

关于至多有3个叶子的支撑树的存在性研究

马珍珍

福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2023年11月14日; 录用日期: 2023年12月15日; 发布日期: 2023年12月28日

摘要

在2009年, Kyaw在[Discrete Mathematics, 309, 6146~6148]中证明了对于阶数为 n 的连通图 G 且图 G 中不包含同构于 $K_{1,4}$ 的导出子图, 若图 G 中任意4个独立顶点的度和至少为 $n-1$, 则图 G 中存在至多3个叶子的支撑树。在这篇文章中我们考虑了邻域并条件, 得到了一个类似的结果, 即对于阶数为 n 的连通图 G 且图 G 中不包含同构于 $K_{1,4}$ 的导出子图, 若图 G 中任意4个独立顶点的邻域并的基数至少为 $n-3$, 则图 G 中存在至多3个叶子的支撑树, 并且得到的下界是最好可能的。

关键词

支撑树, 度和, 邻域并条件

Research on the Existence of Spanning Trees with at Most Three Leaves

Zhenzhen Ma

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Nov. 14th, 2023; accepted: Dec. 15th, 2023; published: Dec. 28th, 2023

Abstract

In 2009, Kyaw in [Discrete Mathematics, 309, 6146~6148] proved that every connected graph G of order n that contains no induced subgraph isomorphic to $K_{1,4}$ has a spanning tree with at most 3 leaves if the degree sum of any 4 independent vertices in G is at least $n-1$. In this paper, we consider the neighborhood union condition and obtain a similar result. We show that every connected graph G of order n that contains no induced subgraph isomorphic to $K_{1,4}$ has a spanning tree with at most 3 leaves if the cardinality of the neighborhood union of any 4 independent vertices in G is at least $n-3$. Moreover, the lower bound is best possible.

Keywords

Spanning Tree, Degree Sum, Neighborhood Union Condition

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

若一个图 G 有一棵支撑树 T (树 T 是无圈连通图且树 T 与图 G 的顶点集相同) 使得支撑树 T 的最大顶点度至多为 k , 则称此树 T 是图 G 的一棵支撑 k -树。图的支撑树特征问题一直是结构图论中一个重要的研究课题。该问题的产生和发展与结构图论中著名的哈密尔顿问题的研究密切相关, 因此受到国内外许多图论专家的关注。若非平凡的图中存在一条哈密尔顿路(经过图中每个顶点恰好一次的路), 则该图中存在恰好两个叶子的支撑树且最大度至多为 2。这很自然地引出了如下问题: 给出保证图中存在至多 k 个叶子的支撑树或者支撑 k -树的条件。目前在图中是否存在具有和哈密尔顿性相关的特征的支撑树问题的研究主要从参数的角度进行刻画, 运用独立数、连通度、邻域并、度和等条件, 集中讨论图中是否存在以下五类特征的支撑树的充分条件: 1) 图中存在支撑 k -树; 2) 图中存在至多 k 个叶子的支撑树; 3) 图中存在至多 k 个分支点的支撑树; 4) 给定连通度条件下, $K_{1,r}$ -free 图中存在至多 k 个叶子的支撑树; 5) 图中存在以任意 k 个顶点作为叶子集(树中度为 1 的顶点的集合)的支撑树。

支撑树在网络中也有具体的应用。比如, 当网络中存在物理环路时, 会导致广播风暴, 会产生巨大的网络流量, 极易容易造成交换机死机。现在是一个信息化飞速发展的时代, 企业网络在设计时往往对网络稳定性的要求比较高, 要求其网络架构多点互联, 多机热备。支撑树技术能够在二层交换网中保证企业网络多点互联, 同时也能够避免出现交换网络中的环路。此外, 支撑树的计数或者限定条件的支撑树的计数也是图论研究中的一个热门问题。

