Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3325-3335
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311345

广义高斯Fibonacci和Lucas多项式及其恒等式

杨加玲，杨标桂*

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2023年10月20日；录用日期：2023年11月21日；发布日期：2023年11月29日

摘　要

本文给出了广义高斯斐波那契多项式和广义高斯卢卡斯多项式的定义。我们研究了它们的一些的性质，通过它们的递推关系和性质及矩阵表示，我们也得到了它们之间的一些恒等式。此外，我们还证明了相应的卡西尼恒等式。

关键词

广义高斯Fibonacci多项式，广义高斯Lucas多项式，卡西尼恒等式，矩形表示

Generalized Gaussian Fibonacci and Lucas Polynomials and Their Identities

Jialing Yang, Biaogui Yang*

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Oct. 20th, 2023; accepted: Nov. 21st, 2023; published: Nov. 29th, 2023

Abstract

In this paper, we give the definition of Generalized Gaussian Fibonacci polynomials and Generalized Gaussian Lucas polynomials. We obtain some exciting properties of them, by their recurrence relation and properties and matrix representations, we also obtain some identities of them. Furthermore, we prove Cassini's Identities for them and their polynomials.

*通讯作者。

文章引用: 杨加玲, 杨标桂. 广义高斯 Fibonacci 和 Lucas 多项式及其恒等式[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3325-3335.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311345

Keywords

Generalized Gaussian Fibonacci Polynomials, Generalized Gaussian Lucas Polynomials, Cassini's Identities, Matrix Representation

1. 引言

在 1997 年，Berzsenyi [1]对高斯 Fibonacci 数进行了研究，得到了涉及 Fibonacci、佩尔和切比雪夫多项式组合乘积的若干求和恒等式。在 1986 年，Pethe 和 Horadam [2]定义了一个新的 k-高斯斐波那契数族，并再发现了高斯斐波那契数，还得到了当 $k=2$ 时相应的系列函数。在 2019 年，Prasad [3]引入了一种新的高斯 Fibonacci 矩阵，其元素为高斯 Fibonacci 数，并根据该高斯斐波那契矩阵开发了一种新的编解码方法。在 2020 年，Özkan 和 Taştan [4]定义了高斯斐波那契多项式，并利用 Fibonacci 多项式给出了高斯 Fibonacci 多项式的公式。在 2021 年，Özkan 和 Kuloğlu [5]定义了高斯纳拉亚那数及其多项式，并证明了高斯纳拉亚纳多项式与新的纳拉亚那多项式之间存在一种关系。本文的目的不仅仅是为了扩展他们的思想，从而获得大量的包含广义高斯斐波那契多项式组合的乘积的重要求和恒等式。

广义 Fibonacci 多项式 $F_n(x)$ 满足下列的递推关系：

$$F_n(x)=axF_{n-1}(x)+bF_{n-2}(x),\quad n\geq 2, \tag{1}$$

其中 $F_0(x)=0$，$F_1(x)=1$。

广义 Lucas 多项式满足下列的递推关系：

$$L_n(x)=axL_{n-1}(x)+bL_{n-2}(x),\quad n\geq 2, \tag{2}$$

其中 $L_0(x)=2$，$L_1(x)=ax$。

众所周知，斐波那契多项式和卢卡斯多项式是密切相关的，斐波那契多项式可用于解决许多复杂的算法问题，如字符串比较、旅行商问题等，将其推广到高斯斐波那契多项式将会丰富多项式理论，解决更多形式多样的算法问题，其中 S. Falcon 和 A. Plaza [6]定义的 k-斐波那契多项式是 k-斐波那契数的自然延伸，它们的许多性质都可以直接证明，斐波那契多项式导数的许多关系也可以证明。Hogget 和 Lind [7]对某些序列进行了类似的“符号置换”，并将这些结果推广到将任何递推序列置换成任何服从具有多项式系数的递推关系的多项式序列。至此，《斐波那契季刊》的不同刊物上提出了许多有关多项式的问题。G.Y. Lee 和 M. Asci [8]考虑 Pascal 矩阵，并推广了斐波那契多项式，称为(p,q)-斐波那契多项式。他们获得了(p,q)-Fibonacci 多项式的组合等式，并通过使用 Riordan 方法，得到了涉及(p,q)-Fibonacci 多项式的 Pascal 矩阵因式分解。在 2013 年，Aşçı M 和 Gürel E [9]定义了高斯雅各布塔尔多项式和高斯雅各布塔尔卢卡斯多项式。

