Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3154-3164
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311327

二维预约当代数的*Rota-Baxter*算子

王智斌

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年10月1日；录用日期：2023年11月1日；发布日期：2023年11月9日

摘 要

本文主要计算二维预约当代数的*Rota-Baxter*算子，得到二维预约当代数上*Rota-Baxter*算子的完全分类。确定二维预约当代数对应的特殊的四维预约当代数的代数运算，构造这些特殊的四维预约当代数上*JP*-方程的解。最后利用二维预约当代数的*Rota-Baxter*算子构造二维的*J-dendriform*代数。

关键词

预约当代数，*JP*-方程，*Rota-Baxter*算子

Rota-Baxter Operators on Two-Dimensional Pre-Jordan Algebras

Zhibin Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 1st, 2023; accepted: Nov. 1st, 2023; published: Nov. 9th, 2023

Abstract

This paper mainly calculates the *Rota-Baxter* operators on two-dimensional pre-Jordan algebras and obtains the complete classification of the *Rota-Baxter* operators on two-dimensional pre-Jordan algebras. The algebraic operations of special four-dimensional pre-Jordan algebras corresponding to two-dimensional pre-Jordan algebras are determined, and the solutions of *JP*-equations on these special four-dimensional pre-Jordan algebras are constructed. Finally, two-dimensional *J-dendriform* algebras are constructed using the *Rota-Baxter* operator of two-dimensional pre-Jordan algebras.

文章引用: 王智斌. 二维预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3154-3164.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311327

Keywords

Pre-Jordan Algebra, *JP*-Equation, *Rota-Baxter* Operator

1. 引言

二十世纪三十年代 P. Jordan 最早给出了约当代数的概念。约当代数是在量子力学中引入的一类非结合代数，在很多领域都有广泛的应用。最近几十年，约当代数得到了广泛的研究，并应用于微分几何、量子群、李理论等数学领域[1] [2] [3]。现阶段，约当代数作为独立的代数结构，发展迅速。在约当代数的基础上出现了一些其它的代数，比如预约当代数[4]、*J-dendriform* 代数[5]等。其中侯冬平做了预约当双代数和 *Loday* 代数的约当代数类似[6]。Y. Sun 等人给出了低维预约当代数的完全分类[4]。本文在此基础上，研究了二维预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子，并构造了一些特殊的 *J-dendriform* 代数，为预约当代数的研究提供一些基础。

2. 预备知识

定义 1.1 ([6])在线性空间 J 上定义一个双线性的乘法“$\cdot$”，如果满足

$$\begin{aligned}&(x\bullet y)\cdot(z\cdot u)+(y\bullet z)\cdot(x\cdot u)+(z\bullet x)\cdot(y\cdot u)\\&=z\cdot\left[(x\bullet y)\cdot u\right]+x\cdot\left[(y\bullet z)\cdot u\right]+y\cdot\left[(z\bullet x)\cdot u\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x\cdot\left[y\cdot(z\cdot u)\right]+z\cdot\left[y\cdot(x\cdot u)\right]+\left[(x\bullet z)\bullet y\right]\cdot u\\&=z\cdot\left[(x\bullet y)\cdot u\right]+x\cdot\left[(y\bullet z)\cdot u\right]+y\left[(z\bullet x)\cdot u\right],\end{aligned}$$

其中 $\forall x,y,z,u\in A$，$x\bullet y=x\cdot y+y\cdot x$，则称 $(J,\cdot)$ 为预约当代数。

定义 1.2 ([6])设 $(J,\cdot)$ 是一个预约当代数，V 是一个线性空间，如果 $l,r:J\to gl(V)$ 两个线性映射满足

$$\left[l(x\bullet y),l(z)\right]+\left[l(y\bullet z),l(x)\right]+\left[l(z\bullet x),l(y)\right]=0;$$

$$\begin{aligned}&l(x\bullet y)r(z)+r(x\cdot z)l(y)+r(y\cdot z)r(x)+r(x\cdot z)r(y)+r(y\cdot z)l(x)\\&=l(x)r(z)l(y)+l(y)r(z)r(x)+r\left[(x\bullet y)z\right]+l(y)r(z)l(x)+l(x)r(z)r(y);\end{aligned}$$

