Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3638-3645
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312377

在强扰动下广义最大元的稳定性

周应辉，杨彦龙*

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年11月14日；录用日期：2023年12月15日；发布日期：2023年12月28日

摘 要

本文通过引入由半度量定义的一种更强的扰动，即Hausdorff半度量，代入该扰动后证明广义最大元中强本质集的存在性，进一步得出广义最大元点集稳定性的一些结果。作为应用，该方法也证明了广义最大元策略的Nash均衡的稳定性，对支付函数扰动具有较强的鲁棒性。

关键词

稳定性，Hausdorff半度量，广义最大元

Stability of Generalized Maximal Elements under Strong Perturbations

Yinghui Zhou, Yanlong Yang*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 14th, 2023; accepted: Dec. 15th, 2023; published: Dec. 28th, 2023

Abstract

In this paper, we further derive some results on the stability of generalized maximal elements by introducing a stronger perturbation defined by the semi-metric measure, *i.e.* the Hausdorff semi-metric measure, and proving the existence of a strong essential set in the generalized maximal element by substituting this perturbation. As an application, the method also proves the stability of the Nash equilibrium of the generalized maximal element strategy, which is robust to payment function perturbations.

Keywords

Stability, Hausdorff Semi-Metric, Generalized Maximal Element

*通讯作者。

文章引用: 周应辉, 杨彦龙. 在强扰动下广义最大元的稳定性[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3638-3645.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312377

1. 引言

最大(小)值或极大(小)值，以及与之相应的最大(小)元或极大(小)元是数学研究中对所研究一组数据或集合中特殊的数字或元素。对于最大(小)元和极大(小)元常见的形式有实函数形式和偏序形式，但我们应该注意到，偏序形式的最大元是很少存在的，一般只有极大元，即使是只考虑极大元，在实际问题中也经常化为实函数的情形来加以解决，如运筹学中常使用目标函数的方法。在很多情况下，虽然与偏序对应的效用函数被证明是存在的，但具体的效用函数却难以确定。另外，对于某些实际问题偏序也不易确定，因此数理经济学家们[1]-[8]引进了一种不需要偏序，也无需效用函数的比较方法，即利用集值映射直接进行定义，这就是广义最大元与广义极大元的方法。最早对其进行定义是在二十世纪七十年代左右 Gale，Mas-colell [9]在对平衡存在性定理的研究中首次在集值映射中对广义最大元进行定义并对其应用。1999 年，Yang 和 Yu [10]在拟凹支付函数下另广义最大元对 Nash 均衡在约束条件下进行推广及其应用。从此以后，广义最大元在非线性分析的对策理论、优化与控制、数学规划等领域都有广泛的应用。

本文主要研究稳定性，早在 1986 年，Kohlberg 和 Mertens [11]在纳什均衡的许多细化方法的基础上引入了 KM 均衡的概念。KM 均衡的核心思想之一是寻求对策略集的轻微扰动稳定的纳什均衡点集，还建立了各种稳定集，如超稳定集、完全稳定集和稳定集。定义了以下一般形式的许多不同的解决方案概念：平衡的稳定集是平衡的最小闭集，使得博弈的所有小扰动都有接近稳定集的平衡。此后，Hillas [12]通过改变扰动的定义，有可能定义一个满足所有问题要求的解概念，直接着眼于最佳回复对应的扰动，利用这个扰动空间上的适当拓扑，得到的定义确实满足所有要求。此后，Tan [13]等人提出了 Ky Fan 点相对于配备超范数度量的不等式函数的扰动的一般稳定性。Jiang、Tan 和 Yu 等人[14]-[16]对线性赋范空间中在 Hausdorff 度量下不动点集的通有稳定性给出了完整的证明结论。Yu [17] [18]等人提供了关于相同扰动形式的基本分量的存在性。许多非线性问题的解并不唯一，在现实问题中，收集信息、构造模型及计算求解等过程中，不可避免地出现与实际问题有出入的“扰动”。Yu 和 Xiang [19]在中考虑满足存在广义最大元的映射的扰动，利用 usco 映射证明方法，通过本质集定义证明广义最大元的通用稳定性。

目前的这些方法是利用纳什均衡与某些非线性问题的解之间的等价性来研究纳什均衡的稳定性，例如利用最佳回应映射的不动点来研究纳什均衡的稳定性。最佳回应映射方法存在的缺陷是最佳应答对应与策略集或收益函数之间的不连续;也就是说，在这样的结果中，它不能说明纳什均衡是否相对于策略集或支付函数的扰动是“稳定的”。对此在本文中引入一种更弱的扰动——包含 Hausdorff 半度量的扰动，对该扰动将策略集和支付函数都包含其中来证明点集的扰动性，完善之前存在的缺陷。再结合 Xiang [20]等人也通过由最大 Hausdorff 半度量定义的扰动对 Ky Fan 点集稳定性得出了进一步的结果，在已知广义最大元的通用稳定性证明结论给出了更进一步的启发，是否有可能如同 Fan Ky 不等式一样建立一种更强的稳定性，将由 Hausdorff 度量定义的广义最大元映射空间改为由 Hausdorff 半度量定义的广义最大元映射空间。其中更强的“稳定”集合相对于弱扰动是否稳定的？为了解决这个问题，在本文中，通过引入一种由称为最大 Hausdorff 半度量定义的广义最大元映射的更强扰动，证明广义最大元的稳定性。

