Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3272-3285
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311341

Hans汉斯

一类具有低正则初值的趋化–流体耦合模型解的整体存在性

陈　娟，韩永杰

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年10月15日；录用日期：2023年11月16日；发布日期：2023年11月24日

摘　要

考虑在三维有界区域上带有logistic源的具有信号消耗机制的趋化–流体耦合方程组：

$$\begin{cases} n_t + u\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot(n\nabla c) + rn - \mu n^{\alpha}, & x\in\Omega, t>0, \\ c_t + u\cdot\nabla c = \Delta c - nc, & x\in\Omega, t>0, \\ u_t + (u\cdot\nabla)u = \Delta u + \nabla P + n\nabla\Phi, & x\in\Omega, t>0, \\ \nabla\cdot u = 0, & x\in\Omega, t>0. \end{cases}$$

的初边值问题，其中$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是一个具有光滑边界的有界区域；$n$和$c$满足齐次Neumann边界条件，$u$满足Dirichlet边界条件；$\Phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$；$r>0$，$\mu>0$，$\alpha>1$是给定的参数。此前的结果表明：当初值满足$n_0\in C^0(\bar{\Omega})$时，该模型在三维有界凸区域上存在整体弱解。本文进一步研究了当初值条件正则性更低时，该模型弱解的整体存在性。具体而言，初值n_0满足$n_0\in L^1(\Omega)$，该模型在三维有界凸区域上存在整体弱解。

关键词

趋化–流体耦合模型，Logistic源，弱解

Global Existence of Solutions for a Chemotaxis-Fluid Coupling Model with Low Regular Initial Data

Juan Chen, Yongjie Han

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Oct. 15th, 2023; accepted: Nov. 16th, 2023; published: Nov. 24th, 2023

文章引用: 陈娟, 韩永杰. 一类具有低正则初值的趋化-流体耦合模型解的整体存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3272-3285. DOI: 10.12677/pm.2023.1311341

Abstract

This paper mainly studies the initial-boundary value problem of chemotaxis-fluid coupling equations

$$\begin{cases} n_t + u\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot(n\nabla c) + rn - \mu n^{\alpha}, & x\in\Omega, t>0, \\ c_t + u\cdot\nabla c = \Delta c - nc, & x\in\Omega, t>0, \\ u_t + (u\cdot\nabla)u = \Delta u + \nabla P + n\nabla\Phi, & x\in\Omega, t>0, \\ \nabla\cdot u = 0, & x\in\Omega, t>0. \end{cases}$$

with signal consumption mechanism on a three-dimensional bounded domain with logistic source where $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ is bounded domain with smooth boundary; n and c satisfy the homogeneous Neumann boundary condition and u satisfy the Dirichlet boundary condition; where $\Phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$; where $r>0$, $\mu>0$, and $\alpha>1$ are given parameters. Previous results show that the initial value satisfies $n_0\in C^0(\bar{\Omega})$, the model has a globally weak solution on the three-dimensional bounded convex region. This paper further examines when the initial value condition regularity is lower, the globally existence of weak solutions in this model. Specifically, the initial value n_0 satisfies $n_0\in L^1(\Omega)$, the model has a global weak solution on a three-dimensional bounded convex region.

Keywords

Chemotaxis-Fluid Coupling Model, Logistic Source, Weak Solution

1. 引言

趋化性是指细胞(菌)或生物体对化学物质浓度做出反应的定向运动，是细胞(菌)迁移的重要手段之一。20 世纪 70 年代，Keller 和 Segel 提出了一类抛物–抛物型偏微分方程组用来研究基网柄菌聚合现象[1]，其具体形式为

$$\begin{cases} n_t = \Delta n - \nabla\cdot(nS(n)\nabla c), \\ c_t = \Delta c - c + n, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中未知函数 $n(x,t), c(x,t)$ 分别表示细胞密度和化学信号浓度，S 表示趋化灵敏度函数。当 S 恒等于常值函数 1 时，所得模型被称为 Keller-Segel 极小模型[2] [3]。该模型自提出以来引起了许多数学家的兴趣，主要集中于解的爆破，整体存在性及渐近性等问题[4] [5] [6] [7]。在过去的 40 年里，很多文献致力于研究该模型的齐次 Neumann 初边值问题的有界性和爆破[8] [9] [10]。由于模型同时存在着扩散和迁移两种机制，其动力学行为比较复杂，某些形式会在有限时刻出现爆破，即细胞密度在某一刻趋于无穷大，这与实验观测的生物事实不符。因此，从生物学的角度出发，考虑模型在一定情况下的整体可解性具有现实意义。

当枯草杆菌悬浮在固着的水滴中时，该菌群会呈现复杂的时空行为。具体的说，枯草杆菌细胞会聚

集成羽状，同时周围还会自发的产生大规模流体运动并形成对流斑图。为了用数学的方式描述这种现象。Tuval 等人提出了如下趋化–流体耦合模型：

$$\begin{cases} n_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot\left(nS(x,n,c)\nabla c\right), & x\in\Omega, t>0, \\ c_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla c = \Delta c - nc, & x\in\Omega, t>0, \\ \boldsymbol{u}_t + \kappa(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u} + \nabla P + n\nabla\Phi, & x\in\Omega, t>0, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 和 P 分别表示不可压缩流体的速度以及相应的压力，Φ 是给定的重力势函数，κ 表示非线性对流的强度。建立此模型基于两方面的假设：第一，菌体的运动要受随机扩散(“$n_t = \Delta n$”)，流体运动(“$-\boldsymbol{u}\cdot\nabla n$”)，氧气量递增梯度(“$-\nabla(n\nabla c)$”)三者的共同作用；第二，单细胞菌体会消耗氧气(“$-nc$”)并借助浮力的反作用对流体的运动(“$-\boldsymbol{u}\cdot\nabla c$”)产生影响。