高斯雅各布塔尔多项式满足下列的递推关系：

$$GJ_{n+1}(x)=GJ_n(x)+2xGJ_{n-1}(x),\quad n\geq 1, \tag{3}$$

其中 $GJ_0(x)=\frac{i}{2}$，$GJ_1(x)=1$。

高斯雅各布塔尔卢卡斯多项式满足下列的递推关系：

$$Gj_{n+1}(x) = Gj_n(x) + 2xGj_{n-1}(x),\quad n \ge 1, \tag{4}$$

其中 $Gj_0(x) = 2 - \frac{i}{2}$， $Gj_1(x) = 1 + 2ix$ 。

他们研究了这些数的生成函数、比奈公式、显式公式和 Q 矩阵，还提出显式组合和行列式表达式，研究负下标数并给出各种恒等式。

此外，作者 Yağmur T [10]定义高斯佩尔-卢卡斯多项式序列 $\{GQ_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$，它满足这样的递推关系：

$$GQ_{n+1}(x) = 2xGQ_n(x) + GQ_{n-1}(x),\quad n \ge 1, \tag{5}$$

其中 $GQ_0(x) = 2 - 2ix$， $GQ_1(x) = 2x + 2i$ 。

同时，他们也得到了比奈公式，生成函数和该序列的行列式表示。

另外，在 2018 年，Uygun S [11]引入了 $h(x)$-雅各布塔尔型多项式，并给出了它们的一些性质，然后利用 $h(x)$-雅各布塔尔型多项式，描述了上升对角函数和递减对角函数，并给出了它们的一些基本性质。

许多学者研究了斐波那契多项式。本文通过改变初始项对广义高斯斐波那契多项式和卢卡斯多项式进行了推广，仍保留了它们的递推关系。

2. 主要结论及其证明

定义 2.1 广义高斯 Fibonacci 多项式 $GF_n(x)$ 满足下列的递推关系

$$GF_{n+1}(x) = aGF_n(x) + bGF_{n-1}(x),\quad n \ge 2, \tag{6}$$

其中 $GF_1(x) = 1$， $GF_2(x) = ax + i$ 。

由广义高斯 Fibonacci 多项式 $GF_n(x)$ 的定义可得到如下初始值：

$$\begin{aligned} GF_3(x) &= axGF_2(x) + bGF_1(x) \\ &= ax(ax+i) + b \\ &= a^2x^2 + b + axi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GF_4(x) &= axGF_3(x) + bGF_2(x) \\ &= ax(a^2x^2 + b + axi) + b(ax+i) \\ &= a^3x^3 + 2axb + i(a^2x^2 + b). \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时，我们可以得到 $GF_n(1) = GF_n$ 。

定理 2.1 $GF_n(x) = F_n(x) + iF_{n-1}(x)$， $n \ge 2$ 。

证明 我们将用数学归纳法来证明这个定理。

当 $n = 2$ 时，有 $GF_3(x) = axGF_2(x) + bGF_1(x) = a^2x^2 + b + axi = F_3(x) + iF_2(x)$，这个定理显然是成立的。

假设当 $n = k$ 时，满足 $GF_k(x) = F_k(x) + iF_{k-1}(x)$ 。

当 $n = k+1$ 时有：

$$\begin{aligned} GF_{k+1}(x) &= axGF_k(x) + bGF_{k-1}(x) \\ &= ax(F_k(x) + iF_{k-1}(x)) + b(F_{k-1}(x) + iF_{k-2}(x)) \\ &= axF_k(x) + axiF_{k-1}(x) + bF_{k-1}(x) + biF_{k-2}(x) \\ &= F_{k+1}(x) + iF_k(x). \end{aligned}$$

因此定理得证。

广义的高斯 Fibonacci 多项式 $GF_n(x)$ 的 binet 公式为：

$$GF_n(x)=\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+i\frac{\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

其中 $\alpha(x)=\frac{ax+\sqrt{a^2x^2+4b}}{2}$，$\beta(x)=\frac{ax-\sqrt{a^2x^2+4b}}{2}$。