$$l(x\bullet y)l(z)+l(y\bullet z)r(x)+l(z\bullet x)r(y)=l(x)l(y)l(z)+l\left[y\bullet(x\bullet z)\right]+l(z)l(y)l(x);$$

$$\begin{aligned}&r(z\cdot y)l(z)+r(x\cdot y)r(z)+l(x\bullet z)r(y)+r(x\bullet y)l(z)+r(x\cdot y)l(z)+r(z\cdot y)r(x)\\&=l(x)r(z\cdot y)+r(y)r(x\bullet z)+r(y)l(x\bullet z)+l(z)r(x\cdot y);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&l(x\cdot y)r(z)+r(x\cdot z)l(y)+r(y\cdot z)r(x)+l(y\cdot x)r(z)+r(x\cdot z)r(y)+r(y\cdot z)l(x)\\&=l(x)l(y)r(z)+r(z)l(y)r(x)+r(z)r(y)r(x)+r(z)l(y)l(x)+r\left[y\cdot(x\cdot z)\right]+r(z)r(y)l(x).\end{aligned}$$

其中 $\forall x,y,z,u\in A$，$x\bullet y=x\cdot y+y\cdot x$，则称 (l,r,V) 为 $(J,\cdot)$ 的一个双模。

设 $(J,\cdot)$ 是一个预约当代数，用 L 和 R 分别表示 J 上的左乘算子和右乘算子，即 $L(x)(y)=R(y)(x)=x\cdot y$，其中 $\forall x,y\in J$。

设 $(J,\cdot)$ 是预约当代数，V 是线性空间，对于任何的线性映射 $\rho: J \to gl(V)$，定义映射 $\rho^*: J \to gl(V^*)$，其中

$$\left\langle \rho^*(x)v^*, u \right\rangle = \left\langle v^*, \rho(x)u \right\rangle \ \left(\forall x \in J, u \in V, v^* \in V^*\right),$$

则称 ρ^* 是 ρ 的一个对偶映射。

定理 1.3 ([6])设 $(J,\cdot)$ 是预约当代数，且 (l,r,V) 是 $(J,\cdot)$ 的双模，则 $\left(l^*+r^*,-r^*,V^*\right)$ 是 $(J,\cdot)$ 的双模。

定理 1.4 ([6])设 $(J,\cdot)$ 是预约当代数，$l,r: A \to End(V)$ 是线性映射，则 (l,r,V) 是预约当代数 $(J,\cdot)$ 的一个双模当且仅当直和空间 $A \oplus V$ 上定义

$$(x+u)*(y+v) = x\cdot y + \left(l^*+r^*\right)(x)v - r^*(y)u \ \left(\forall x,y \in A, u,v \in V\right),$$

时，$(A \oplus V, *)$ 为预约当代数。

定义 1.5 ([5])设 $(J,\cdot)$ 是预约当代数，(l,r,V) 是 $(J,\cdot)$ 的一个双模，如果线性映射 $T: V \to J$ 满足

$$T(u)\cdot T(v) = T\Big(l\big(T(u)\big)v + r\big(T(v)\big)u\Big),$$

其中 $\forall u,v \in J$，则称 T 为预约当代数 $(J,\cdot)$ 的 *O*-算子。

定义 1.6 ([5])设 $(J,\cdot)$ 是预约当代数，如果线性映射 $R: J \to J$ 满足

$$R(x)R(y) = R\big(R(x)y + xR(y)\big), \tag{2.1}$$

其中 $\forall x,y \in J$，则称 R 为预约当代数 $(J,\cdot)$ 的 *Rota-Baxter* 算子。

定理 1.7 ([6])设 V 是线性空间，$(J,\cdot)$ 是预约当代数，$T: V \to J$ 是线性映射，则 $r = T + \sigma(T)$ 是预约当代数 $J \ltimes_{l^*+r^*,-r^*} V^*$ 上 *JP*-方程的对称解当且仅当 T 是 $(J,\cdot)$ 上与双模 (l,r,V) 相关的 *O*-算子。