在自然界中，描述生物种群模型的微分方程通常涉及超线性退化项。例如：经典的人口动态模型最初是由 Pierre-Francois Verhulst 在 1838 年提出，表明了一个生物种群在一定时间内的自限性增长，可通过 logistic 方程 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP - \mu P^2$ 来描述，这里 r 为生长速率，$\frac{r}{\mu}$ 是物种的可容能力，这也与同一物种的死亡率有关。如果我们考虑种群在空间中的扩散和迁移。例如，在最简单的演化方程中，具有以下形式

$$n_t = \Delta n + rn - \mu|n|^{\alpha-1},\quad \alpha>1,\ r\in R,\ \mu>0.$$

由于这种类型的衰减机制通常提供额外的耗散，从而相应地增强了发散的特征。这种超线性阻尼可以用来扩展著名的热方程解理论，从而为具有远低于可积性的初值构造解。于是，在趋化–流体耦合模型中，细菌自身的增殖与死亡也应该被考虑。Mimura 等人研究了基于细菌趋化扩散和增长的模型，他们在模型中增加了 logistic 源项 $rn-\mu n^2\ (r\ge 0, \mu>0)$，通过考虑细胞的死亡来抵消由细胞数量的无限增长引起的细胞聚集。

我们知道 logistic 源对方程组解的爆破具有抑制作用，于是考虑具有 logistic 源的趋化–流体耦合模型：

$$\begin{cases} n_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot\left(nS(x,n,c)\nabla c\right) + rn - \mu n^\alpha, & x\in\Omega, t>0, \\ c_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla c = \Delta c - nc, & x\in\Omega, t>0, \\ \boldsymbol{u}_t + \kappa(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u} + \nabla P + n\nabla\Phi, & x\in\Omega, t>0, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\Phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$，该模型有很多重要的结果[11] [12]，其中：Wang 考虑了 $1<\alpha<2$ 的情况，得到了模型弱解的整体存在性和 $\frac{6}{5}\le\alpha<2$ 时弱解的最终光滑性[13]。

根据上述趋化–流体耦合方程组的发展状况，在 Wang 的研究基础上，本论文研究在三维有界凸区域上的如下初边值问题：

$$\begin{cases} n_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot(n\nabla c) + rn - \mu n^\alpha, & x\in\Omega, t>0, \\ c_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla c = \Delta c - nc, & x\in\Omega, t>0, \\ \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u} + \nabla P + n\nabla\Phi, & x\in\Omega, t>0, \\ \partial_\nu n = \partial_\nu c = 0,\ u=0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ n(x,0)=n_0(x),\ c(x,0)=c_0(x),\ \boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

在文献[13]中，由定理 1.1 可知，当 $r\ge 0, \mu>0, \alpha>1$ 时，对于初值 n_0 满足 $n_0\in C^0(\overline{\Omega})$，该模型在三

维有界凸区域中存在整体弱解。本文针对初值 $n_0 \in L^1(\Omega)$ 的情况，对问题解的存在性进行了研究。

考虑其初值满足：

$$\begin{cases} n_0 \in L^1(\Omega), & n_0 \geq 0, \\ c_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), & c_0 \geq 0, \\ u_0 \in D(A^\beta), \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\beta \in \left(\frac{3}{4},1\right)$， $A := -\mathcal{P}\Delta$ 是 Stokes 算子，其定义域为 $D(A) := W^{2,2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap L_\sigma^2(\Omega)$，其中 $L_\sigma^2(\Omega) := \left\{\varphi \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \,|\, \nabla\cdot\varphi = 0\right\}$。基于以上条件的假设，主要的结论如下：

定理 1.1. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个具有光滑边界的有界凸区域，当 $\alpha > 1, r > 0, \mu > 0$，且初值 $(n_0, c_0, \boldsymbol{u}_0)$ 满足条件(1.5)，则存在函数

$$\begin{cases} n \in L_{loc}^1\left([0,\infty), W^{1,1}(\Omega)\right), \\ c \in L_{loc}^1\left([0,\infty), W^{1,1}(\Omega)\right), \\ \boldsymbol{u} \in L_{loc}^1\left([0,\infty), W_{0,\sigma}^{1,1}(\Omega);\mathbb{R}^3\right), \end{cases} \tag{1.6}$$

使得 $(n,c,\boldsymbol{u})$ 在命题 2.1 意义下是初边值问题(1.4)的整体弱解。

2. 预备知识

首先给出弱解的定义。在下面的表述中，对于给定向量 $v \in \mathbb{R}^3$ 以及 $w \in \mathbb{R}^3$，令 $v \otimes w$ 表示矩阵 $(v\otimes w)_{ij} := v_i w_j, i, j \in \{1,2,3\}$。

命题 2.1. 若函数组 $(n,c,\boldsymbol{u})$ 满足下列条件，则称 $(n,c,\boldsymbol{u})$ 为初边值问题(1.4)的整体弱解：

(i)

$$\begin{cases} n \in L_{loc}^1\left([0,\infty), W^{1,1}(\Omega)\right), \\ c \in L_{loc}^1\left([0,\infty), W^{1,1}(\Omega)\right), \\ \boldsymbol{u} \in L_{loc}^1\left([0,\infty), W_{0,\sigma}^{1,1}(\Omega);\mathbb{R}^3\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $n \geq 0, c \geq 0$ 在 $\Omega \times (0,\infty)$ 上几乎处处成立，且 $nc \in L_{loc}^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)$， $n^\alpha \in L_{loc}^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)$， $u \otimes u \in L_{loc}^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty);\mathbb{R}^{3\times3}\right)$；且 $n\nabla c$， nu， $cu \in L_{loc}^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty);\mathbb{R}^3\right)$；

(ii) 对于任意 $\xi \in C_0^\infty\left(\Omega\times[0,\infty)\right)$，有

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty \int_\Omega n\xi_t - \int_\Omega n_0\xi(\cdot,0) - \int_0^\infty nu\cdot\nabla\xi \\ &= -\int_0^\infty \int_\Omega \nabla n\cdot\nabla\xi + \int_0^\infty \int_\Omega n\nabla c\cdot\nabla\xi + r\int_0^\infty \int_\Omega n\xi - \mu\int_0^\infty \int_\Omega n^\alpha \xi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

和

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty \int_\Omega c\xi_t - \int_\Omega c_0\xi(\cdot,0) - \int_0^\infty \int_\Omega cu\cdot\nabla\xi \\ &= -\int_0^\infty \int_\Omega \nabla c\cdot\nabla\xi - \int_0^\infty \int_\Omega nc\xi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