定义 2.2 广义高斯 Fibonacci 多项式矩阵 $gf_n(x)$ 的定义如下

$$gf_n(x)=\begin{pmatrix} GF_{n+1}(x) & GF_n(x) \\ GF_n(x) & GF_{n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 $gf_0(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$gf_1(x)=\begin{pmatrix} ax+i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

定理 2.2 $\det(gf_n(x))=(-b)^{n-2}(1+b-axi)$，$n\geq 2$。

证明 我们将用数学归纳法来证明这个定理。由定义 2.2，结合广义高斯斐波那契多项式的定义和定理 2.1 可得：

当 $n=2$ 时，有 $\det(gf_2(x))=1+b-axi$

$$\begin{aligned}\det(gf_2(x))&=\begin{vmatrix} GF_3(x) & GF_2(x) \\ GF_2(x) & GF_1(x) \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} a^2x^2+b+axi & ax+i \\ ax+i & 1 \end{vmatrix}\\ &=1+b-ai.\end{aligned} \tag{8}$$

这个定理显然是成立的。

假设当 $n=k$ 时，满足

$$\det(gf_k(x))=GF_{k+1}(x)GF_{k-1}(x)-GF_k^2(x)=(-b)^{k-2}(1+b-axi),$$

则当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}\det(gf_{k+1}(x))&=\begin{vmatrix} GF_{k+2}(x) & GF_{k+1}(x) \\ GF_{k+1}(x) & GF_k(x) \end{vmatrix}\\ &=GF_{k+2}(x)GF_k(x)-GF_{k+1}^2(x)\\ &=(axGF_{k+1}(x)+bGF_k(x))GF_k(x)-(axGF_k(x)+bGF_{k-1}(x))GF_{k+1}(x)\\ &=axGF_{k+1}(x)GF_k(x)+bGF_k^2(x)-axGF_k(x)GF_{k+1}(x)-bGF_{k-1}(x)GF_{k+1}(x)\\ &=-b(GF_{k-1}(x)GF_{k+1}(x)-GF_k^2(x))\\ &=(-b)^{k-1}(1+b-ai).\end{aligned}$$

因此定理得证。

我们定义 2×2 阶的矩阵 R，P，C 分别为

$$R=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} a^2+b+ai & a+i \\ a+i & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} a^3+3ab+i(a^2+2b) & a^2+2b+ai \\ a^2+2b+ai & a+2i \end{pmatrix}$$

当 $n=0$ 时，有 $P=\begin{pmatrix} GF_3 & GF_2 \\ GF_2 & GF_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b+ai & a+i \\ a+i & 1 \end{pmatrix}$。

假设 $n=k$ 时有，$R^kP=\begin{pmatrix} GF_{k+3} & GF_{k+2} \\ GF_{k+2} & GF_{k+1} \end{pmatrix}$，又当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned} R^{k+1}P &= \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} GF_{k+3} & GF_{k+2} \\ GF_{k+2} & GF_{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aGF_{k+3}+bGF_{k+2} & aGF_{k+2}+bGF_{k+1} \\ GF_{k+3} & GF_{k+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} GF_{k+4} & GF_{k+3} \\ GF_{k+3} & GF_{k+2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

所以就有 $GF_{n+1}GF_{n-1}-G^2F_n=(-b)^{n-2}(1+b-ai)$，$n\ge 2$。

又因为 $\det R^{n-2}=(-b)^{n-2}$，$\det P=1+b-ai$，于是便有

$$R^{n-2}P=\begin{pmatrix} GF_{n+1} & GF_n \\ GF_n & GF_{n-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

因此 $\det\left(R^{n-2}P\right)=GF_{n+1}GF_{n-1}-G^2F_n=(-b)^{n-2}(1+b-ai)$。

广义高斯斐波那契数与广义高斯斐波那契多项式具有同样的性质。

引理 2.1 当 $n,k\in \mathrm{Z}$ 时，满足

$$F_{n+k}(x)-b^kF_{n-k}(x)=\begin{cases} L_n(x)F_k(x),\ k\text{ 是偶数}, \\ L_k(x)F_n(x),\ k\text{ 是奇数}. \end{cases} \tag{11}$$

$$F_{n+k}(x)+b^kF_{n-k}(x)=\begin{cases} L_n(x)F_k(x),\ k\text{ 是偶数}, \\ F_n(x)L_k(x),\ k\text{ 是奇数}. \end{cases} \tag{12}$$

