 Δ_j 和低频截断算子 S_j:

$$\Delta_jf:=\varphi_j*f,\quad S_jf=\psi_j*f,\quad\forall j\in\mathbb{Z},\ f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3).$$

令 $\mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3):=\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$, 其中 $\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$ 为定义在 $\mathbb{R}^3$上的全体多项式所构成的线性空间. 众所周知, 在 $\mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3)$ 中成立如下分解:

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jf,\quad S_jf=\sum_{k=-\infty}^{j-1}\Delta_kf.$$

定义 2.1 设 $s\in\mathbb{R},\ 1\le p,r\le\infty$, 定义 Fourier-Besov 空间 :

$$F\dot{B}^s_{p,r}:=\Big\{u\in\mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^3):\|u\|_{F\dot{B}^s_{p,r}}:=\Big\|\big\{2^{js}\|\widehat{\Delta_ju}\|_{L^p}\big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r(\mathbb{Z})}<\infty\Big\}.$$

定义 2.2 设 $s\in\mathbb{R},1\le r,\ \delta\le\infty$, 定义 $\tilde{L}^\delta(0,\infty;F\dot{B}^s_{p,r})$ 空间 :

$$\begin{aligned}\tilde{L}^\delta(0,\infty;F\dot{B}^s_{p,r}):=\Big\{u:(0,\infty)\to F\dot{B}^s_{p,r}:&\\ \|u\|_{\tilde{L}^\delta(0,\infty;F\dot{B}^s_{p,r})}=\Big\{\Big\|\big\{2^{js}\|\widehat{\Delta_ju}\|_{L^\delta(0,\infty;L^p)}\big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r(\mathbb{Z})}<\infty\Big\}.&\end{aligned}$$

引理 2.3 (乘积法则, [12]) (i) 设 $\alpha\in(0,1],p\in(1,\infty]$ 且 $r\in[1,\infty]$. 则存在 $C>0$, 使得对任意的 $f,g\in\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}\pm\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^3))$, 成立

$$\begin{aligned}\|fg\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}}_{p,r})}\le C\Big(&\|f\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}+\alpha}_{p,r})}\|g\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}-\alpha}_{p,r})}\\&+\|f\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}-\alpha}_{p,r})}\|g\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}+\alpha}_{p,r})}\Big).\end{aligned}$$

(ii) 设 $\alpha\in(0,1],r\in[1,2]$. 则存在 $C>0$, 使得对任意的 $f,g\in\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{\pm\alpha}_{1,r}(\mathbb{R}^3))$, 成立

$$\begin{aligned}\|fg\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;F\dot{B}^0_{1,r})}\le C\Big(&\|f\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{\alpha}_{1,r})}\|g\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{-\alpha}_{1,r})}\\&+\|f\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{-\alpha}_{1,r})}\|g\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{\alpha}_{1,r})}\Big).\end{aligned}$$

Fourier-Besov 空间是在经典的 Besov 空间的基础上引入 Fourier 变换而得来的, Fourier-Besov 空间已在众多流体力学方程的研究中被广泛使用, 并得到了一系列深刻的研究成果. 下面, 我们给出

Stokes-Coriolis 半群 $\{T_\Omega(t)\}_{t>0}$ 的具体表达形式. 通过 Duhamel 原理, 问题 (1.1) 等价于如下积分方程

$$\begin{cases} u(t) = T_\Omega(t)u_0 - \int_0^t T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u(\tau)\otimes u(\tau))d\tau + \int_0^t T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(B(\tau)\otimes B(\tau))d\tau, \\ B(t) = e^{t\Delta}B_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot(u(\tau)\otimes B(\tau))d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot(B(\tau)\otimes u(\tau))d\tau, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{P} := (\delta_{ij} + \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j)_{1\le i,j\le 3}$, $\mathcal{R}_j (j = 1,2,3)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的 Riesz 变换, $\{T_\Omega(t)\}_{t\ge 0}$ 为 Stokes-Coriolis 半群, 其具体表达式如下:

$$T_\Omega(t)f := \frac{1}{2}\mathcal{G}_+(\Omega t)[e^{t\Delta}(I+\mathcal{R})f] + \frac{1}{2}\mathcal{G}_-(\Omega t)[e^{t\Delta}(I-\mathcal{R})f]. \tag{2.2}$$

这里

$$\mathcal{G}_\pm(t)f(x) := e^{\pm it\frac{D_3}{|D|}}f(x) := \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi \pm it\frac{\xi_3}{|\xi|}}\hat{f}(\xi)d\xi, \quad x\in\mathbb{R}^3,\ t\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

I 是单位算子, $\mathcal{R}$ 是奇异积分算子矩阵, 其具体形式为:

$$\mathcal{R} := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_3 & -\mathcal{R}_2 \\ -\mathcal{R}_3 & 0 & \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{R}_2 & -\mathcal{R}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于表达式 $\{T_\Omega(t)\}_{t>0}$ 的推导, 可以参见文献 [9]和 [18].