对于任意的 $\psi \in C_{0,\sigma}^\infty\left(\Omega\times[0,\infty)\right)$，有

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^{\infty}\int_{\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\psi_t-\int_{\Omega}\boldsymbol{u}_0\cdot\psi(\cdot,0)-\int_0^{\infty}\int_{\Omega}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi \\
& =-\int_0^{\infty}\int_{\Omega}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi+\int_0^{\infty}\int_{\Omega}n\nabla\psi\cdot\nabla\Phi.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

接下来，为了证明初边值问题(1.4)解的整体存在，我们首先引入一个函数序列$\{n_{0\varepsilon}\}_{\varepsilon\in(0,1)}$满足

$$
\{n_{0\varepsilon}\}_{\varepsilon\in(0,1)}\subset C^0(\bar{\Omega}),\quad n_{0\varepsilon}\ge 0. \tag{2.5}
$$

在$L^1(\Omega)$中，当$\varepsilon\to 0$时，有

$$
n_{0\varepsilon}\to n_0, \tag{2.6}
$$

以及对于任意的$\varepsilon\in(0,1)$，有

$$
\int_{\Omega}n_{0\varepsilon}\le 2\int_{\Omega}n_0. \tag{2.7}
$$

其次，考虑下列正则化问题：

$$
\begin{cases}
n_{\varepsilon t}+\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\cdot\nabla n_{\varepsilon}=\Delta n_{\varepsilon}-\nabla\cdot\left(n_{\varepsilon}F_{\varepsilon}'(n_{\varepsilon})\nabla c_{\varepsilon}\right)+rn_{\varepsilon}-\mu n_{\varepsilon}^{\alpha}, & x\in\Omega,t>0,\\
c_{\varepsilon t}+\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\cdot\nabla c_{\varepsilon}=\Delta c_{\varepsilon}-c_{\varepsilon}\cdot F_{\varepsilon}(n_{\varepsilon}), & x\in\Omega,t>0,\\
\boldsymbol{u}_{\varepsilon t}+(Y_{\varepsilon}\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{\varepsilon}=\Delta\boldsymbol{u}_{\varepsilon}+\nabla P_{\varepsilon}+n_{\varepsilon}\nabla\Phi, & x\in\Omega,t>0,\\
\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\varepsilon}=0, & x\in\Omega,t>0,\\
\partial_{\nu}n_{\varepsilon}=\partial_{\nu}c_{\varepsilon}=0,\boldsymbol{u}_{\varepsilon}=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\
n_{\varepsilon}(x,0)=n_{0\varepsilon}(x),c_{\varepsilon}(x,0)=c_0(x),\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,
\end{cases} \tag{2.8}
$$

其中$\varepsilon\in(0,1)$，$Y_{\varepsilon}=(1+\varepsilon A)^{-1}$，$F_{\varepsilon}(n_{\varepsilon}):=\frac{1}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon n_{\varepsilon})$。

此正则化问题的经典解整体存在。

引理 2.2. 假设$\Omega\in\mathbb{R}^3$是一个具有光滑边界的有界凸区域，$\Phi\in W^{2,\infty}(\Omega)$，且$r\ge 0$，$\mu>0$，$\alpha>1$，$n_{0\varepsilon}$，$c_0$和$\boldsymbol{u}_0$满足(1.5)，(2.5)~(2.7)，则对于任意的$\varepsilon\in(0,1)$，存在$T_{\max,\varepsilon}\in(0,\infty]$使得初边值问题(2.8)在$\Omega\times(0,T_{\max,\varepsilon})$上有经典解$(n_{\varepsilon},c_{\varepsilon},\boldsymbol{u}_{\varepsilon},P_{\varepsilon})$，且满足

$$
\begin{cases}
n_{\varepsilon}\in C^0\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max,\varepsilon})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max,\varepsilon})\right),\\
c_{\varepsilon}\in C^0\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max,\varepsilon})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max,\varepsilon})\right)\cap\bigcap_{p>1}C^0\left([0,T_{\max,\varepsilon});W^{1,p}(\Omega)\right),\\
\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\in C^0\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max,\varepsilon});\mathbb{R}^3\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max,\varepsilon});\mathbb{R}^3\right),\\
P_{\varepsilon}\in C^{1,0}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max,\varepsilon})\right),
\end{cases} \tag{2.9}
$$

对于任意$q>3$，$\beta\in\left(\frac{3}{4},1\right)$成立，且当$T_{\max,\varepsilon}>0$时，

$$
\lim_{t\nearrow T_{\max,\varepsilon}}\sup\left(\|n_{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\|c_{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}+\|A^{\beta}\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\right)=\infty. \tag{2.10}
$$

证明 局部存在性的类似证明过程可以参考文献[12]的引理 2.1 和 2.2。

3. 一些基本估计

引理 3.1. 设$(n_{\varepsilon},c_{\varepsilon},\boldsymbol{u}_{\varepsilon})$是问题(2.8)的经典解，对于所有$t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$和任意$\varepsilon\in(0,1)$，满足

$$\int_{\Omega} n_{\varepsilon}(t) \le \max\left\{2\int_{\Omega} n_0(x), \left(\frac{r}{\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} |\Omega|\right\} := m^{*}. \tag{3.1}$$

证明 在方程组(2.8)的第一个方程两边同时积分，利用 Hölder 不等式和 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ 以及边界条件可得

$$\left(\int_{\Omega} n_{\varepsilon}\right)_t = r\int_{\Omega} n_{\varepsilon} - \mu\int_{\Omega} n_{\varepsilon}^{\alpha} \le r\int_{\Omega} n_{\varepsilon} - \mu|\Omega|^{1-\alpha}\left(\int_{\Omega} n_{\varepsilon}\right)^{\alpha}, \tag{3.2}$$

解这个常微分方程，即可证得(3.1)式。

引理 3.2. 在引理 3.1 的假设下，存在 $C(\tau) > 0$ 使得

$$\int_t^{t+\tau}\int_{\Omega} n_{\varepsilon}^{\alpha} \le C(\tau), \tag{3.3}$$

对于所有 $t \in (0, T_{\max,\varepsilon} - \tau)$ 和任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 成立，其中 $\tau := \min\left\{1, \frac{1}{2}T_{\max,\varepsilon}\right\}$。