证明 我们用广义 Fibonacci 多项式的定义来证明。

$$\begin{aligned} F_{n+k}(x)-F_{n-k}(x) &= \frac{\alpha^{n+k}(x)-\beta^{n+k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}-\frac{\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &= \frac{\alpha^{n+k}(x)-\beta^{n+k}(x)-\alpha^{n-k}(x)+\beta^{n-k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &= \frac{\left(\alpha^k(x)-\beta^k(x)\right)\left(\alpha^n(x)+\beta^n(x)\right)-\alpha^k(x)\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &\quad -\frac{\alpha^n(x)\beta^k(x)+\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &= F_k(x)L_n(x)+\left((-b)^k-1\right)F_{n-k}(x), \end{aligned}$$

因此当 k 为偶数时，有

$$F_{n+k}(x)-F_{n-k}(x)=F_k(x)L_n(x)+b^kF_{n-k}(x)-F_{n-k}(x),$$

即可得到：$F_{n+k}(x)-b^kF_{n-k}(x)=F_k(x)L_n(x)$。

当 k 为奇数时，有

$$F_{n+k}(x)-F_{n-k}(x)=F_k(x)L_n(x)-b^kF_{n-k}(x)-F_{n-k}(x).$$

即可得到 $F_{n+k}(x)+b^kF_{n-k}(x)=F_k(x)L_n(x)$。

又有

$$\begin{aligned}F_{n+k}(x)+F_{n-k}(x)&=\frac{\alpha^{n+k}(x)-\beta^{n+k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+\frac{\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=\frac{\alpha^{n+k}(x)-\beta^{n+k}(x)+\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=\frac{\left(\alpha^k(x)+\beta^k(x)\right)\left(\alpha^n(x)-\beta^n(x)\right)+\alpha^k(x)\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&\quad+\frac{\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)-\alpha^n(x)\beta^k(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=\left(\alpha^k(x)+\beta^k(x)\right)F_n(x)+\frac{\left(1-(-b)^k\right)\left(\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=F_n(x)L_k(x)+\left(1-(-b)^k\right)F_{n-k}(x).\end{aligned}$$

因此当 k 为偶数时，有

$$F_{n+k}(x)+F_{n-k}(x)=F_n(x)L_k(x)-b^kF_{n-k}(x)+F_{n-k}(x),$$

即可得到 $F_{n+k}(x)+b^kF_{n-k}(x)=F_n(x)L_k(x)$。

当 k 为奇数时，有

$$F_{n+k}(x)+F_{n-k}(x)=F_n(x)L_k(x)+b^kF_{n-k}(x)+F_{n-k}(x),$$

于是可得到：$F_{n+k}(x)-b^kF_{n-k}(x)=F_n(x)L_k(x)$。

综合上述讨论，此引理得证。

例如，当 $k=1$ 时，有

$$F_{n+1}(x)-b^2F_{n-1}(x)=F_n(x)L_1(x),\quad F_{n+1}(x)+b^2F_{n-1}(x)=F_n(x)L_1(x)$$

当 $k=2$ 时，有

$$F_{n+2}(x)-b^2F_{n-2}(x)=F_2(x)L_n(x),\quad F_{n+2}(x)+b^2F_{n-2}(x)=F_2(x)L_n(x)$$

定义 2.3 广义高斯 Lucas 多项式 $GL_n(x)$ 满足下列的递推关系

$$GL_{n+1}(x)=axGL_n(x)+bGL_{n-1}(x),\quad n\geq 2, \tag{13}$$

其中 $GL_1(x)=ax+2i$，$GL_2(x)=a^2x^2+2b+iax$。

由广义高斯 Lucas 多项式 $GL_n(x)$ 的定义可得到如下初始值：

$$\begin{aligned}GL_3(x)&=axGL_2(x)+bGL_1(x)\\&=ax\left(a^2x^2+2b+iax\right)+b(ax+2i)\\&=a^3x^3+3axb+i\left(a^2x^2+2b\right).\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}GL_4(x)&=axGL_3(x)+bGL_2(x)\\&=ax\left(a^3x^3+3axb+i\left(a^2x^2+2b\right)\right)+b\left(a^2x^2+2b+iax\right)\\&=a^4x^4+4a^2x^2b+2b^2+i\left(a^3x^3+3axb\right).\end{aligned}$$