2. 预备知识

定义 2.1 [21]：设 A，B 是 X 中任意两个非空有界闭集，定义

$$h(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset U(\varepsilon,B),B\subset U(\varepsilon,A)\}$$

为有界闭集 A 和 B 之间的 Hausdorff 度量。

定义 2.2 [20]：设 X_1，X_2 是 X 中任意两个非空有界闭集，定义

$$H_u(X_1,X_2)=\sup_{x\in X_1}h(x,X_2)$$

为有界闭集 X_1 和 X_2 之间的 Hausdorff 半度量。

定义 2.3 [9]：设 X 是一集合，$T:X\to 2^x$ 是一集值映射且满足对 $\forall x\in X$，均有 $x\in Tx$，若 $\exists x^*\in X$，使得 $x^*\in\bigcap_{x\in X}T(X)$ 则称 x^* 为 X 上关于 Γ 的广义最大元。

引理 2.1：设 E 为线性拓扑空间，X 为 E 的一非空紧凸子集，$W:X\to 2^x$ 是一集值映射且满足对 $\forall x\in X$，均有 $x\in W(x)$ 及 $X\setminus W^{-1}(x)$ 为凸集，则 W 在 X 中存在广义最大元。

定理 2.1：设 $X\subset R^m$ 是非空有界闭凸集，集值映射 $G:X\to P_0(X)$ 连续，且 $\forall x\in X$，$G(x)$ 是 X 中的非空闭凸集，$\varphi:X\to R$ 满足下列条件：1) φ 在 X 上是连续的；2) $\forall x\in X$，$\varphi(x)$ 是凸值的；则 $\exists x^*\in X$，使得 $x^*\in G(x^*)$ 且 $\varphi(x)\le\varphi(x^*)(\forall x\in X)$。

现在定义 Z 为所有满足存在广义最大元的条件的映射集合。定义映射 $F:Z\to P_0(x)$ 满足：$\exists W\in Z$，W 的所有广义最大元的集合为 $F(W)$。

令 $E_\varphi(x)=\{y\in X:\varphi(x)\le\varphi(y)\}$，$M=\{\varphi\,|\,\varphi:X\to R$ 满足定理 2.1 的条件(1)和(2)$\}$。

一般引入 M 上的超范度量为

$$\rho_m(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_{x\in X}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|,(\varphi_1,\varphi_2\in M),$$

$$\rho_1(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_{x\in X}h(E_{\varphi_1}(x),E_{\varphi_2}(x)),(\varphi_1,\varphi_2\in M),$$

其中 h 为 $E_{\varphi_1}(x),E_{\varphi_2}(x)$ 之间的 Hausdorff 度量。

下例说明广义最大元的稳定性基于 ρ_m 不一定与基于超范度量 ρ_1 的稳定性有关。

例 2.1：设 $X=[0,1]$，对 $n=1,2,\cdots$，定义 $\varphi,\varphi^n,\phi^n:X\to R$ 表示为 $\varphi(x)=0$；$\varphi^n(x,y)=-1$；$\phi^n(x)=\frac{1}{n}x,\forall x\in X$。则 $\varphi,\varphi^n,\phi^n\in M$，且对每个 $x\in X$ 有 $E_\phi(x)=[0,1]$，$E_{\varphi^n}(x)=[0,1]$，$E_{\phi^n}(x)=[x,1]$。显然 $\rho_1(\varphi^n,\varphi)\to 0$，而 $\rho_m(\varphi^n,\varphi)=1$ 不会收敛于 0。另一方面，很明显 $\rho_m(\phi^n,\varphi)\to 0$，两种扰动没有必然联系。这表明，不等式函数的扰动，即使是由强超范数度量定义，当它足够小时，也不能保证它们的截面映射的扰动足够小。

为了研究更好地研究广义最大元点集的稳定性，定义了一个扰动使得它包含了 ρ_m 和 ρ_1，提出一个更弱度量来建立更强扰动。首先广义最大元映射的最大 Hausdorff 度量被定义为

$$\rho_1(G_1,G_2)=\sup_{x\in X}h(G_1(x),G_2(x)),$$

定义关于广义最大元映射的最大 Hausdorff 半度量为

$$\rho_1^u(G_1,G_2)=\rho_1^u(E_{\varphi_1}(x),E_{\varphi_2}(x))=\sup_{x\in X}H_u(E_{\varphi_1}(x),E_{\varphi_2}(x))+\frac{1}{2}\sup_{x\in X}\rho_m(\varphi_1,\varphi_2)。$$