定义 1.8 ([5])设 A 是一个线性空间，$\succ,\prec: A\otimes A \to A$ 是 A 上的两个双线性的代数运算，如果满足

$$\begin{aligned}&(x\bullet y)\succ(z\succ u)+(y\bullet z)\succ(x\succ u)+(z\bullet x)\succ(y\succ u)\\&=x\succ\big[(y\bullet z)\succ u\big]+y\succ\big[(z\bullet x)\succ u\big]+z\succ\big[(x\bullet y)\succ u\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x\bullet y)\succ(z\succ u)+(y\bullet z)\succ(x\succ u)+(z\bullet x)\succ(y\succ u)\\&=x\succ\big[y\succ(z\succ u)\big]+z\succ\big[y\succ(x\succ u)\big]+z\succ\big[y\bullet(z\bullet x)\succ u\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x\bullet y)\succ(z\prec u)+(x\cdot z)\prec(y\lozenge u)+(y\cdot z)\prec(x\lozenge u)\\&=x\succ\big[(z\prec(y\lozenge u)\big]+y\succ\big[z\prec(x\lozenge u)\big]+z\succ\big[(x\bullet y)\cdot z\big]\prec z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(z\cdot y)\prec(x\lozenge u)+(x\cdot y)\prec(z\lozenge u)+(x\bullet z)\succ(y\prec u)\\&=x\succ\big[(z\cdot y)\prec u\big]+z\succ\big[(x\cdot y)\prec u\big]+y\prec\big[(x\bullet z)\lozenge u\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x\bullet y)\succ(z\prec u)+(x\cdot z)\prec(y\lozenge u)+(y\cdot z)\prec(x\lozenge u)\\&=x\succ\big[y\succ(z\prec u)\big]+z\prec\big[y\lozenge(x\lozenge u)\big]+\big[y\cdot(x\cdot z)\big]\prec z,\end{aligned}$$

其中 $\forall x,y,z,u \in A$，$x\cdot y = x\succ y + y\prec x$，$x\lozenge y = x\succ y + x\prec y$，$x\bullet y = x\cdot y + y\cdot x$，则称 $(A,\succ,\prec)$ 为 *J-dendriform* 代数。

定理 1.9 ([5]) $(J,\cdot)$ 是一个预约当代数，R 是 $(J,\cdot)$ 的 *Rota-Baxter* 算子，在 J 上定义

$$x\succ y = R(x)y,\ x\prec y = yR(x),$$

其中 $\forall x,y \in J$，则 $(J,\succ,\prec)$ 是 *J-dendriform* 代数。

3. 二维预约当代数上的算子

定理 2.1 ([4]) $(J,\cdot)$ 是二维预约当代数，e_1,e_2 是 J 的一组基，则 $(J,\cdot)$ 在同构意义下有以下几种(表 1)。

Table 1. Classification of two-dimensional pre-Jordan algebra
表 1. 二维预约当代数的分类

类型	代数运算
$J_{1,1}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=0,e_2e_1=0,e_2e_2=e_2.$
$J_{1,2}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=e_2,e_2e_1=-e_2,e_2e_2=e_2.$
$J_{2,1}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=e_2,e_2e_1=e_2,e_2e_2=0.$
$J_{2,2}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=e_2,e_2e_1=e_2,e_2e_2=0.$
$J_{3,1}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=2e_2,e_2e_1=0,e_2e_2=0.$
$J_{3,2}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=e_2,e_2e_1=-e_2,e_2e_2=0.$
$J_{4,1}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=0,e_2e_1=e_2,e_2e_2=0.$
$J_{4,2}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=2e_2,e_2e_1=-e_2,e_2e_2=0.$
$J_{4,3}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=2e_2,e_2e_1=-e_2,e_2e_2=0.$
$J_{5,1}$	$e_1e_1=e_1,e_1e_2=2e_2,e_2e_1=-e_2,e_2e_2=0.$
$J_{6,1}$	$e_1e_1=0,e_1e_2=0,e_2e_1=0,e_2e_2=0.$

定理 2.2 令

$$R_1=\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix},R_2=\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix},R_3=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}(a\neq 0),$$

$$R_4=\begin{pmatrix}b&a\\-\frac{b^2}{a}&-b\end{pmatrix}(a,b\neq 0),R_5=\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix},R_6=\begin{pmatrix}2b&0\\a&b\end{pmatrix}(b\neq 0).$$