对于 Stokes-Coriolis 半群 $\{T_\Omega(t)\}_{t>0}$ 有如下有界性估计.

引理2.4 ([12]) 设 $s\in\mathbb{R}$, $p\in[1,\infty]$, $r\in[1,\infty]$, $\alpha\in[0,1]$ 以及 $\rho\in[1,\frac{2}{1\pm\alpha}]$, 则存在 $C>0$, 使得对任意的 $u_0\in \dot{FB}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3)$ 和 $f\in\tilde{L}^\rho(0,\infty;\dot{FB}^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r}(\mathbb{R}^3))$ 成立

$$\|T_\Omega(t)u_0\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})} \le C\|u_0\|_{\dot{FB}^s_{p,r}}$$

和

$$\Big\|\int_0^t T_\Omega(t-\tau)f(\tau)d\tau\Big\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})} \le C\|f\|_{\tilde{L}^\rho(0,\infty;\dot{FB}^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}.$$

3. 线性估计

引理 3.1 设 $\alpha\in[0,1]$, $s\in\mathbb{R}$, $p\in[1,\infty]$ 以及 $r\in[1,\infty]$, 则存在 $C>0$, 使得对任意的 $B_0\in\dot{FB}^s_{p,r}(\mathbb{R}^3)$ 成立

$$\|e^{t\Delta}B_0\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;\dot{FB}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})} \le C\|B_0\|_{\dot{FB}^s_{p,r}}.$$

证明 由于 $\mathrm{supp}\hat{\psi}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 : 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}$, 有

$$\big\|\mathcal{F}[\Delta_j e^{t\Delta} B_0]\big\|_{L^p} = \big\|\mathcal{F}[e^{t\Delta}\Delta_j B_0]\big\|_{L^p} \le Ce^{-2^{2j}t}\|\hat{\psi}_j(\xi)\hat{B}_0(\xi)\|_{L^p}.$$

故

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{F}[\Delta_j e^{t\Delta} B_0]\big\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^p)} &\le C\|e^{-2^{2j}t}\|\hat{\psi}_j\hat{B}_0\|_{L^p}\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty)}\\ &\le C\|e^{-2^{2j}t}\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty)}\|\hat{\psi}_j\hat{B}_0\|_{L^p}\\ &\le C2^{-j(1\pm\alpha)}\|\hat{\psi}_j\hat{B}_0\|_{L^p}.\end{aligned}$$

因此, 由定义 2.2 可得

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}B_0\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})} &= \|\{2^{j(s+1\pm\alpha)}\|\mathcal{F}\big(\Delta_j e^{t\Delta}B_0\big)\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^p)}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r}\\ &\le C\|\{2^{j(s+1\pm\alpha)}2^{-j(1\pm\alpha)}\|\hat{\psi}_j\hat{B}_0\|_{L^p}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r}\\ &\le C\|B_0\|_{F\dot{B}^s_{p,r}}.\end{aligned}$$

即得证结论成立.

引理 3.2 设 $\alpha \in [0,1]$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty]$, $r \in [1,\infty]$ 以及 $\rho \in [1, \frac{2}{1\pm\alpha}]$, 则存在 $C > 0$, 使得对任意的 $f \in \tilde{L}^\rho(0,\infty; F\dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r}(\mathbb{R}^3))$ 成立

$$\Big\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau\Big\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})} \le C\|f\|_{\tilde{L}^\rho(0,\infty;F\dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}.$$

证明 由定义 2.2 可得

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau\Big\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})}\\ =&\Big\|\Big\{2^{j(s+1\pm\alpha)}\Big\|\mathcal{F}\Big(\Delta_j(\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau)\Big)\Big\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^p)}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r}.\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