当 $x=1$ 时，可以得到 $GL_n(1)=GL_n$。

定理 2.3 $GL_n(x)=L_n(x)+iL_{n-1}(x)$，$n\geq 2$。

证明 我们将用数学归纳法来证明这个定理。

当 $n=2$ 时，有

$$\begin{aligned}GL_3(x)&=axGL_2(x)+bGL_1(x)\\&=a\left(a^2x^2+2b+iax\right)+b\left(ax+2i\right)\\&=a^3x^3+3axb+i\left(a^2x^2+2b\right).\end{aligned}$$

此时，定理成立。

假设当 $n=k$ 时，满足 $GL_k(x)=L_k(x)+L_{k-1}(x)$。则当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}GL_{k+1}(x)&=axGL_k(x)+bGL_{k-1}(x)\\&=ax\left(L_k(x)+iL_{k-1}(x)\right)+b\left(L_{k-1}(x)+iL_{k-2}(x)\right)\\&=axL_k(x)+axiL_{k-1}(x)+bL_{k-1}(x)+biL_{k-2}(x)\\&=L_{k+1}(x)+iL_k(x).\end{aligned}$$

于是定理得证。

广义的高斯 Lucas 多项式 $GL_n(x)$ 的 binet 公式为

$$GL_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)+i\left(\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)\right) \tag{14}$$

其中 $\alpha(x)=\dfrac{ax+\sqrt{a^2x^2+4b}}{2}$，$\beta(x)=\dfrac{ax-\sqrt{a^2x^2+4b}}{2}$。

定义 2.4 广义高斯 Lucas 多项式矩阵 $gl_n(x)$ 的定义如下

$$gl_n(x)=\begin{pmatrix}GL_{n+1}(x) & GL_n(x)\\ GL_n(x) & GL_{n-1}(x)\end{pmatrix},$$

其中 $gl_0(x)=\begin{pmatrix}ax+2i & 2b-axi\\ 2b-axi & -ax+\left(a^2x^2+2\right)i\end{pmatrix}$，$gl_1(x)=\begin{pmatrix}a^2x^2+2b+axi & ax+2i\\ ax+2i & 2b-axi\end{pmatrix}$。

定理 2.4 $\det\left(gl_n(x)\right)=(-b)^{n-2}\left(a^2x^2+4b\right)(1+b-axi)$，$n\geq 2$。

证明 我们仍用数学归纳法证明定理。

当 $n=2$ 时，有 $\det\left(gl_2(x)\right)=\left(a^2x^2+4b\right)(1+b-axi)$

$$\begin{aligned}\det\left(gl_2(x)\right)&=\begin{vmatrix}Gl_3(x) & Gl_2(x)\\ Gl_2(x) & Gl_1(x)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a^3x^3+3axb+i\left(a^2x^2+2b\right) & a^2x^2+2b+axi\\ a^2x^2+2b+axi & ax+2i\end{vmatrix}\\&=\left(a^2x^2+4b\right)(1-b+axi).\end{aligned} \tag{15}$$

此时，定理显然成立。

假设当 $n=k$ 时，满足

$$\det\left(gl_k(x)\right)=GL_{k+1}(x)GL_{k-1}(x)-GL_k^2(x)=(-b)^{k-2}\left(a^2x^2+4b\right)(1+b-axi) \tag{16}$$

当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}\det\left(gl_{k+1}(x)\right)&=\begin{vmatrix}GL_{k+2}(x) & GL_{k+1}(x)\\ GL_{k+1}(x) & GL_k(x)\end{vmatrix}\\ &=GL_{k+2}(x)GL_k(x)-GL_{k+1}^2(x)\\ &=\left(axGL_{k+1}(x)+bGL_k(x)\right)GL_k(x)-\left(axGL_k(x)+bGL_{k-1}(x)\right)GL_{k+1}(x)\\ &=axGL_{k+1}(x)GL_k(x)+bGL_k^2(x)-axGL_k(x)GL_{k+1}(x)-bGL_{k-1}(x)GL_{k+1}(x)\\ &=-b\left(GL_{k-1}(x)GL_{k+1}(x)-GL_k^2(x)\right)\\ &=(-b)^{k-1}\left(a^2x^2+4b\right)(1+b-ai).\end{aligned}$$