设 $(J,\cdot)$ 是二维预约当代数，e_1,e_2 是 J 的一组基，则 J 上的 *Rota-Baxter* 算子为：

1) 对于 $J_{1,1}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 *O*；
2) 对于 $J_{1,2}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 *O*；
3) 对于 $J_{2,1}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1；
4) 对于 $J_{2,2}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1；
5) 对于 $J_{3,1}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_2；
6) 对于 $J_{3,2}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1；
7) 对于 $J_{4,1}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1、R_3、R_4；
8) 对于 $J_{4,2}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1、R_3、R_4；
9) 对于 $J_{4,3}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1、R_3、R_4；
10) 对于 $J_{5,1}$ 型的预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子在 e_1,e_2 下的矩阵 R_5、R_6；

11) 对于 $J_{6,1}$ 型的预约当代数，其上的任意线性变换都是它的 *Rota-Baxter* 算子。

证明：1) 设 $(J,\cdot)$ 是二维预约当代数，R 是 $(J,\cdot)$ 上的 *Rota-Baxter* 算子，设 R 在 e_1,e_2 下的矩阵为 $(a_{ij})_{2\times 2}$，由于 R 满足(1.1)，则

$$R(e_i)R(e_j)=R\Big(R(e_i)e_j+e_iR(e_j)\Big),\ i,j=1,2. \tag{3.1}$$

对于 $J_{1,1}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2=2a_{11}^2, \\ a_{21}^2=2a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{12}=a_{21}a_{12}+a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22}=a_{21}a_{22}+a_{12}a_{21}, \\ a_{12}a_{11}=a_{12}a_{11}+a_{21}a_{12}, \\ a_{22}a_{21}=a_{12}a_{21}+a_{21}a_{22}, \\ a_{12}^2=2a_{22}a_{12}, \\ a_{22}^2=2a_{22}^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

解方程可得 $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$ 。因此， $J_{1,1}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 0。

2) 对于 $J_{1,2}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2=2a_{11}^2, \\ a_{21}^2=2a_{11}a_{21}, \\ a_{11}a_{12}=2a_{11}a_{12}+a_{21}a_{12}+a_{22}a_{12}, \\ a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{21}a_{22}=a_{11}a_{22}+a_{21}a_{22}+a_{12}a_{21}+a_{22}^2, \\ a_{12}a_{11}=a_{12}a_{11}+a_{21}a_{12}, \\ a_{22}a_{21}=a_{12}a_{21}+a_{21}a_{22}, \\ a_{12}^2=2a_{22}a_{12}, \\ a_{22}^2=2a_{22}^2. \end{cases}$$

解方程可得 $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$ 。因此， $J_{1,2}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 0。

3) 对于 $J_{2,1}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2=2a_{11}^2, \\ a_{21}^2=2a_{11}a_{21}, \\ a_{11}a_{12}=2a_{11}a_{12}+a_{21}a_{12}+a_{22}a_{12}, \\ a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{21}a_{22}=a_{11}a_{22}+a_{21}a_{22}+a_{12}a_{21}+a_{22}^2, \\ a_{12}a_{11}=a_{12}a_{11}+a_{21}a_{12}, \\ a_{22}a_{21}=a_{12}a_{21}+a_{21}a_{22}, \\ a_{12}^2=2a_{22}a_{12}, \\ a_{22}^2=2a_{22}^2. \end{cases}$$

解方程可得 $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0,a_{21}=a_{21}$ 。因此， $J_{2,1}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1。

4) 对于 $J_{2,2}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2 = 2a_{11}^2, \\ 2a_{11}a_{21} = 2a_{11}a_{21} + 2a_{21}a_{22}, \\ a_{11}a_{12} = 3a_{11}a_{12} + 2a_{22}a_{12}, \\ 2a_{11}a_{22} = 2a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + 2a_{22}^2, \\ a_{12}a_{11} = a_{12}a_{11}, \\ 2a_{12}a_{21} = a_{12}a_{21}, \\ a_{12}^2 = 2a_{12}^2, \\ 2a_{12}a_{22} = 2a_{12}a_{22}. \end{cases}$$