证明 对(3.1)式两端在时间上进行积分即可得证。

引理 3.3. 设 $(n_{\varepsilon}, c_{\varepsilon}, \boldsymbol{u}_{\varepsilon})$ 是模型(2.8)的经典解，对于所有 $t \in (0, T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$n_{\varepsilon} \ge 0, c_{\varepsilon} \ge 0. \tag{3.4}$$

证明 对方程组(2.8)的第一个方程和第二个方程分别利用抛物比较原理，即可得 n_{ε} 和 c_{ε} 的非负性。

引理 3.4. 设 $(n_{\varepsilon}, c_{\varepsilon}, \boldsymbol{u}_{\varepsilon})$ 是模型(2.8)的经典解，且初值满足(1.5)，则对于所有 $t \in (0, T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$\left\|c_{\varepsilon}(\cdot,t)\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \le \left\|c_0(x)\right\|_{L^{\infty}} := c_{\infty}. \tag{3.5}$$

证明 由抛物比较原理即可证得结论成立。

引理 3.5. 对于所有 $t \in (0, T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$\int_0^{T_{\max,\varepsilon}}\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^2 \le m_{*}, \tag{3.6}$$

其中 $m_{*} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} c_0^2$。

证明 在方程组(2.8)的第二个方程两端同时乘以 c_{ε}，再在 Ω 和时间上积分，对于所有 $t \in (0, T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} c_{\varepsilon}^2(t) + \int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} c_0^2 - \int_0^t\int_{\Omega} c_{\varepsilon}^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon n_{\varepsilon}) = m_{*},$$

最后取 $t \nearrow T_{\max,\varepsilon}$ 可证得(3.6)式。

下面，我们希望得到能量泛函

$$\int_{\Omega} n_{\varepsilon}\ln n_{\varepsilon} + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla c_{\varepsilon}\right|^2}{c_{\varepsilon}} + K\int_{\Omega}\left|\boldsymbol{u}_{\varepsilon}\right|^2 \tag{3.7}$$

的估计。

引理 3.6. 存在 $C > 0$，使得对于所有 $t \in (0, T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} n_{\varepsilon}\ln n_{\varepsilon} + \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} n_{\varepsilon}^{\alpha}\ln n_{\varepsilon} + \int_{\Omega}\frac{\left|\nabla n_{\varepsilon}\right|}{n_{\varepsilon}} \le \int_{\Omega}\frac{\nabla n_{\varepsilon}\cdot\nabla c_{\varepsilon}}{1+\varepsilon n_{\varepsilon}} + C. \tag{3.8}$$

证明 对于 $\int_{\Omega} n_{\varepsilon}\ln n_{\varepsilon}$，由方程组(2.8)的第一个方程，利用分部积分有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega n_\varepsilon \ln n_\varepsilon &= \int_\Omega n_{\varepsilon t} + \int_\Omega n_{\varepsilon t}\ln n_\varepsilon \\ &= r\int_\Omega n_\varepsilon - \mu\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha - \int_\Omega \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} + \int_\Omega \frac{\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon} \\ &\quad + r\int_\Omega n_\varepsilon \ln n_\varepsilon - \mu\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha \ln n_\varepsilon,\end{aligned}$$

当 $\alpha>1$ 时，函数 $s\mapsto rs-\mu s^\alpha, s\in[0,\infty)$ 和 $s\mapsto\left(rs-\frac{\mu}{2}s^\alpha\right)\ln s$ 是有界的，所以存在 $C_1>0$，使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega n_\varepsilon \ln n_\varepsilon + \int_\Omega \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} + \frac{\mu}{2}\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha \ln n_\varepsilon \le \int_\Omega \frac{\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon} + 2C_1,$$

则(3.8)式得证。

引理 3.7. 存在 $K,k,c>0$，使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon} + k\int_\Omega c_\varepsilon\left|D^2\ln c_\varepsilon\right|^2 + k\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^4}{c_\varepsilon^3} \le K\int_\Omega|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 - 2\int_\Omega \frac{\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla c_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon} + C. \tag{3.9}$$

证明 我们从计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon}$ 开始，对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon} &= \int_\Omega \frac{c_\varepsilon 2\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla c_{\varepsilon t} - c_{\varepsilon t}|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon^2} \\ &= -2\int_\Omega \frac{|\Delta c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon} + 2\int_\Omega \Delta c_\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon n_\varepsilon) + 2\int_\Omega \frac{\Delta c_\varepsilon}{c_\varepsilon}\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla c_\varepsilon \\ &\quad + \int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2\Delta c_\varepsilon}{c_\varepsilon^2} - \int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon n_\varepsilon)}{c_\varepsilon} - \int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon^2}\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla c_\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.10}$$

由参考文献[12]的引理 2.7，利用 Young 不等式和分部积分公式可得，存在 $k_1>0$，$k_2>0$，$k_3>0$ 使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon} + k_1\int_\Omega c_\varepsilon\left|D^2\ln c_\varepsilon\right|^2 + \frac{k_1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^4}{c_\varepsilon^3} \le k_3\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon\Big|^2 - 2\int_\Omega \frac{\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla c_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon} + k_2\int_\Omega c_\varepsilon,$$

则(3.9)得证。

引理 3.8. 对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 = \int_\Omega n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\Phi. \tag{3.11}$$

证明 在方程组(2.8)的第三个方程两端同时乘以 $\boldsymbol{u}_\varepsilon$，再在 Ω 上分部积分，利用分部积分公式和 $\int_\Omega u_\varepsilon\cdot\nabla P=0$ 以及 $\int_\Omega(Y_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{u}_\varepsilon=0$ 可证得结论成立。

引理 3.9. 存在 $k,K,C>0$ 使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega n_\varepsilon\ln n_\varepsilon + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon} + K\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} \\ &+ \frac{k}{2}\int_\Omega c_\varepsilon\left|D^2\ln c_\varepsilon\right|^2 + \frac{\mu}{2}\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha\ln n_\varepsilon + \frac{k}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla c_\varepsilon|^4}{c_\varepsilon^3} + \frac{K}{2}\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \le C.\end{aligned} \tag{3.12}$$