于是，定理得证。

引理 2.2 当 $n,k\in\mathrm{Z}$ 时，满足

$$L_{n+k}(x)-b^kL_{n-k}(x)=\begin{cases}\left(a^2x^2+4b\right)F_n(x)F_k(x),\ k\text{ 是偶数},\\ L_k(x)L_n(x),\ k\text{ 是奇数}.\end{cases} \tag{17}$$

$$L_{n+k}(x)+b^kL_{n-k}(x)=\begin{cases}L_k(x)L_n(x),\ k\text{ 是偶数},\\ \left(a^2x^2+4b\right)F_n(x)F_k(x),\ k\text{ 是奇数}.\end{cases} \tag{18}$$

证明 由广义 Lucas 多项式的定义，我们有

$$\begin{aligned}L_{n+k}(x)+L_{n-k}(x)&=\alpha^{n+k}(x)+\beta^{n+k}(x)+\alpha^{n-k}(x)+\beta^{n-k}(x)\\ &=\left(\alpha^k(x)-\beta^k(x)\right)\left(\alpha^n(x)-\beta^n(x)\right)+\beta^k(x)\alpha^n(x)\\ &\quad+\beta^n(x)\alpha^k(x)+\alpha^{n-k}(x)+\beta^{n-k}(x)\\ &=\frac{\left(\alpha(x)-\beta(x)\right)^2\left(\alpha^k(x)-\beta^k(x)\right)\left(\alpha^n(x)-\beta^n(x)\right)}{\left(\alpha(x)-\beta(x)\right)^2}+\left(1+(-b)^k\right)L_{n-k}\\ &=F_k(x)L_n(x)+\left((-b)^k-1\right)F_{n-k}(x).\end{aligned}$$

类似于引理 2.1 分奇偶讨论即可得到(17)式。又有

$$\begin{aligned}L_{n+k}(x)-L_{n-k}(x)&=\alpha^{n+k}(x)+\beta^{n+k}(x)-\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)\\ &=\left(\alpha^k(x)+\beta^k(x)\right)\left(\alpha^n(x)+\beta^n(x)\right)-\beta^k(x)\alpha^n(x)\\ &\quad-\beta^n(x)\alpha^k(x)-\alpha^{n-k}(x)-\beta^{n-k}(x)\\ &=L_k(x)L_n(x)-\left((-b)^k+1\right)L_{n-k}(x).\end{aligned}$$

同样类似于引理 2.1 分奇偶讨论也可得到(18)式，故引理得证。

定理 2.5 $GF_{n+1}+bGF_{n-1}=GL_n$， $n\geq 2$ 。

证明 由高斯斐波那契多项式的定义，我们有：

$$\begin{aligned}GF_{n+1}(x)+bGF_{n-1}(x)&=F_{n+1}(x)+iF_n(x)+bF_{n-1}(x)+ibF_{n-2}(x)\\&=F_{n+1}(x)+bF_{n-1}(x)+i\left(F_n(x)+bF_{n-2}(x)\right)\\&=L_n(x)+iL_{n-1}(x)\\&=GL_n(x).\end{aligned}\tag{19}$$

定理 2.6 当 $n,k\in\mathrm{Z}$ 时，满足

$$GF_{n+k}(x)-b^kGF_{n-k}(x)=\begin{cases}F_k(x)GL_n(x),\ k\text{ 是偶数},\\GF_n(x)L_k(x),\ k\text{ 是奇数}.\end{cases}\tag{20}$$

$$GF_{n+k}(x)+b^kGF_{n-k}(x)=\begin{cases}L_k(x)GF_n(x),\ k\text{ 是偶数},\\F_k(x)GL_n(x),\ k\text{ 是奇数}.\end{cases}\tag{21}$$

证明 由高斯斐波那契多项式的定义，我们有：

$$\begin{aligned}GF_{n+k}(x)-b^kGF_{n-k}(x)&=F_{n+k}(x)+iF_{n+k-1}(x)-b^k\left(F_{n-k}(x)+iF_{n-k-1}(x)\right)\\&=F_{n+k}(x)-b^kF_{n-k}(x)+i\left(F_{n+k-1}(x)-b^kF_{n-k-1}(x)\right).\end{aligned}$$

于是，由引理 2.1 可知，当 k 为偶数时，

$$F_{n+k}(x)-b^kF_{n-k}(x)=L_n(x)F_k(x),\quad F_{n-1+k}(x)-b^kF_{n-1-k}(x)=L_{n-1}(x)F_k(x)$$