解方程可得 $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0, a_{21} = a_{21}$。因此，$J_{2,2}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1。

5) 对于 $J_{3,1}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2 = 2a_{11}^2, \\ 2a_{11}a_{21} = 0, \\ a_{11}a_{12} = a_{12}a_{11}, \\ a_{12}a_{21} = 0, \\ a_{12}a_{11} = a_{12}a_{11}, \\ a_{12}a_{21} = 0, \\ a_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

解方程可得 $a_{11} = a_{12} = 0, a_{21} = a_{21}, a_{22} = a_{22}$。因此，$J_{3,1}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_2。

6) 对于 $J_{3,2}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2 = 2a_{11}^2, \\ 2a_{11}a_{21} = 0, \\ a_{11}a_{12} = 2a_{11}a_{12} + a_{22}a_{12}, \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{22}^2, \\ a_{12}a_{11} = -a_{22}a_{12}, \\ a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = a_{12}a_{21} - a_{22}^2 - a_{11}a_{22}, \\ a_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

解方程可得 $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0, a_{21} = a_{21}$。因此，$J_{3,2}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1。

7) 对于 $J_{4,1}$ 型预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}a_{12} = 0, \\ a_{21}\left(a_{11} + a_{22}\right) = 0, \\ a_{12}\left(a_{11} + a_{22}\right) = 0, \\ a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 0. \end{cases}$$

分情况讨论：

① 若 $a_{12}=0$，则 $a_{11}=0,a_{22}=0,a_{12}=a_{12}$，此时 $J_{4,1}$ 的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1。

② 若 $a_{12}\neq 0$，则 $a_{11}=-a_{22}$，

i) 若 $a_{11}=-a_{22}=0$，则 $a_{21}=0$，此时 $J_{4,1}$ 的 *Rota-Baxter* 算子为 R_3，

ii) 若 $a_{11}=-a_{22}\neq 0$，则 $a_{11}^2+a_{21}a_{12}=0,a_{22}^2+a_{12}a_{21}=0$，此时 $J_{4,1}$ 的 *Rota-Baxter* 算子为 R_4。因此，$J_{4,1}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1、R_3、R_4。

8) 对于 $J_{4,2}$ 型预约当代数，证明方法与(7)相同，得到了 $J_{4,2}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1、R_3、R_4。

9) 对于 $J_{4,3}$ 型预约当代数，证明方法与(7)相同，得到了 $J_{4,3}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1、R_3、R_4。

10) 对于 $J_{5,1}$ 型的预约当代数，由(2.1)可得

$$\begin{cases} a_{12}=0, \\ a_{11}\left(a_{11}-2a_{22}\right)=0, \\ a_{21}=a_{21}. \end{cases}$$

分情况讨论：

① 若 $a_{11}=0$，则 $a_{11}=a_{12}=0,a_{21}=a_{21},a_{22}=a_{22}$，此时 $J_{5,1}$ 的 *Rota-Baxter* 算子为 R_5。

② 若 $a_{11}\neq 0$，则 $a_{12}=0,a_{11}=2a_{22},a_{21}=a_{21}$，此时 $J_{5,1}$ 的 *Rota-Baxter* 算子为 R_6。

因此，$J_{5,1}$ 型预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子为 R_5、R_6。

11) 对于 $J_{6,1}$ 型的预约当代数，$J_{6,1}$ 上的任意线性变换都是它的 *Rota-Baxter* 算子。

4. 特殊四维预约当代数上的 *JP*-方程的解

定理 3.1 设 $(J,\cdot)$ 是二维预约当代数，则由定理 1.7 对应的四维预约当代数 $J\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J^*$ 的特征矩阵为：