运用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}\Big\|\mathcal{F}\Big(\Delta_j(\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau)\Big)\Big\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^p)} \le& C\Big\|\int_0^t \Big\|\mathcal{F}\Big(e^{(t-\tau)\Delta}\Delta_j f(\tau)\Big)\Big\|_{L^p}d\tau\Big\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty)}\\ \le& C\|e^{-2^{2j}t}\|_{L^m(0,\infty)}\|\widehat{\Delta_j f(\tau)}\|_{L^\rho(0,\infty;L^p)}\\ \le& C2^{-2j(1+\frac{1\pm\alpha}{2}-\frac{1}{\rho})}\|\hat{\psi}_j\hat{f}\|_{L^\rho(0,\infty;L^p)}.\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中 $1+\frac{1\pm\alpha}{2}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{m}$，将 (3.2.2) 代入 (3.2.1) 可得

$$\begin{aligned}\Big\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau\Big\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{s+1\pm\alpha}_{p,r})} \leq & C\Big\|\Big\{2^{j(s+1\pm\alpha)}2^{-2j(1+\frac{1\pm\alpha}{2}-\frac{1}{\rho})}\|\hat{\psi}_j\hat{f}\|_{L^\rho(0,\infty;L^p)}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^r}\\ \leq & C\|f\|_{\tilde{L}^\rho(0,\infty;F\dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}.\end{aligned}$$

即得证结论成立.

4. 定理及证明

定理 1.1 的证明: 由引理 2.4 和引理 3.1 中取 $s=2-\frac{3}{p}$ 可知, 存在正常数 C_0 使得成立

$$\|T_\Omega(t)u_0\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}\pm\alpha}_{p,r})} \leq C_0\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}, \tag{4.1}$$

$$\|e^{t\Delta}B_0\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}\pm\alpha}_{p,r})} \leq C_0\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}. \tag{4.2}$$

令

$$N_1(u,v):=\int_0^t T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot[u(\tau)\otimes v(\tau)]d\tau,$$

以及

$$N_2(u,v):=\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot[u(\tau)\otimes v(\tau)]d\tau.$$

定义映射 $\mathscr{B}$ 为:

$$\mathscr{B}(u,B)(t):=\big(\mathscr{B}_1(u,B)(t),\mathscr{B}_2(u,B)(t)\big),$$

其中

$$\mathscr{B}_1(u,B)(t):=T_\Omega(t)u_0-N_1(u,u)(t)+N_1(B,B)(t),$$

$$\mathscr{B}_2(u,B)(t):=e^{t\Delta}B_0-N_2(u,B)(t)+N_2(B,u)(t).$$

定义解空间 $\mathscr{X}$ 为:

$$\begin{aligned}\mathscr{X}:=\Big\{&(u,B)\in X^\alpha:=\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}+\alpha}_{p,r})\cap\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}-\alpha}_{p,r}):\\ &\|u\|_{\mathscr{X}}\leq 2C_0\big(\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}\big),\ \|B\|_{\mathscr{X}}\leq 2C_0\big(\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}\big)\Big\}\end{aligned}$$

其中

$$\|v\|_{\mathscr{X}}:=\|v\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}-\alpha}_{p,r})}+\|v\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;F\dot{B}^{3-\frac{3}{p}+\alpha}_{p,r})}.$$

由引理 2.4 , 引理 3.2 以及引理 2.3 可得, 存在正常数 $C_i(i=1,2,3)$, 使得

$$\|N_1(u,u)\|_{\mathscr{X}} \le C\|u\otimes u\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{FB}_{p,r}^{3-\frac{3}{p}})} \le C_1\|u\|_{\mathscr{X}}^2, \tag{4.3}$$

$$\|N_1(B,B)\|_{\mathscr{X}} \le C\|B\otimes B\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{FB}_{p,r}^{3-\frac{3}{p}})} \le C_2\|B\|_{\mathscr{X}}^2, \tag{4.4}$$

$$\|N_2(u,B)\|_{\mathscr{X}} + \|N_2(B,u)\|_{\mathscr{X}} \le C\|u\otimes B\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{FB}_{p,r}^{3-\frac{3}{p}})} \le C_3\|u\|_{\mathscr{X}}\|B\|_{\mathscr{X}}. \tag{4.5}$$

因此, 结合 (4.1)-(4.5) 可知, 对任意的 $(u,B)\in\mathscr{X}$, 成立

$$\begin{aligned}\|\mathscr{B}_1(u,B)\|_{\mathscr{X}} &\le C_0\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + C_2\|u\|_{\mathscr{X}}^2 + C_3\|B\|_{\mathscr{X}}^2 \\ &\le C_0\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big)\Big\{1 + 4C_0C_1\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big) \\ &\quad + 4C_0C_2\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big)\Big\}\end{aligned} \tag{4.6}$$

和

$$\begin{aligned}\|\mathscr{B}_2(u,B)\|_{\mathscr{X}} &\le C_0\|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + C_3\|u\|_{\mathscr{X}}\|B\|_{\mathscr{X}} \\ &\le C_0\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big)\Big\{1 + 4C_0C_3\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big)\Big\}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