2. 预备知识

在这篇文章中, 我们只考虑有限无向简单图, 对于一些没有给出的术语和符号可以参考文献[1]。设 G 为一个有限无向简单图, 用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。定义 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 分别为图 G 的阶数和边数。对于 $v \in V(G)$, $N_G(v)$ 表示顶点 v 在图 G 中的邻点的集合。 $d_G(v)$ 表示顶点 v 在图 G 中关联的边的数目, 定义为顶点 v 在图 G 中的度。一般地, $N_G(v)$ 和 $d_G(v)$ 分别简记为 $N(v)$ 和 $d(v)$ 。对于顶点集 $X \subseteq V(G)$, $|X|$ 表示为顶点集 X 的基数。符号 $G[X]$ 表示以 X 为顶点集, 以图 G 中两端点均在 X 中的边的全体为边集所构成的子图, 称为 X 在 G 中的导出子图。 $G-uv$ 表示从图 G 中删除边 $uv \in E(G)$ 得到的图, $G+uv$ 表示从图 G 中增添边 $uv \notin E(G)$ 得到的图。对于两个图 G 和 H , $G \cup H$ 表示为图 G 和图 H 的并, 即令图 G 和图 H 中顶点集的并和边集的并分别作为 $G \cup H$ 的顶点集和边集。记 $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$ 和 $d(X) = \sum_{x \in X} d(x)$ 。定义 $N_k(X) = \{x \in V(G) \mid |N(x) \cap X| = k\}$ 和 $N_{\geq k}(X) = \{x \in V(G) \mid |N(x) \cap X| \geq k\}$, 其中整数 $k \geq 1$ 。

对于顶点集 $X \subseteq V(G)$, 若 X 中任意两顶点在图 G 中均不相邻, 则称 X 为 G 的一个独立顶点集。图 G 中最大独立顶点集的基数称为独立数, 记为 $\alpha(G)$ 。对于一个整数 $t \geq 1$, 当 $\alpha(G) \geq t$ 时, 我们定义

$\sigma_i(G) = \min\left\{\sum_{i=1}^t d(v_i) \mid \{v_1, \dots, v_t\} \text{ 是图 } G \text{ 的独立顶点集}\right\}$ 以及

$U_i(G) = \min\left\{\left|\bigcup_{i=1}^t N_G(v_i)\right| \mid \{v_1, \dots, v_t\} \text{ 是图 } G \text{ 的独立顶点集}\right\}$, 否则定义 $\sigma_i(G) = U_i(G) = \infty$ 。显然,

$U_i(G) \leq \sigma_i(G)$ 。完全图是指图 G 中的任意两点均有连边, K_n 表示阶数为 n 的完全图。二部图又称二分图, 是指一个图 G , 其顶点集 $V(G)$ 可分解为两个互不相交的非空子集 A 和 B , 并且图中的每条边所关联的两个顶点分别属于这两个不同的顶点集 A 和 B 。记二部图 G 为 $G[A, B]$, 此时也称 (A, B) 为图 G 的一个二分类。若图 G 为具有二分类 (A, B) 的简单二部图, 且分部 A 中每个顶点都与 B 中每个顶点相连, 则称图 G 为完全二部图。若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则记图 $G[A, B]$ 为 $K_{m,n}$ 。常见的完全二部图 $K_{1,3}$ 称为爪。如果图 G 中不含同构于 H 的导出子图, 则称图 G 是 H -free 图。特别地, 若图 G 是 $K_{1,3}$ -free 图, 则称其为无爪图。

连通无圈的图称为树, 通常用符号 T 表示。若树 T 包含图 G 中的所有顶点, 则称 T 为图 G 的支撑树。树 T 中度数为 1 的顶点称为树 T 的叶子, 树 T 中度数至少为 3 的顶点称为树 T 的分支点。符号 $P[u, v]$ 表示起点为 u 且终点为 v 的路, 其长度等于路中边的条数。特别地, 由于树 T 是连通无圈的, 连接 T 中任意两顶点 u 和 v 的路是唯一确定的, 用符号 $P_T[u, v]$ 表示。符号 $d_T[u, v]$ 表示顶点 u 和顶点 v 在树 T 中的距离。

经过图 G 中每个顶点恰好一次的路称为图 G 的一条哈密尔顿路。关于哈密尔顿路的许多研究都基于下面 Ore [2] 的结果。

定理 1 [2] 令图 G 是阶数为 n 的连通图。若 $\sigma_2(G) \geq n-1$, 则图 G 中存在一条哈密尔顿路。

显然, 一条非平凡的哈密尔顿路都含有恰好两个叶子。对于图 G 中含至多有限个叶子的支撑树问题, 主要从参数角度, 利用度和、独立数、邻域并等条件进行了研究。最早, Win 在 [3] 中得到了一个关于独立数条件的结论。