1) $J_{1,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{1,1}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 2e_1^* & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 2e_2^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $J_{1,2}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{1,2}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 2e_1^* & 0 \\ -e_2 & e_2 & 0 & 2e_2^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ e_2^* & -e_1^*-e_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $J_{2,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{2,1}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 2e_1^* & 2e_2^* \\ e_2 & 0 & 0 & 2e_1^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ -e_2^* & -e_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $J_{2,2} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{2,2}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & 2e_2 & 2e_1^* & 2e_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 2e_1^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2e_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) $J_{3,1} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{3,1}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 2e_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) $J_{3,2} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{3,2}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 2e_1^* & 0 \\ -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ e_2^* & -e_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) $J_{4,1} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{4,1}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 2e_1^* & e_2^* \\ e_2 & 0 & 0 & e_1^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ -e_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8) $J_{4,2} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{4,2}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 2e_1^* & e_2^* \\ 0 & 0 & 0 & e_1^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9) $J_{4,3} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{4,3}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_1 & 2e_2 & 2e_1^* & e_2^* \\ -e_2 & 0 & 0 & e_1^* \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \\ e_2^* & -2e_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10) $J_{5,1} \ltimes_{L^*+R^*,-R^*} J_{5,1}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} e_2 & 0 & 0 & 2e_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11) $J_{6,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{6,1}^*$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

证明：对于二维预约当代数 $J_{1,1}$，设 e_1,e_2 是 $J_{1,1}$ 的一组基，e_1^*,e_2^* 是 e_1,e_2 的对偶基。根据定理 1.7，在 $J_{1,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{1,1}^*$ 上

$$e_1*e_1=e_1,e_1*e_2=0,e_2*e_1=e_2e_1=0,e_2*e_2=e_2,e_i^**e_j^*=0,(i,j=1,2).$$

由于

$$\begin{aligned}\left\{\left(\left(L^*+R^*\right)e_1\right)e_1^*\right\}e_1&=\left\langle L^*\left(e_1\right)e_1^*,e_1\right\rangle+\left\langle R^*\left(e_1\right)e_1^*,e_1\right\rangle=\left\langle e_1^*,L\left(e_1\right)e_1\right\rangle+\left\langle e_1^*,R\left(e_1\right)e_1\right\rangle\\&=\left\langle e_1^*,e_1e_1\right\rangle+\left\langle e_1^*,e_1e_1\right\rangle=\left\langle e_1^*,e_1\right\rangle+\left\langle e_1^*,e_1\right\rangle=2,\\\left\{\left(\left(L^*+R^*\right)e_1\right)e_1^*\right\}e_2&=\left\langle L^*\left(e_1\right)e_1^*,e_2\right\rangle+\left\langle R^*\left(e_1\right)e_1^*,e_2\right\rangle=\left\langle e_1^*,L\left(e_1\right)e_2\right\rangle+\left\langle e_1^*,R\left(e_1\right)e_2\right\rangle\\&=\left\langle e_1^*,e_1e_2\right\rangle+\left\langle e_1^*,e_2e_1\right\rangle=0,\end{aligned}$$

则 $e_1*e_1^*=e_1*e_1^*=\left(\left(L^*+R^*\right)e_1\right)e_1^*=2e_1^*$。同理可得 $e_1*e_2^*=0,e_2*e_1^*=0,e_2*e_2^*=2e_2^*$。

由于

$$\left(-R^*\left(e_1\right)e_1^*\right)\left(e_1\right)=\left\langle -R^*\left(e_1\right)e_1^*,e_1\right\rangle=-\left\langle e_1^*,R\left(e_1\right)e_1\right\rangle=-\left\langle e_1^*,e_1e_1\right\rangle=-\left\langle e_1^*,e_1\right\rangle=-1,$$

$$\left(-R^*\left(e_1\right)e_1^*\right)\left(e_2\right)=\left\langle -R^*\left(e_1\right)e_1^*,e_2\right\rangle=-\left\langle e_1^*,R\left(e_1\right)e_2\right\rangle=-\left\langle e_1^*,e_2e_1\right\rangle=0,$$

则 $e_1^**e_1=-R^*\left(e_1\right)e_1^*=-e_1^*$。同理可得 $e_1^**e_2=0,e_2^**e_1=0,e_2^**e_2=-e_2^*$。

其余情况与(1)的证明方法类似。

定理 3.2 设 $(J,\cdot)$ 是二维预约当代数，则由定理 1.7 构造的预约当代数 $J\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J^*$ 上 *JP*-方程的解为：