证明 由引理 3.6、3.7 和引理 3.8 可得，存在 $C_1>0$ 使得对于任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega n_\varepsilon\ln n_\varepsilon+\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon}+K\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\right)+\int_\Omega\frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon}+\frac{k}{2}\int_\Omega c_\varepsilon\left|D^2\ln c_\varepsilon\right|^2\\&+\frac{\mu}{2}\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha\ln n_\varepsilon+\frac{k}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla c_\varepsilon|^4}{c_\varepsilon^3}+K\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\le 2K\int_\Omega n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\Phi+C_1\end{aligned}\tag{3.13}$$

对于 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 成立。利用 $\nabla\Phi$ 的有界性，Hölder 不等式以及 $W^{1,2}(\Omega)$ 嵌入到 $L^6(\Omega)$，有

$$K\int_\Omega n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\Phi\le C\left(\int_\Omega n_\varepsilon^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\int_\Omega\boldsymbol{u}_\varepsilon^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}}\le C\|n_\varepsilon\|_{L^5(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^6(\Omega)}\le C_2\|\nabla n_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

对于所有的 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 成立。对于上式的 $\|n_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}$，利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式、Young 不等式

和(3.1)式，存在 $C_5>0$，使得

$$K\int_\Omega n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\Phi\le\frac{K}{2}\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla n_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C_5.$$

对于所有的 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 成立。将这个不等式代入(3.13)，结论得证。

引理 3.10. 存在 $C>0$ 使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 和任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\int_\Omega n_\varepsilon\ln n_\varepsilon+\int_\Omega\frac{|\nabla c_\varepsilon|}{c_\varepsilon}+K\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\le C.\tag{3.14}$$

对于所有 $t\in[0,T_{\max,\varepsilon}-\tau)$，有

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega\frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon}+\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha\ln n_\varepsilon+\int_t^{t+\tau}\int_\Omega\frac{|\nabla c_\varepsilon|^4}{c_\varepsilon}+\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\le C,\tag{3.15}$$

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_\varepsilon^{\frac{5}{3}}+\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla n_\varepsilon|^{\frac{5}{4}}+\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^{\frac{10}{3}}+\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla c_\varepsilon|^4+\int_\Omega|\nabla c_\varepsilon|^2\le C,\tag{3.16}$$

其中 $\tau:=\min\left\{1,\frac{1}{2}T_{\max,\varepsilon}\right\}$。

证明 令

$$H_\varepsilon(t)=\int_\Omega n_\varepsilon\ln n_\varepsilon+\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla c_\varepsilon|^2}{c_\varepsilon}+K\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2.$$

首先利用初等不等式 $s\ln s\le\frac{3}{2}s^{\frac{5}{3}}$、Gagliardo-Nirenberg 不等式、Young 不等式和 poincare 不等式，结合(3.1)式可得到，存在 $C_1,C_2>0$，对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$H_\varepsilon'(t)+C_1H_\varepsilon(t)\le C_2,$$

于是(3.14)式得证。由(3.12)式可直接证得(3.15)式。对于(3.16)式，同样利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式，Young 不等式，可得 $\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_\varepsilon^{\frac{5}{3}}\le C_3$，$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla n_\varepsilon|^{\frac{5}{4}}\le C_4$，$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^{\frac{10}{3}}\le C_5$ 对于所有的 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon}-\tau)$ 成立，其中 $C_3,C_4,C_5>0$。进一步结合(3.15)式的有界性和(3.14)式可推得(3.16)式的最后一项 $\int_\Omega|\nabla c_\varepsilon|^2<C_6$，

其中 $C_6>0$，则(3.16)式得证。

引理 3.11. 对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，问题(2.8)的解是整体存在的，即 $T_{\max,\varepsilon}=\infty$。

证明 假设存在 $\varepsilon\in(0,1)$，使得 $T_{\max,\varepsilon}$ 是有界的。由引理 3.10，存在 $C_1>0, C_2>0$，使得 $\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla c_\varepsilon|^4\le C_1$，$\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\le C_2$ 对于所有的 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$ 成立。在方程组(2.8)的第一个方程两端乘以 n_ε^3，再在 Ω 上积分，利用分部积分公式可得：

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega n_\varepsilon^4+3\int_\Omega n_\varepsilon^2|\nabla n_\varepsilon|^2=3\int_\Omega\frac{n_\varepsilon\cdot n_\varepsilon^3}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla n_\varepsilon+r\int_\Omega n_\varepsilon^4-\mu\int_\Omega n_\varepsilon^{3+\alpha}.$$

利用 Young 不等式和 $\frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\le n_\varepsilon$ 可知，对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\int_\Omega n_\varepsilon^4(\cdot,t)\le C_3, \tag{3.17}$$

其中 $C_3>0$。对于 $\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$，因为 $D(1+\varepsilon A)$ 嵌入到 $L^\infty(\Omega)$，对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，存在 $C_4,C_5>0$，使得

$$\|Y_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}=\left\|(1+\varepsilon A)^{-1}\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_4\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\le C_5. \tag{3.18}$$

令 Stokes 方程组 $\boldsymbol{u}_{\varepsilon t}+A\boldsymbol{u}_\varepsilon=\mathcal{P}\left[-(Y_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_\varepsilon+n_\varepsilon\nabla\Phi\right]:=H_\varepsilon(x,t)$，在方程两端同时乘以 $A\boldsymbol{u}_\varepsilon$，再在 Ω 上积分，由 $\|\mathcal{P}\varphi\|_{L^2(\Omega)}\le\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ 对于所有 $\varphi\in L^2(\Omega)$ 成立，$\int_\Omega\left|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right|^2=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2$ 对于所有的 $\varphi\in D(A)$ 成立可得

$$\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\le C_6, \tag{3.19}$$

于是对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\|H_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\le C_7. \tag{3.20}$$

接下来，利用 Stokes 半群的估计可知[14]，存在 $\lambda>0$， $C_8>0$，对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\left\|A^\beta\boldsymbol{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}=\left\|A^\beta\mathrm{e}^{-tA}\boldsymbol{u}_0+\int_\Omega A^\beta\mathrm{e}^{-(t-s)A}H_\varepsilon(\cdot,s)\mathrm{d}s\right\|_{L^2(\Omega)}\le C_8. \tag{3.21}$$

由于 $D(A^\beta)$ 嵌入到 $L^\infty(\Omega)$ 可知，存在 $C_9>0$，使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_9.$$