类似地, 对于任意的 (u_1,B_1), $(u_2,B_2)\in\mathscr{X}$, 存在常数 $C_i(i=4,5,6,7)$, 使得

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{B}(u_1,B_1)-\mathscr{B}(u_2,B_2)\|_{\mathscr{X}} \\ &\le \Big\|\int_0^t T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot\big[u_1(\tau)\otimes(u_1(\tau)-u_2(\tau)) + (u_1(\tau)-u_2(\tau))\otimes u_2(\tau)\big]d\tau\Big\|_{\mathscr{X}} \\ &\quad + \Big\|\int_0^t T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot\big[B_1(\tau)\otimes(B_1(\tau)-B_2(\tau)) + (B_1(\tau)-B_2(\tau))\otimes B_2(\tau)\big]d\tau\Big\|_{\mathscr{X}} \\ &\quad + \Big\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\big[u_1(\tau)\otimes(B_1(\tau)-B_2(\tau)) + (u_1(\tau)-u_2(\tau))\otimes B_2(\tau)\big]d\tau\Big\|_{\mathscr{X}} \\ &\quad + \Big\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\big[B_1(\tau)\otimes(u_1(\tau)-u_2(\tau)) + (B_1(\tau)-B_2(\tau))\otimes u_2(\tau)\big]d\tau\Big\|_{\mathscr{X}} \\ &\le C_4(\|u_1\|_{\mathscr{X}}+\|u_2\|_{\mathscr{X}})\|u_1-u_2\|_{\mathscr{X}} + C_5(\|B_1\|_{\mathscr{X}}+\|B_2\|_{\mathscr{X}})\|B_1-B_2\|_{\mathscr{X}} \\ &\quad + C_6(\|u_1\|_{\mathscr{X}}+\|u_2\|_{\mathscr{X}})\|B_1-B_2\|_{\mathscr{X}} + C_7(\|B_1\|_{\mathscr{X}}+\|B_2\|_{\mathscr{X}})\|u_1-u_2\|_{\mathscr{X}} \\ &\le 4C_0(C_4+C_7)\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big)\|u_1-u_2\|_{\mathscr{X}} \\ &\quad + 4C_0(C_5+C_6)\big(\|u_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}} + \|B_0\|_{\dot{FB}_{p,r}^{2-\frac{3}{p}}}\big)\|B_1-B_2\|_{\mathscr{X}}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

因此, 如果 $(u_0,B_0)\in F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^3)$ 满足

$$\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}\le\min\left\{\frac{1}{8C_0C_1},\frac{1}{8C_0C_2},\frac{1}{8C_0C_3},\frac{1}{8C_0(C_4+C_7)},\frac{1}{8C_0(C_5+C_6)}\right\},$$

由 (4.6)-(4.8) 得

$$\|\mathscr{B}_1(u,B)\|_{\mathscr{X}}\le 2C_0\big(\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}\big),\ \ \|\mathscr{B}_2(u,B)\|_{\mathscr{X}}\le 2C_0\big(\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}\big),$$

且

$$\|\mathscr{B}(u_1,B_1)-\mathscr{B}(u_2,B_2)\|_{\mathscr{X}}<\frac{1}{2}\|(u_1,B_1)-(u_2,B_2)\|_{\mathscr{X}}.$$

因此, 由 Banach 不动点定理可知, 问题 (1.1) 在 $\mathscr{X}$ 中存在唯一的整体温和解 $(u,B)\in X^{\alpha}$.

下证 $(u,B)\in C\big([0,\infty),F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^3)\big)$. 事实上, 由引理 2.3, 引理 2.4, 引理 3.1, 以及引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r})}&\le C\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+C\|\nabla[u(\tau)\otimes u(\tau)]\|_{L^1(0,\infty;F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r})}\\&\quad+C\|\nabla[B(\tau)\otimes B(\tau)]\|_{L^1(0,\infty;F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r})}\\&\le C\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+C\|u\|_{\mathscr{X}}^2+C\|B\|_{\mathscr{X}}^2<\infty.\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\|B\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r})}&\le C\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+C\|\nabla[u(\tau)\otimes B(\tau)]\|_{L^1(0,\infty;F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r})}\\&\quad+C\|\nabla[B(\tau)\otimes u(\tau)]\|_{L^1(0,\infty;F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r})}\\&\le C\|B_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}}+C\|u\|_{\mathscr{X}}\|B\|_{\mathscr{X}}<\infty.\end{aligned}$$

进而, 通过标准的稠密性讨论可得 $(u,B)\in C\big([0,\infty),F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^3)\big)$, 这就完成了定理 1.1 的证明.