1) 令 $r_1=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2$，则 r_1 是 $J_{2,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{2,1}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

2) 令 $r_2=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2$，则 r_2 是 $J_{2,2}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{2,2}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

3) 令 $r_3=ae_2\otimes e_1^*+be_2\otimes e_2^*+ae_1^*\otimes e_2+be_2^*\otimes e_2$，则 r_3 是 $J_{3,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{3,1}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

4) 令 $r_4=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2$，则 r_4 是 $J_{3,2}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{3,2}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

5) 令

$$r_5=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2,r_6=ae_1\otimes e_2^*+ae_2^*\otimes e_1,$$

$$r_7=be_1\otimes e_1^*-\frac{b^2}{a}e_2\otimes e_1^*+ae_1\otimes e_2^*-be_2\otimes e_2^*+be_1^*\otimes e_1-\frac{b^2}{a}e_1^*\otimes e_2+ae_2^*\otimes e_1-be_2^*\otimes e_2,$$

则 r_5,r_6,r_7 是 $J_{4,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{4,1}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

6) 令

$$r_8=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2,r_9=ae_1\otimes e_2^*+ae_2^*\otimes e_1,$$

$$r_{10}=be_1\otimes e_1^*-\frac{b^2}{a}e_2\otimes e_1^*+ae_1\otimes e_2^*-be_2\otimes e_2^*+be_1^*\otimes e_1-\frac{b^2}{a}e_1^*\otimes e_2+ae_2^*\otimes e_1-be_2^*\otimes e_2,$$

则 r_8,r_9,r_{10} 是 $J_{4,2}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{4,2}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

7) 令

$$r_{11}=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2,r_{12}=ae_1\otimes e_2^*+ae_2^*\otimes e_1,$$

$$r_{13}=be_1\otimes e_1^*-\frac{b^2}{a}e_2\otimes e_1^*+ae_1\otimes e_2^*-be_2\otimes e_2^*+be_1^*\otimes e_1-\frac{b^2}{a}e_1^*\otimes e_2+ae_2^*\otimes e_1-be_2^*\otimes e_2,$$

则 r_{11},r_{12},r_{13} 是 $J_{4,3}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{4,3}^*$ 上的 *JP*-方程的解；

8) 令 $r_{14}=2be_1\otimes e_1^*+ae_2\otimes e_1^*+be_2\otimes e_2^*+2be_1^*\otimes e_1+ae_1^*\otimes e_2+be_2^*\otimes e_2$，则 r_{14} 是 $J_{5,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{5,1}^*$ 上的 *JP*-方程的解。

证明：对于 $J_{2,1}$ 型预约当代数，由定理 2.2 知 R_1 是 $J_{2,1}$ 的 *Rota-Baxter* 算子，因此

$$R(e_1)=ae_2,Re_2=0.$$

由定理 1.7 可知，$r_3=T+\sigma(T)=ae_2\otimes e_1^*+ae_1^*\otimes e_2$ 是 $J_{2,1}\ltimes_{L^*+R^*,-R^*}J_{2,1}^*$ 上的 *JP*-方程的解。

其余情况与(1)的证明方法类似。

5. *J-Dendriform* 代数的构造

定理 4.1 设 $(J,\cdot)$ 是二维预约当代数，e_1,e_2 是 J 的一组基，则由定理 1.9 构造的 *J-dendriform* 代数为：

1) $J_{2,1}$ 上由 R_1 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=ae_2$，$e_1\prec e_1=ae_2$，其余全部为 0；

2) $J_{2,2}$ 上由 R_1 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\prec e_1=2ae_2$，其余全部为 0；

3) $J_{3,1}$ 上由 R_2 由构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_i\succ e_j=0$，$e_i\prec e_j=0(i,j=1,2)$；

4) $J_{3,2}$ 上由 R_1 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=-ae_2$，$e_1\prec e_1=ae_2$，其余全部为 0；