定理 2 [3] 令图 G 是 k -连通图。对于整数 $m \geq 2$, 若 $\alpha(G) \leq k+m-1$, 则图 G 中存在至多 m 个叶子的支撑树。

Broersma 和 Tuinstra 在 [4] 中考虑了度和条件, 得到了下面的定理。

定理 3 [4] 令图 G 是阶数为 n 的连通图。对于整数 $m \geq 2$, 若 $\sigma_2(G) \geq n-m+1$, 则图 G 中存在至多 m 个叶子的支撑树。

Flandrin 等学者在 [5] 中利用邻域并得到了一个关于图中存在至多 k 个叶子的支撑树的充分条件。

定理 4 [5] 令图 G 是阶数为 n 的连通图。对于整数 $k \geq 2$, 若 $U_k(G) \geq \frac{k}{k+1}(n-k)$, 则图 G 中存在至多 k 个叶子的支撑树。

对于连通无爪图, Kano 在 [6] 中以及陈晓东在 [7] 中分别给出了下面的定理。

定理 5 [6] 令图 G 是阶数为 n 的连通无爪图。对于整数 $m \geq 2$, 若 $\sigma_{m+1}(G) \geq n-m$, 则图 G 中存在至多 m 个叶子的支撑树。

定理 6 [7] 令图 G 是阶数为 n 的 k -连通无爪图。若 $\sigma_{k+3} \geq n-k$, 则图 G 中存在至多 3 个叶子的支撑树。

对于连通 $K_{1,4}$ -free 图, Kyaw [8] [9] 给出了下面两个定理。

定理 7 [8] 令图 G 是阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图。若 $\sigma_4(G) \geq n-1$, 则图 G 中存在至多 3 个叶子的支撑树。

定理 8 [9] 令图 G 是阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图。

1) 若 $\sigma_3(G) \geq n$, 则图 G 中存在哈密尔顿路;

2) 若 $\sigma_{m+1}(G) \geq n - \frac{m}{2}$, 其中 $m \geq 3$, 则图 G 中存在至多 m 个叶子的支撑树。

对于包含至多 k 个分支点的支撑树问题, Gargano 等学者在[10]中研究了连通无爪图和 $K_{1,4}$ -free 图中存在至多 k 个分支点的支撑树的充分条件, 并说明了结论中的界是最好可能的。Matsuda 等学者在[11]中分别利用独立数条件和度和条件得到了下面两个结论, 并且说明了结论中的界是最好可能的。

定理 9 [11] 令图 G 是连通无爪图。若 $\alpha(G) \leq 2k+2$, 则图 G 中存在至多 k 个分支点的支撑树。

定理 10 [11] 令图 G 是阶数为 n 的连通无爪图。若 $\sigma_5(G) \geq n-2$, 则图 G 中存在至多 1 个分支点的支撑树。

对于连通 $K_{1,5}$ -free 图, 陈园在[12]中证明了下面这个定理。

定理 11 [12] 令图 G 是阶数为 n 的连通 $K_{1,5}$ -free 图。若 $\sigma_5(G) \geq n-1$, 则图 G 中存在至多 4 个叶子的支撑树。

受到上面这些结果的启发, 在这篇文章中, 我们考虑了邻域并条件来确保阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图 G 中存在至多 3 个叶子的支撑树, 得到了下面的结果。

定理 12: 令图 G 是阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图。若 $U_4(G) \geq |G|-3$, 则图 G 中存在至多 3 个叶子的支撑树。

显然, 如果一个树至多有 $k(k \geq 2)$ 个叶子, 那么这个树至多有 $k-2$ 个分支点。因此, 我们可以直接得到下面的推论。

推论 13: 令图 G 是阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图, 若 $U_4(G) \geq |G|-3$, 则图 G 中存在至多 1 个分支点的支撑树。