当 k 为奇数时，

$$F_{n+k}(x)-b^kF_{n-k}(x)=L_k(x)F_n(x),\quad F_{n-1+k}(x)-b^kF_{n-1-k}(x)=L_k(x)F_{n-1}(x)$$

结合上述式子即可得到(20)式，又有

$$\begin{aligned}GF_{n+k}(x)+b^kGF_{n-k}(x)&=F_{n+k}(x)+iF_{n+k-1}(x)+b^k\left(F_{n-k}(x)+iF_{n-k-1}(x)\right)\\&=F_{n+k}(x)+b^kF_{n-k}(x)+i\left(F_{n+k-1}(x)+b^kF_{n-k-1}(x)\right).\end{aligned}$$

同样由引理 2.1 可知，当 k 为偶数时，有

$$F_{n+k}(x)+b^kF_{n-k}(x)=L_n(x)F_k(x),\quad F_{n-1+k}(x)+b^kF_{n-1-k}(x)=L_{n-1}(x)F_k(x)$$

当 k 为奇数时，有

$$F_{n+k}(x)+b^kF_{n-k}(x)=L_k(x)F_n(x),\quad F_{n-1+k}(x)+b^kF_{n-1-k}(x)=L_k(x)F_{n-1}(x)$$

结合上述式子即可得到(21)式，此定理得证。

定理 2.7 当 $n,k\in\mathrm{Z}$ 时，满足 $GF_{n+k}^2-b^{2k}GF_{n-k}^2=F_{2k}GL_nGL_n$。

证明 由广义斐波那契多项式的定义可知：

$$\begin{aligned}F_k(x)L_k(x)&=\frac{\alpha(x)^k-\beta(x)^k}{\alpha(x)-\beta(x)}\left(\alpha(x)^k+\beta(x)^k\right)\\&=\frac{\alpha(x)^{2k}-\beta(x)^{2k}}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=F_{2k}(x).\end{aligned}$$

再由定理 2.6 中(17)和(18)式，通过平方差公式可得 $GF_{n+k}^2-b^{2k}GF_{n-k}^2=F_{2k}GL_nGL_n$。

定理 2.8 当 $n,k\in\mathrm{Z}$ 时，满足

$$G_{n+k}(x)-b^kG_{n-k}(x)=\begin{cases}GL_n(x)L_k(x),\ k\text{ 是偶数,}\\ \left(a^2x^2+4b\right)GF_n(x)F_k(x),\ k\text{ 是奇数.}\end{cases} \tag{22}$$

$$GL_{n+k}(x)+b^kGL_{n-k}(x)=\begin{cases}\left(a^2x^2+4b\right)GF_n(x)F_k(x),\ k\text{ 是偶数,}\\ GL_n(x)L_k(x),\ k\text{ 是奇数.}\end{cases} \tag{23}$$

证明 由高斯卢卡斯多项式的定义可知

$$\begin{aligned}GL_{n+k}(x)-b^kGL_{n-k}(x)&=L_{n+k}(x)+iL_{n+k-1}(x)-b^k\left(L_{n-k}(x)+iL_{n-k-1}(x)\right)\\&=L_{n+k}(x)-b^kL_{n-k}(x)+i\left(L_{n+k-1}(x)-b^kL_{n-k-1}(x)\right).\end{aligned}$$

再由引理 2.2 可知，当 k 为偶数时，有

$$L_{n+k}(x)-b^kL_{n-k}(x)=\left(a^2x^2+4b\right)F_n(x)F_k(x)\text{，}$$

$$L_{n-1+k}(x)-b^kL_{n-1-k}(x)=\left(a^2x^2+4b\right)F_{n-1}(x)F_k(x)$$

当 k 为奇数时，有

$$L_{n+k}(x)+b^kL_{n-k}(x)=L_k(x)L_n(x)\text{，}\quad L_{n-1+k}(x)-b^kL_{n-1-k}(x)=L_{n-1}(x)L_k(x)$$

结合上述式子可以得到(22)式，又有

$$\begin{aligned}GL_{n+k}(x)+b^kGL_{n-k}(x)&=L_{n+k}(x)+iL_{n+k-1}(x)+b^k\left(L_{n-k}(x)+iL_{n-k-1}(x)\right)\\&=L_{n+k}(x)+b^kL_{n-k}(x)+i\left(L_{n+k-1}(x)+b^kL_{n-k-1}(x)\right).\end{aligned}$$