同样，利用 Neumann 热半群的估计可知[15]，存在常数 $C_{10}>0$，$C_{11}>0$，使得对于所有 $t\in(0,T_{\max,\varepsilon})$，有

$$\|\nabla c_\varepsilon\|_{L^4(\Omega)}\le C_{10}$$

和

$$\|n_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_{11}$$

成立。证明细节可参考文献[16]中的引理 4.1。结合(3.21)式，这与引理 2.1 的局部存在性准则矛盾，于是，$T_{\max,\varepsilon}=\infty$ 得证。

引理 3.12. 对于所有 $T>0$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $C>0$，有

$$\|n_{\varepsilon t}\|_{L^{\frac{10}{9}}\left((0,T);\left(W^{1,10}(\Omega)\right)^*\right)}\le C.$$

证明 取任意 $\varphi\in W^{1,10}(\Omega)$，对方程组(2.8)的第一个方程两端同时乘以 φ，对于任意 $t>0$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega n_{\varepsilon t}\cdot\varphi\right| &\le \left|\int_\Omega \nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\right|+\left|\int_\Omega \frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\right|+r\left|\int_\Omega n_\varepsilon\varphi\right|+\mu\left|\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha\varphi\right|+\left|\int_\Omega n_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\varphi\right| \\ &\le \|\nabla n_\varepsilon\|_{L^{\frac{10}{9}}(\Omega)}\cdot\|\nabla\varphi\|_{L^{10}(\Omega)}+\left\|\frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\right\|_{L^{\frac{10}{9}}(\Omega)}\cdot\|\nabla\varphi\|_{L^{10}(\Omega)}+r\|\varphi\|_{L^{10}(\Omega)}\cdot\|n_\varepsilon\|_{L^{\frac{10}{9}}(\Omega)} \\ &\quad+\mu\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha+\|n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{10}{9}}(\Omega)}\cdot\ \|\varphi\|_{L^{10}(\Omega)}.\end{aligned}$$

存在常数 $C_1>0$，对于所有 $T>0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^T\|n_{\varepsilon t}\|^{\frac{10}{9}}_{\left(W^{1,10}(\Omega)\right)^*} &\le C_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla n_\varepsilon|^{\frac{10}{9}}+C_1\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\right|^{\frac{10}{9}} \\ &\quad+C_1r\int_0^T\int_\Omega|n_\varepsilon|^{\frac{10}{9}}+C_1\mu\int_0^T\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha+C_1\int_0^T\int_\Omega|n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon|^{\frac{10}{9}}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

利用 Young 不等式，结合引理 3.2、3.10 和(3.22)式可知，存在常数 $C>0$，使得

$$\int_0^T\|n_{\varepsilon t}\|^{\frac{10}{9}}_{\left(W^{1,10}(\Omega)\right)^*}\le C$$

成立，则引理得证。

引理 3.13. 对于所有 $T>0$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $C>0$，有

$$\|c_{\varepsilon t}\|_{L^2\left((0,T),\left(W^{1,10}(\Omega)\right)^*\right)}\le C.$$

证明 取任意 $\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$，对方程组(2.8)的第二个方程两端同时乘以 φ，利用 Holder 不等式和分部积分公式可知，对于任意的 $T>0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega c_{\varepsilon t}\varphi &\le \left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla c_\varepsilon|^2\right)^{\frac12}\|\nabla\varphi\|_{L^2\left((0,T),L^2(\Omega)\right)}+c_\infty\left(\int_0^T\int_\Omega|n_\varepsilon|^{\frac53}\right)^{\frac35} \\ &\quad\times\left(\int_0^T\int_\Omega|\varphi|^{\frac52}\right)^{\frac25}+c_\infty\left(\int_0^T\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\right)^{\frac12}\|\nabla\varphi\|_{L^2\left((0,T),L^2(\Omega)\right)}\end{aligned}$$

成立。因此，结合引理 3.10，结论得证。

引理 3.14. 对于所有 $T>0$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $C>0$，有

$$\|\boldsymbol{u}_{\varepsilon t}\|_{L^2\left((0,T),\left(W^{1,3}(\Omega)\right)^*\right)}\le C.$$

证明 取任意 $\psi\in L^2\left((0,T),\left(W^{1,3}(\Omega)\right)^*\right)$ 且 $\|\psi\|_{L^2\left((0,T),W^{1,3}(\Omega)\right)}=1$，则对于任意的 $T>0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\boldsymbol{u}_{\varepsilon t}\cdot\psi &\le\left|-\int_0^T\int_\Omega\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\psi+\int_0^T\int_\Omega Y_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon\nabla\psi+\int_0^T\int_\Omega n_\varepsilon\nabla\Phi\cdot\psi\right| \\ &\le\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2\left((0,T),L^2(\Omega)\right)}\|\nabla\psi\|_{L^2\left((0,T),L^2(\Omega)\right)} \\ &\quad+\|Y_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2\left((0,T),L^6(\Omega)\right)}\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^\infty\left((0,T),L^2(\Omega)\right)}\|\nabla\psi\|_{L^2\left((0,T),L^3(\Omega)\right)} \\ &\quad+\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|n_\varepsilon\|_{L^2\left((0,T),L^{6/5}(\Omega)\right)}+\|\psi\|_{L^2\left((0,T),L^6(\Omega)\right)}\right).\end{aligned}$$

由 $W^{1,2}(\Omega)$ 嵌入到 $L^6(\Omega)$ 和 Y_ε 的性质可知，存在 $k_1>0$，使得对于所有 $t>0$，有

$$\|Y_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^6(\Omega)} \le k_1 \|\nabla Y_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = k_1 \|A^{1/2} Y_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = k_1 \|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

进一步，利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式推导可得

$$\|n_\varepsilon\|_{L^{6/5}(\Omega)}^2 = \|n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^{12/5}(\Omega)}^4 \le k_2 \|\nabla n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_3.$$

又由引理 3.10 中包含的 $\|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T),L^2(\Omega))}, \|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}, \|\nabla n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2((0,T),L^2(\Omega))}$ 的有界性，引理 3.14 得证。