下面我们举例来说明定理 12 中的邻域并条件 “ $U_4(G) \geq |G|-3$ ” 是最好可能的。对于 $m \geq 1$, 设 H_1, H_2, H_3, H_4 是 4 个顶点不交的完全图 K_m , xy 是一条边并且顶点 x 和 y 都不在顶点集 $\bigcup_{i=1}^4 V(H_i)$ 中。如图 1 所示, 令图 G 是通过连接 x 和 $H_1 \cup H_2$ 中的所有顶点以及 y 和 $H_3 \cup H_4$ 中的所有顶点所得到的图。显然, 图 G 是一个连通 $K_{1,4}$ -free 图, 图 G 的顶点数目 $n = 4m+2$ 以及 $U_4(G) = 4(m-1)+2 = n-4$ 。但是, 图 G 的每个支撑树都至少有 4 个叶子。

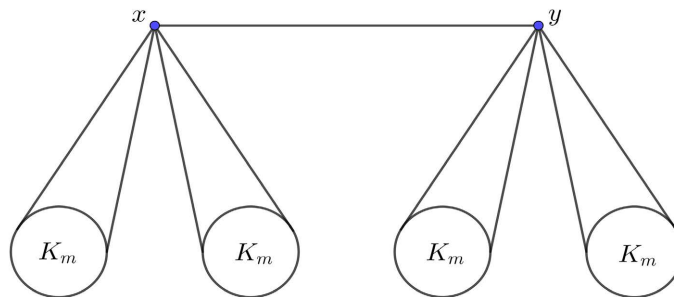


Figure 1. An infinite family of connected $K_{1,4}$ -free graphs G having no spanning tree with at most 3 leaves

图 1. 不存在至多 3 个叶子的支撑树的连通 $K_{1,4}$ -free 图类

3. 主要结果的证明

为了完成证明, 我们需要用到下面这个引理。

引理 14 [8]: 设图 G 是一个连通图使得图 G 中不存在至多 3 个叶子的支撑树且 T 是图 G 中含有 4 个叶子的最大树, 那么图 G 中不存在至多 3 个叶子的树 T' 使得 $V(T') = V(T)$ 。

定理 12 的证明: 我们用反证法来证明此定理。假设图 G 不存在至多 3 个叶子的支撑树, 选取图 G 中包含 4 个叶子的最大树 T , 令集合 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 是 T 中度为 1 的顶点的集合。根据 T 的选择, 我们