定理 1.2 的证明: 定理 1.2 的证明与定理 1.1 的证明相似, 只需要将函数空间 X^{α} 替换为 Y^{α} 即可, 细节省略.

基金项目

西北师范大学 2022 年度研究生科研资助项目(2022KYZZ-S120)，甘肃省高校教师创新基金项目(2023A-002)。

参考文献

[1] Larmor, J. (1919) How Could a Rotating Body Such as the Sun Become a Magnet. Report of the British Association for the Advancement of Science, 159, 412.

[2] Dormy, E., Jault, D. and Soward, A. (2002) A Super Rotating Shear Layer in Magnetohydrodynamic Spherical Couette Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **452**, 263-291. https://doi.org/10.1017/S0022112001006711

[3] Merrill, R.T., McElhinny, M.W. and McFadden, P.L. (1998) The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. Volume 63 of International Geophysics Series. Academic Press, Cambridge, MA.

[4] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/BF00276188

[5] Kato, T. (1984) Strong L^p-Solutions of the Navier-Stokes Equation in R^m, with Applications to Weak Solutions. *Mathematische Zeitschrift*, **187**, 471-480. https://doi.org/10.1007/BF01174182

[6] Cannone, M. (1997) A Generalization of a Theorem by Kato on Navier-Stokes Equations. *Revista Matemática Iberoamericana*, **13**, 515-541. https://doi.org/10.4171/RMI/229

[7] Koch, H. and Tataru, D. (2001) Well-Posedness for the Navier-Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, **157**, 22-35. https://doi.org/10.1006/aima.2000.1937

[8] Babin, A., Mahalov, A. and Nicolaenko, B. (1997) Regularity and Integrability of 3D Euler and Navier-Stokes Equations for Rotating Fluids. *Asymptotic Analysis*, **15**, 103-150. https://doi.org/10.3233/ASY-1997-15201

[9] Babin, A., Mahalov, A. and Nicolaenko, B. (1999) Global Regularity of the 3D Rotating Navier-Stokes Equations for Resonant Domains. *Indiana University Mathematics Journal*, **48**, 1133-1176. https://doi.org/10.1512/iumj.1999.48.1856

[10] Chemin, J.Y., Desjardins, B., Gallagher, I. and Grenier, E. (2006) Mathematical Geophysics: An Introduction to Rotating Fluids and the Navier-Stokes Equations. Oxford University Press, Oxford. https://doi.org/10.1093/oso/9780198571339.001.0001

[11] Iwabuchi, T. and Takada, R. (2013) Global Solutions for the Navier-Stokes Equations in the Rotational Framework. *Mathematische Annalen*, **357**, 727-741. https://doi.org/10.1007/s00208-013-0923-4

[12] Sun, J., Yang, M. and Cui, S. (2017) Existence and Analyticity of Mild Solutions for the 3D Rotating Navier-Stokes Equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **196**, 1203-1229. https://doi.org/10.1007/s10231-016-0613-4

[13] Koh, Y., Lee, S. and Takada, R. (2014) Dispersive Estimates for the Navier-Stokes Equations in the Rotational Framework. *Advances in Difference Equations*, **19**, 857-878. https://doi.org/10.57262/ade/1404230126

[14] Konieczny, P. and Yoneda, T. (2011) On Dispersive Effect of the Coriolis Force for the Stationary Navier-Stokes Equations. *Journal of Differential Equations*, **250**, 3859-3873. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.01.003

[15] Iwabuchi, T. and Takada, R. (2014) Global Well-Posedness and Ill-Posedness for the Navier-Stokes Equations with the Coriolis Force in Function Spaces of Besov Type. *Journal of Functional Analysis*, **267**, 1321-1337.
https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.05.022

[16] Sun, J. and Cui, S. (2019) Sharp Well-Posedness and Ill-Posedness of the Three-Dimensional Primitive Equations of Geophysics in Fourier-Besov Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **48**, 445-465. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.02.003

[17] Duvaut, G. and Lions, J.L. (1972) Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **46**, 241-279.
https://doi.org/10.1007/BF00250512

[18] Sermange, M. and Temam, R. (1983) Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 635-664.
https://doi.org/10.1002/cpa.3160360506

[19] Zhai, X., Li, Y. and Yan, W. (2015) Global Well-Posedness for the 3-D Incompressible MHD Equations in the Critical Besov Spaces. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **14**, 1865-1884. https://doi.org/10.3934/cpaa.2015.14.1865