命题 3.15. 设 $r>0, \mu>0$，$(n_\varepsilon, c_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, P_\varepsilon)$ 是正则化问题(2.8)的经典解，存在函数 $(n, c, \boldsymbol{u})$ 满足(2.1)及一个子列 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得当 $j\to\infty$，$\varepsilon_j \searrow 0$ 并且当 $\varepsilon=\varepsilon_j \searrow 0$ 时有

$$n_\varepsilon \to n \text{ 在 } L_{loc}^{\frac{5}{3}}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right) \text{ 并在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 上几乎处处收敛，} \tag{3.23}$$

$$\nabla n_\varepsilon \rightharpoonup \nabla n \text{ 在 } L_{loc}^{\frac{5}{4}}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right), \tag{3.24}$$

$$n_\varepsilon^\alpha \to n^\alpha \text{ 在 } L_{loc}^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right), \tag{3.25}$$

$$c_\varepsilon \to c \text{ 在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 上几乎处处收敛，} \tag{3.26}$$

$$c_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} c \text{ 在 } L^\infty\left((0,\infty); L^p(\Omega)\right) \text{ 对于所有的 } p\in(1,\infty], \tag{3.27}$$

$$\nabla c_\varepsilon \rightharpoonup \nabla c \text{ 在 } L_{loc}^4\left([0,\infty); L^4(\Omega)\right), \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u} \text{ 在 } L^\infty\left((0,\infty); L^p(\Omega)\right) \quad p\in[1,6) \text{ 并且在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 上几乎处处收敛，} \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ 在 } L_{loc}^{\frac{10}{3}}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right), \tag{3.30}$$

$$\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon \rightharpoonup \nabla \boldsymbol{u} \text{ 在 } L_{loc}^2\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right), \tag{3.31}$$

$$Y_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} \text{ 在 } L_{loc}^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)。 \tag{3.32}$$

证明 由(3.16)式可直接证得(3.24)式。由引理 3.12 和(3.16)式，利用 Aubin-Lions 引理可得 $\{n_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 在 $L_{loc}^{\frac{5}{3}}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)$ 上是相对列紧的，因此存在子列 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 使得(3.23)式成立。又由引理 3.10 可以得到，对于任意 $T>0$，$\int_0^T\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha \ln n_\varepsilon$ 的是有界的，则 $\{n_\varepsilon^\alpha\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 是一致可积的，于是通过(3.23)和 Vitali 收敛定理可知，存在子列使得(3.25)式成立。对于 c_ε 的收敛性，由引理 3.4 和(3.16)式可直接证得(3.27)式和(3.28)式。由引理 3.13 和(3.16)式，利用 Aubin-Lions 引理可得 $\{c_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 在 $L^\infty\left([0,T), W^{1,2}(\Omega)\right)$ 上相对列紧的，因此存在子列 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 使得(3.26)式成立。最后，关于 $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ 的收敛性，由引理 3.14 和(3.16)式，利用 Aubin-Lions 引理可得 $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 在 $L^2\left((0,\infty); L^p(\Omega)\right)$ 上是相对列紧的，因此存在子列 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 使得(3.29)式成立。又由引理 3.10 可直接证得(3.30)式和(3.31)式。对于(3.32)式，由 Yosida 逼近的性质结合(3.29)式可证得。

4. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 现在的目的是证明 $(n, c, \mathbf{u})$ 是问题(1.6)的形如命题 2.1 所定义的整体弱解。显然 n, c 有和 $n_\varepsilon, c_\varepsilon$ 一样的非负性。又由(3.31)可知 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 于 $\Omega\times(0,\infty)$ 几乎处处成立。为了得到(2.1)~(2.4)的结论，我们有以下准备：

由(3.23)式、(3.28)式，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时有

$$\frac{n_\varepsilon\nabla c_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}=\frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\cdot\nabla c_\varepsilon\rightharpoonup n\nabla c \text{ 于 } L^1_{loc}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right). \tag{4.1}$$

实际上，对于 $T>0$，有

$$\begin{aligned}\left\|F_\varepsilon(n_\varepsilon)-n\right\|_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega\times(0,T))}&\le\left\|F_\varepsilon(n_\varepsilon)-F_\varepsilon(n)\right\|_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega\times(0,T))}+\left\|F_\varepsilon(n)-n\right\|_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega\times(0,T))}\\&\le\left\|F'_\varepsilon\right\|_{L^\infty((0,\infty))}\left\|n_\varepsilon-n\right\|_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega\times(0,T))}+\left\|F_\varepsilon(n)-n\right\|_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega\times(0,T))}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

由(3.23)可知，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，$\left\|n_\varepsilon-n\right\|_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega\times(0,T))}\to 0$，因此，对于 $t>0$ 有 $\left\|F_\varepsilon(n(\cdot,t))-n(\cdot,t)\right\|^{\frac{5}{3}}_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega)}\le 2^{\frac{5}{3}}\left\|n(\cdot,t)\right\|^{\frac{5}{3}}_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega)}$ 几乎处处成立。由控制收敛定理知，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，也可得到

$$\int_0^T\left\|F_\varepsilon(n(\cdot,t))-n(\cdot,t)\right\|^{\frac{5}{3}}_{L^{\frac{5}{3}}(\Omega)}\mathrm{d}t\to 0. \tag{4.3}$$

由(3.23)和(3.30)可知，$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}<1$，因此，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，有

$$n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\to n\boldsymbol{u} \text{ 于 } L^1_{loc}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right). \tag{4.4}$$

由(3.26)和(3.5)可知，利用 Lebesgue 收敛定理，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，有 $c_\varepsilon\to c$ 于 $L^{\frac{5}{2}}_{loc}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)$。结合(4.3)式可得，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，有

$$F(n_\varepsilon)c_\varepsilon\to nc \text{ 于 } L^1_{loc}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right). \tag{4.5}$$

接下来，由(3.26)和(3.5)式进一步可知，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，有 $c_\varepsilon\to c$ 于 $L^{\frac{10}{7}}_{loc}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)$。结合(3.30)式可得，当 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$ 时，有

$$c_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\to c\boldsymbol{u}_\varepsilon \text{ 于 } L^1_{loc}\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right). \tag{4.6}$$

现在，由(4.4)，(4.1)，(4.5)，(4.6)，(3.32)，(3.25)式可以得到命题 2.1 中(i)的可积性，结合(3.23)，(3.31)，(2.5)和(2.6)式可以保证对方程组(2.8)取极限成立。