有 $N(U) \subseteq V(T)$ 。因为 T 含有 4 个叶子，所以 T 中至多含有两个分支点。下面我们根据 T 的分支点的个数进行分类讨论。

情形 1: T 包含 2 个分支点。

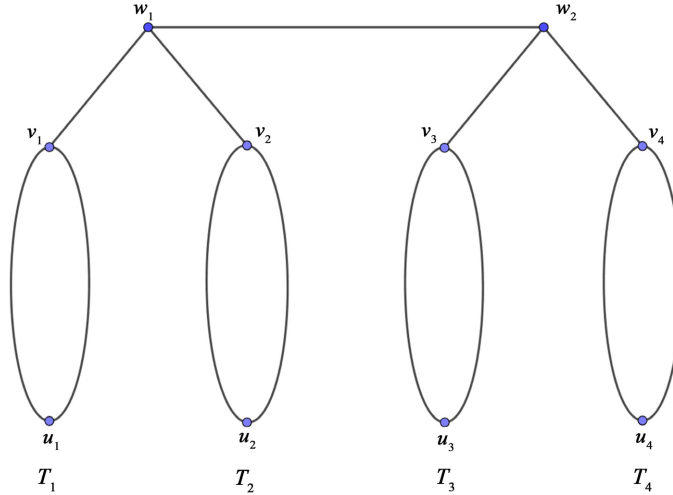


Figure 2. A maximal tree T of G with 4 leaves
图 2. 图 G 中包 4 个叶子的最大树 T

如图 2 所示，设 w_1 和 w_2 是 T 中的两个分支点使得 $d_T(w_1) = d_T(w_2) = 3$ 。对于 $1 \leq i \leq 4$ ，令 T_i 是 $T - \{w_1, w_2\}$ 的连通分支的顶点集使得 $u_i \in T_i$ ， v_i 是集合 $T_i \cap N_T(\{w_1, w_2\})$ 中的唯一顶点。不失一般性，不妨设 $\{v_1, v_2\} \subseteq N_T(w_1)$ ， $\{v_3, v_4\} \subseteq N_T(w_2)$ 。对于 $x \in T_i (1 \leq i \leq 4)$ ， x^- 和 x^+ 分别表示 x 在 $P_T[w_1, u_i]$ (或者 $P_T[w_2, u_i]$) 上的前继顶点和后继顶点。 w_1^+ 和 w_2^- 分别表示 $P_T[w_1, w_2]$ 上 w_1 的后继顶点和 w_2 的前继顶点。定义 $P := V(P_T[w_1, w_2]) \setminus \{w_1, w_2\}$ 。在情形 1 中，我们选取 T 使得 $d_T[w_1, w_2]$ 尽可能小，其中 $d_T[w_1, w_2]$ 是顶点 w_1 和 w_2 在 T 中的距离。

断言 1: 如果 $x \in T_i \cap N(u_j) (1 \leq i, j \leq 4, i \neq j)$ ，那么 $x \neq u_i$ ， $x \neq v_i$ 并且 $x^- \notin N(U \setminus \{u_j\})$ 。

证明: 设 $x \in T_i \cap N(u_j)$ ，则 $xu_j \in E(G)$ 对于某些 $i \neq j$ 。不失一般性，不妨设 $w_1v_i \in E(T)$ 。若 $x = u_i$ ，则图 G 中存在树 $T' = T + xu_j - w_1v_i$ 使得 T' 有 3 个叶子并且 $V(T') = V(T)$ ，这与引理 14 的结论矛盾。若 $x = v_i$ ，则图 G 中存在树 $T' = T + v_iu_j - w_1v_i$ 使得 T' 有 3 个叶子并且 $V(T') = V(T)$ ，这与引理 14 的结论矛盾。若 $x^- \in N(U \setminus \{u_j\})$ ，则存在 $k \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}$ 使得 $x^-u_k \in E(G)$ ，此时图 G 中存在树 $T' = T + xu_j + x^-u_k - xx^- - w_1v_i$ 使得 T' 有 3 个叶子并且 $V(T') = V(T)$ ，与引理 14 的结论矛盾。□

断言 2: $N(U) \cap P = \emptyset$ 。

证明: 假设断言 2 不成立，即存在点 $x \in P$ 使得 $xu_i \in E(G) (1 \leq i \leq 4)$ 。不失一般性，不妨设 $w_1v_i \in E(T)$ ，则图 G 中存在树 $T' = T + xu_i - w_1v_i$ 使得 T' 有 4 个叶子并且 $V(T') = V(T)$ ，此时 T' 有两个分支点 w_2 和 x ， $d_{T'}(w_2) = d_{T'}(x) = 3$ ，以及 $d_{T'}[x, w_2] < d_T[w_1, w_2]$ ，这与 T 的选取矛盾。□

断言 3: $N_3(U) = \emptyset$ 。

证明: 假设 $x \in N_3(U) \cap T_i (1 \leq i \leq 4)$ ，则由断言 1 可得 $x \neq v_i$ 以及 $x^- \notin N(U)$ ，此时图 G 中存在导出子图 $K_{1,4}$ ，这与图 G 是 $K_{1,4}$ -free 图矛盾。假设 $N_3(U) \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset$ ，不失一般性，不妨设 $w_1 \in N_3(U)$ ，则存在一个点 $u_i \in U$ 使得 $w_1u_i \in E(G)$ 以及 $w_2 \in V(P_T[w_1, u_i])$ 。若 $w_1w_2 \in E(T)$ ，即 $d_T[w_1, w_2] = 1$ ，则图 G 中存在树 $T' = T + w_1u_i - w_1w_2$ 使得 T' 有 3 个叶子并且 $V(T') = V(T)$ ，这与引理 14 的结论矛盾；若

$w_1w_2 \notin E(T)$, 则存在顶点 $w_1^+ \in V(P_T[w_1, w_2])$ 使得 $w_1w_1^+ \in E(T)$ 。因为 T 的选取使得 $d_T[w_1, w_2]$ 尽可能小, 所以 $w_1^+ \notin N(U)$, 此时图 G 中存在导出子图 $K_{1,4}$, 这与图 G 是 $K_{1,4}$ -free 图矛盾。□