同样由引理 2.2 可知，当 k 为偶数时，有

$$L_{n+k}(x)+b^kL_{n-k}(x)=L_n(x)L_k(x)\text{，}\quad L_{n-1+k}(x)+b^kL_{n-1-k}(x)=L_{n-1}(x)L_k(x)$$

当 k 为奇数时，有

$$L_{n+k}(x)+b^kL_{n-k}(x)=\left(a^2x^2+4b\right)F_n(x)F_k(x)\text{，}$$

$$L_{n-1+k}(x)+b^kL_{n-1-k}(x)=\left(a^2x^2+4b\right)F_{n-1}(x)F_k(x)\,.$$

结合上述式子可以得到(23)式，此定理得证。

定理 2.9 当 $n,k\in Z$ 时，满足 $GL_{n+k}^2-b^{2k}GL_{n-k}^2=\left(a^2x^2+4b\right)F_{2k}GL_nGL_n$。

证明 由广义斐波那契多项式的定义可知

$$\begin{aligned}F_k(x)L_k(x)&=\frac{\alpha(x)^k-\beta(x)^k}{\alpha(x)-\beta(x)}\left(\alpha(x)^k+\beta(x)^k\right)\\&=\frac{\alpha(x)^{2k}-\beta(x)^{2k}}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=F_{2k}(x).\end{aligned}$$

再由定理 2.8 中(19)和(20)式，通过平方差公式可得 $GF_{n+k}^2-b^{2k}GF_{n-k}^2=F_{2k}GL_nGL_n$。

3. 总结

我们在本文中推导出了许多广义高斯斐波那契和卢卡斯多项式的一些基本性质和恒等式，这些恒等式将为我们以后进一步研究一些复杂的不等方程的解提供依据，此外我们还证明了它们的卡西尼恒等式，

可以将推出的卡西尼恒等式应用于在几何学和物理学。在几何学中，可以用来描述一些复杂的几何形状，比如八字形的曲线。在物理学中，它可以用来描述轨道运动的形状，比如行星绕太阳的轨道的运动，而且对于今后研究圆锥曲线曲线的性质和特点也具有重要意义。

参考文献

[1] Berzsenyi, G. (1977) Gaussian Fibonacci Numbers. *Fibonacci Quarterly*, **15**, 233-236.

[2] Pethe, S. and Horadam, A.F. (1986) Generalised Gaussian Fibonacci Numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **33**, 37-48. https://doi.org/10.1017/S0004972700002847

[3] Prasad, B. (2019) A New Gaussian Fibonacci Matrices and Its Applications. *Journal of Algebra and Related Topics*, **7**, 65-72.

[4] Özkan, E. and Taştan, M. (2020) On Gauss Fibonacci Polynomials, on Gauss Lucas Polynomials and Their Applications. *Communications in Algebra*, **48**, 952-960. https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1670193

[5] Özkan, E. and Kuloğlu, B. (2021) On the New Narayana Polynomials, the Gauss Narayana Numbers and Their Polynomials. *Asian-European Journal of Mathematics*, **14**, Article ID: 2150100. https://doi.org/10.1142/S179355712150100X

[6] Falcon, S. and Plaza, A. (2009) On *k*-Fibonacci Sequences and Polynomials and Their Derivatives. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **39**, 1005-1019. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.03.007

[7] Hoggatt Jr., V.E. and Lind, D.A. (1968) Symbolic Substitutions into Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, **6**, 55-74.

[8] Lee, G.Y. and Asci, M. (2012) Some Properties of the (p,q)-Fibonacciand (p,q)-Lucas Polynomials. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, Article ID: 264842. https://doi.org/10.1155/2012/264842

[9] Aşçı, M. and Gürel, E. (2013) Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas Numbers. *Ars Combinatoria*, **111**, 53-62.

[10] Yağmur, T. (2019) Gaussian Pell-Lucas Polynomials. *Communications in Mathematics and Applications*, **10**, 673-679. https://doi.org/10.26713/cma.v10i4.804

[11] Uygun, S. (2018) A New Generalization for Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Sequences. *Asian Journal of Mathematics and Physics*, **2**, 14-21.