5) $J_{4,1}$ 上由 R_1 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\prec e_1=ae_2$，其余全部为 0；由 R_3 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_2\succ e_1=ae_1$，$e_2\prec e_1=ae_1$，$e_2\prec e_2=ae_2$，其余全部为 0；由 R_4 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=be_1-\frac{b^2}{a}e_2$，$e_2\succ e_1=ae_1-be^2$，$e_1\prec e_1=be_1$，$e_1\prec e_2=be_2$，$e_2\prec e_1=ae_1$，$e_2\prec e_2=ae_2$，其余全部为 0；

6) $J_{4,2}$ 上由 R_1 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\prec e_1=ae_2$，其余全部为 0；由 R_3 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_2\succ e_1=ae_1$，$e_2\succ e_2=ae_2$，$e_2\prec e_1=ae_1$，其余全部为 0；由 R_4 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=be_1$，$e_2\succ e_1=ae_1$，$e_2\succ e_2=ae_2$，$e_1\prec e_1=be_1-\frac{b^2}{a}e_2$，$e_1\prec e_2=be_2$，$e_2\prec e_1=ae_1-be_2$，其余全部为 0；

7) $J_{4,3}$ 上由 R_1 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=-ae_2$，$e_1\prec e_1=2ae_2$，其余全部为 0；由 R_3 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_2\succ e_1=ae_1$，$e_2\succ e_2=2ae_2$，$e_2\prec e_1=ae_1$，$e_2\prec e_2=-ae_2$，其余全部为 0；由 R_4 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=be_1+\frac{b^2}{a}e_2$，$e_1\succ e_2=2be_2$，$e_2\succ e_1=ae_1+be_2$，$e_2\succ e_2=2ae_2$，$e_1\prec e_1=be_1-\frac{2b^2}{a}e_2$，$e_1\prec e_2=-be_2$，$e_2\prec e_1=ae_1-2be_2$，$e_2\prec e_2=-ae_2$；

8) $J_{5,1}$ 上由 R_5 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_i\succ e_j=0$，$e_i\prec e_j=0(i,j=1,2)$，由 R_6 构造的 *J-dendriform* 代数为 $e_1\succ e_1=2be_2$，$e_1\prec e_1=2be_2$，其余全部为 0。

证明：根据定理 1.9，对于 $J_{2,1}$ 型二维预约当代数，它的 *Rota-Baxter* 算子为 R_1，则 $R_1(e_1)=ae_2$，$R_1(e_2)=0$。故

$$e_1 \succ e_1 = ae_2, e_1 \succ e_2 = 0, e_2 \succ e_1 = 0, e_2 \succ e_2 = 0,$$
$$e_1 \prec e_1 = ae_2, e_1 \prec e_2 = 0, e_2 \prec e_1 = 0, e_2 \prec e_2 = 0.$$

其余情况与(1)的证明方法类似。

6. 结论

本文主要研究了二维预约当代数的 *Rota-Baxter* 算子的全部分类，并得到了特殊的四维预约当代数上 *JP*-方程的解，并构造了一些特殊的 *J-dendriform* 代数。此外，还可以继续研究三维预约当代数上的 *Rota-Baxter* 算子，或者考虑其它形式的低维预约当代数上的 *JP*-方程的解，这些问题都可以继续深入研究。

参考文献

[1] Kaup, W. and Zaitsev, D. (2000) On Symmetric Cauchy-Riemann Mainfolds. *Advances in Mathematics*, **149**, 145-181. https://doi.org/10.1006/aima.1999.1863

[2] Chu, C.-H. (2006) Grassmann Manifolds of Jordan Algebras. *Archiv der Mathematik*, **87**, 179-192. https://doi.org/10.1007/s00013-005-1670-x

[3] Bertram, W. (2000) The Geometry of Jordan and Lie Structures. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1754, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/b76884

[4] Sun, Y., Huang, Z. and Zhao, S. (2021) Classification of Pre-Jordan Algebras and Rota-Baxter Operators on Jordan Algebras in Low Dimensions. arXiv:2111.02035v

[5] Hou, D.P. and Bai, C.M. (2012) J-Dendriform Algebras. *Frontiers of Mathematics in China*, **7**, 29-49. https://doi.org/10.1007/s11464-011-0160-7

[6] 侯冬平. 预约当双代数和 Loday 代数的约当代数类似[D]: [博士学位论文]. 天津: 南开大学, 2010.