对于 $1 \leq i \leq 4$, 由断言 1 可知 $\{u_i\}$, $N(u_i) \cap T_i$, $(N(U \setminus \{u_i\}) \cap T_i)^-$ 和 $(N_2(U) \setminus N(u_i)) \cap T_i$ 是 T_i 中两两互不相交的子集, 其中 $(N(U \setminus \{u_i\}) \cap T_i)^- = \{x^- \mid x \in N(U \setminus \{u_i\}) \cap T_i\}$, 所以

$$\begin{aligned} |T_i| &\geq 1 + |N(u_i) \cap T_i| + |(N(U \setminus \{u_i\}) \cap T_i)^-| + |(N_2(U) \setminus N(u_i)) \cap T_i| \\ &= 1 + |N(u_i) \cap T_i| + |N(U \setminus \{u_i\}) \cap T_i| + |(N_2(U) \setminus N(u_i)) \cap T_i| \\ &\geq 1 + \sum_{j=1}^4 |N(u_j) \cap T_i| \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^4 |T_i| \geq 4 + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |N(u_j) \cap T_i|. \tag{1}$$

显然,

$$\left| \bigcup_{i=1}^4 N(u_i) \cap \{w_1, w_2\} \right| \leq 2.$$

定义 $d_p(u_i) = |N(u_i) \cap P|$ ($1 \leq i \leq 4$), 根据断言 2 得,

$$|P| \geq \sum_{i=1}^4 d_p(u_i) = 0.$$

因此,

$$|V(P_T[w_1, w_2])| = 2 + |P| \geq \left| \bigcup_{i=1}^4 N(u_i) \cap \{w_1, w_2\} \right|. \tag{2}$$

综合(1) (2)两式可得,

$$\begin{aligned} |V(T)| &= \sum_{i=1}^4 |T_i| + |V(P_T[w_1, w_2])| \\ &\geq 4 + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |N(u_j) \cap T_i| + \left| \bigcup_{i=1}^4 N(u_i) \cap \{w_1, w_2\} \right| \\ &\geq 4 + U_4(G) \end{aligned}$$

由于 $|V(T)| \leq |V(G)|$, 所以

$$U_4(G) \leq |V(G)| - 4.$$

这与定理 1 中的条件 $U_4(G) \geq |V(G)| - 3$ 矛盾。

情形 2: T 包含 1 个分支点。

设 r 是 T 的分支点使得 $d_T(r) = 4$ 。因为图 G 是 $K_{1,4}$ -free 图, 所以存在不同的 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ 使得 $v_i v_j \in E(G)$ ($1 \leq i, j \leq 4$)。令 $T' := T - rv_i + v_i v_j$, 如果 v_j 是叶子, 那么 T' 是 G 中含有 3 个叶子的树使得 $V(T') = V(T)$, 这与引理 14 的结果矛盾。所以假设 $d_T(v_j) = 2$, 那么 T' 是 G 中含有 4 个叶子的树使得 $V(T') = V(T)$, 此时 T' 有两个分支点 r 和 v_j , 且 $d_{T'}(r) = d_{T'}(v_j) = 3$, 这与情形 1 类似, 同样可以得出矛盾。

综上, 对于阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图 G , 如果 $U_4(G) \geq |G| - 3$, 那么图 G 中存在至多 3 个叶子的支撑树。■

4. 总结

图的结构问题的研究是图论研究中的热点领域, 其中图中存在给定特征的支撑树是结构图论中重要的研究课题。众所周知, 判定一个图是否含有一条哈密尔顿路从算法复杂性来讲是 NP -完全的。对于图 G , 给图 G 的每个顶点均加上 $k-2$ 条悬挂边得到图 G' , 显然图 G' 中存在支撑 k -树的充要条件是图 G 中含有一条哈密尔顿路。类似地, 任取图 G 中一个顶点 v , 在顶点 v 上增添 $k-2$ 条悬挂边得到图 G^* , 显然图 G^* 中存在至多 k 个叶子的支撑树的充要条件是图 G 中含有一条哈密尔顿路。于是图中是否存在支撑 k -树或至多 k 个叶子的支撑树问题也是 NP -完全的[13]。所以对于诸类问题的研究主要集中在给出判定一个图是否含有上述特征支撑树的充分条件。2009 年, Kyaw 在[8]中给出了 $K_{1,4}$ -free 图中存在至多 3 个叶子的支撑树的度和条件。Flandrin 等学者在[5]中利用邻域并得到了一个关于图中存在至多 k 个叶子的支撑树的充分条件。受到这些结果的启发, 在这篇文章中我们考虑了邻域并条件来确保阶数为 n 的连通 $K_{1,4}$ -free 图 G 中存在至多 3 个叶子的支撑树, 且该条件的下界是最好可能的。