事实上，对于 $\varepsilon\in(0,1)$，我们对方程组(2.8)中的第一个方程乘以任意的 $\xi\in C_0^\infty\left(\Omega\times[0,\infty)\right)$，然后分部积分，得到恒等式

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty\int_\Omega n_\varepsilon\xi_t-\int_\Omega n_{0\varepsilon}\xi(\cdot,0)=&-\int_0^\infty\int_\Omega\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\xi+\int_0^\infty\int_\Omega n_\varepsilon F'_\varepsilon(n_\varepsilon)\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla\xi\\&+\int_0^\infty\int_\Omega n_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\phi+r\int_0^\infty\int_\Omega n_\varepsilon\xi-\mu\int_0^\infty\int_\Omega n_\varepsilon^\alpha\xi.\end{aligned}$$

对于方程取 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$，应用(3.23)，(2.6)，(3.24)，(4.1)，(4.4)式和(3.25)式在上述方程的积分式中，可得到(2.2)式。

同理，对于 $\varepsilon\in(0,1)$，我们对方程组(2.8)中的第二个方程乘以任意的 $\xi\in C_0^\infty\left(\Omega\times[0,\infty)\right)$，然后分部积分，得到恒等式

$$-\int_0^\infty\int_\Omega c_\varepsilon\xi_t-\int_\Omega c_0\xi(\cdot,0)=-\int_0^\infty\int_\Omega\nabla c_\varepsilon\cdot\nabla\xi-\int_0^\infty\int_\Omega F(n_\varepsilon)c_\varepsilon\xi+\int_0^\infty\int_\Omega c_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\xi.$$

对于方程取 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$，应用(3.26)，(3.28)，(4.5)式和(4.6)式在上述方程的积分式中，可得到(2.3)式。

最后，对于 $\varepsilon\in(0,1)$，我们对方程组(2.8)中的第三个方程乘以任意的 $\psi\in C_{0,\sigma}^{\infty}\left(\Omega\times[0,\infty)\right)$，然后分部积分，得到恒等式

$$-\int_0^\infty\int_\Omega \boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\psi_t-\int_\Omega \boldsymbol{u}_0\cdot\psi(\cdot,0)=-\int_0^\infty\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\psi+\int_0^\infty\int_\Omega Y_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon\otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\psi+\int_0^\infty\int_\Omega n_\varepsilon\nabla\Phi\cdot\psi.$$

对于方程利用 Holder 不等式和 $\nabla\Phi$ 的有界性，取 $\varepsilon=\varepsilon_j\searrow 0$，应用(3.29)，(3.31)，(3.32)和(3.23)式在上述方程的积分式中，可得到(2.4)式。于是，定理 1.1 得证。

5. 结论

本文主要是集中在对模型初边值问题整体可解性的分析上，至于整体解在时间趋于无穷大时的渐近行为和在某一时刻的光滑性没有做出分析，未来可以对解的这些性质进行研究讨论。对于带有 logistic 源的趋化－流体耦合模型的初边值问题，本文以及现有的文献在分析其解的整体存在性时总是考虑模型中的一种生物动力学机制的主要作用，未来可以通过对模型中两种或多种生物动力学机制的作用不分主次的同时进行考虑而得到结果。除了 logistic 源，细胞的非线性扩散也是阻碍其聚集的一种重要机制，在充分利用 logistic 源的基础上，可以更加细致的研究体积填充与 logistic 源之间的相互作用对模型初边值问题解的整体有界性的影响。

参考文献

[1] Keller, E. and Segel, L. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-417. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[2] 王玉兰. 趋化-流体耦合模型研究进展[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2016, 35(4): 30-38.

[3] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y.S., *et al.* (2005) Toward a Mathematical Theory of Keller-Segel Models of Pattern Formation in Biological Tissues. *Mathematical Models in Application Sciences*, **25**, 1663-1763. https://doi.org/10.1142/S021820251550044X

[4] Biler, P. (1998) Local and Global Solvability of Some Parabolic Systems Modelling Chemotaxis. *Advances in Mathematical Sciences and Application*, **8**, 715-743.

[5] Herrero, M.A. and Velazquez, J.J.L. (1997) A Blow-Up Mechanism for Chemotaxis Model. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa Classe Di Scienze*, **24**, 633-683.

[6] Horstmann, D. and Wang, G. (2015) Blow-Up in a Chemotaxis Model without Symmetry Assumptions. *European Journal of Applied Mathematics*, **12**, 159-177. https://doi.org/10.1017/S0956792501004363

[7] Lankeit, J. (2005) Eventual Smoothness and Asymptotics in a Three-Dimensional Chemotaxis System with Logistic Source. *Journal of Differential Equations*, **258**, 1158-1191. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.10.016

[8] Osaki, K. and Yagi, A. (2001) Finite Dimensional Attractor for One-Dimensional Keller-Segel Equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, **44**, 441-469.

[9] Nagai, T., Senba, T. and Yoshida, K. (1997) Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis. *Funkcialaj Ekvacioj*, **40**, 411-433.

[10] Winkler, M. (2013) Finite-Time Blow-Up in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Keller-Segel System. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **100**, 748-767. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.01.020

[11] Vorotnikov, D. (2014) Weak Solutions for a Bioconvection Model Related to *Bacillus subtillis*. *Communications in Mathematical Sciences*, **12**, 545-563. https://doi.org/10.4310/CMS.2014.v12.n3.a8

[12] Lankeit, J. (2016) Long-Term Behavior in a Chemotaxis-Fluid System with Logistic Source. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 2071-2109. https://doi.org/10.1142/S021820251640008X

[13] Wang, Y.L. (2020) Global Solvability and Eventual Smoothness in a Chemotaxis-Fluid System with Weak Logistic-Type Degradation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **6**, 1217-1252. https://doi.org/10.1142/S0218202520400102

[14] Giga, Y. (1986) Solution for Semilinear Parabolic Equations in L_p and Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes System. *Journal of Differential Equations*, **61**, 186-212. https://doi.org/10.1016/0022-0396(86)90096-3

[15] Henry, D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 840.

https://doi.org/10.1007/BFb0089647

[16] Zhang, Q. and Li, Y. (2015) Global Weak Solutions for the Three-Dimensional Chemotaxis Navier-Stokes System with Nonlinear Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **259**, 3730-3754. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.05.012