本文在解决问题的过程中, 首先通过构造一个反例图类(不存在至多 3 个叶子的支撑树的连通 $K_{1,4}$ -free 图类), 计算出该图类中任意 4 个独立顶点的邻域并的基数, 然后猜测确保连通 $K_{1,4}$ -free 图存在至多 3 个叶子的支撑树的邻域并条件最好的下界形式, 最后我们通过反证法证明定理 12 中的邻域并条件是最好可能的。在定理 12 的证明过程中, 对于给定的图 G , 我们假设图 G 不存在至多 3 个叶子的支撑树, 选取图 G 中包含 4 个叶子的最大树 T , 通过计算树 T 的阶数 $|V(T)|$, 建立其与图 G 中 4 个独立顶点的邻域并的基数之间的数量关系, 很显然有 $|V(T)| \leq |V(G)|$, 从而得到了与定理 12 中给定邻域并条件相矛盾的结果, 完成了主要结果的证明。

基金项目

国家自然科学基金(12101126)。

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. *Graduate Texts in Mathematics*, **244**.
- [2] Ore, O. (1960) Note on Hamilton Circuits. *The American Mathematical Monthly*, **67**, 55. <https://doi.org/10.2307/2308928>
- [3] Win, S. (1979) On a Conjecture of Las Vergnas Concerning Certain Spanning Trees in Graphs. *Results in Mathematics*, **2**, 215-224. <https://doi.org/10.1007/BF03322958>
- [4] Broersma, H. and Tuinstra, H. (1998) Independence Trees and Hamilton Cycles. *Journal of Graph Theory*, **29**, 227-237. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199812\)29:4<227::AID-JGT2>3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199812)29:4<227::AID-JGT2>3.0.CO;2-W)
- [5] Flandrin, E., Kaiser, T., Kužel, R., Li, H. and Ryjáček, Z. (2008) Neighborhood Unions and Extremal Spanning Trees. *Discrete Mathematics*, **308**, 2343-2350. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.04.071>
- [6] Kano, M., Kyaw, A., Matsuda, H., Ozeki, K., Saito, A. and Yamashita, T. (2012) Spanning Trees with a Bounded Number of Leaves in a Claw-Free Graph. *Ars Combinatoria*, **103**, 137-154.
- [7] Chen, X.D., Li, M.C. and Xu, M.J. (2017) Spanning 3-Ended Trees in k -Connected Claw-Free Graphs. *Ars Combinatoria*, **131**, 161-168.
- [8] Kyaw, A. (2009) Spanning Tree with at Most 3 Leaves in $K_{1,4}$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6146-6148. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.04.023>
- [9] Kyaw, A. (2011) Spanning Tree with at Most k Leaves in $K_{1,4}$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **311**, 2135-2142. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.06.025>

-
- [10] Gargano, L., Hammar, M., Hell, P., Stacho, L. and Vaccaro, U. (2004) Spanning Spiders and Light-Splitting Switches. *Discrete Mathematics*, **285**, 83-95. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.04.005>
- [11] Matsuda, H., Ozeki, K. and Yamashita, T. (2014) Spanning Trees with a Bounded Number of Branch Vertices in a Claw-Free Graph. *Graphs and Combinatorics*, **30**, 429-437. <https://doi.org/10.1007/s00373-012-1277-5>
- [12] Chen, Y., Ha, P.H. and Hanh, D.D. (2019) Spanning Tree with at Most 4 Leaves in $K_{1,5}$ -Free Graph. *Discrete Mathematics*, **342**, 2342-2349. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.05.005>
- [13] 陈园. 图中参数与树型结构研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中师范大学数学与统计学学院, 2013.