其中 $H_u(G_1,G_2)=\sup_{x\in G_1}d(x,G_2)$ 是 Hausdorff 半度量。

引理 2.2 [21]：设 $A_n\in K(X)$ $(n=1,2,\cdots)$，$A\in K(X)$，$A_n\to A$：

1) 若 $G\supset A$ 为开集，则存在正整数 N，对任意 $n\ge N$ 有 $G\supset A_n$。

2) 若 $x_n\in A_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $x_n\to x$，则 $x\in A$。

3) 若 $x'\in A$，则 x' 对的任意开邻域 G'，存在 N' 使得对 $n\geq N'$ 有 $G'\cap A_n\neq\varnothing$。

引理 2.3：(Z,P_u^1) 是一个完备度量空间。

证明：设 $\{W_n\}$ 是 Z 中任意一个 Cauchy 序列，则对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_1，使 $\forall m,n\geq n_1$，有 $P(W_m,W_n)=\sup\limits_{x\in X}h(W_n(x),W_m(x))<\varepsilon$。因为 X 是完备的，$\forall x\in X$，存在非空紧集 $W(X)$，使 $\sup\limits_{x\in X}\rho_u(W_n(x),W(x))\to 0$。

如果 W 满足广义最大元映射的条件，则需证明(1)：$\forall x\in X$，均有 $x\in W(x)$；(2) $X\setminus W^{-1}(x)$ 为凸集。

证明(1)，若不成立，则 $\exists\overline{x}\in X$，有 $\overline{x}\notin W(\overline{x})$。由 $W(\overline{x})$ 的闭性可知，$W(\overline{x})$ 的某一邻域 $O(\delta,W(\overline{x}))$，使 $\overline{x}\notin O(\delta,W(\overline{x}))$。又 $P_u(W_n(x),W(x))\to 0$，故 $n\to\infty$ 时，有 $W_n(\overline{x})\subset O(\delta,W(\overline{x}))\Rightarrow\overline{x}\notin W_n(\overline{x})$，但 $W_n\in Z$，所以 $\overline{x}\in W_n(\overline{x})$。因此矛盾，证明成立。

证明(2)，反证法，若 $\exists x_0\in X$ 有) $X\setminus W^{-1}(x_0)$ 不是凸集，则 $\exists x_1,x_2\in X\setminus W^{-1}(x_0)$ 及 $\lambda\in(0,1)$，使 $S_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\notin X\setminus W^{-1}(x_0)$，则 $S_0\in W^{-1}(x_0)\Rightarrow x_0\in W(S_0)$。但 $x_0\notin W(x_i)(i=1,2)$，由 $W(x_i)$ 的闭性可得，在 x_0 的某一邻域 $O(x_0)$，使得 $O(x_0)\cap O(\delta,W(x_i))=\varnothing$。因为 $\rho_u(W_n(x),W(x_x))\to 0$ 的可推出当 $n\to\infty$ 时，有 $W_n(x_i)\subset O(\delta,W(x_i))$ 且 $O(x_0)\cap W_n(x_i)=\phi$。从而对 $\forall x'\in O(x_0)$ 都有 $x'\notin W_n(x_i)$，可得 $x_i\notin W_n^{-1}(x')$，因此 $x_i\in X\setminus(W_n^{-1}(x'))$。所以 $X\setminus(W_n^{-1}(x'))$ 是凸集，可得 $s_0\in X\setminus(W_n^{-1}(x'))$ 和 $x'\notin W_n(s_0)$。由 x' 的任意性可得 $O(x_0)\cap W_n(s_0)=\phi$。因为 $P_u(W_n(S_0),W(s_0))\to 0$ 且 $W(s_0)$ 和 $W_n(s_0)$ 为闭集，又因为 X 为紧集，所以 $W(s_0)$ 和 $W_n(s_0)$ 也为紧集，所以 $x_0\in W(S_0)$。由定理 2.2 可得，当 $n\to\infty$ 时 $O(x_0)\cap W_n(s_0)\neq\phi$。所以矛盾，证明成立。

定理 2.2 [21]：设 X 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 中的任一集合，$\forall x\in X$，$F(x)$ 是 E 中的闭集，且 $\exists x_0\in X$，使 $F(x_0)$ 是紧集，又 $\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，有 $co\{x_1,\cdots,x_n\}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}F(x_i)$，则 $\bigcap\limits_{x\in X}F(x)\neq\varnothing$。

定义 2.4 [20]：设 $G\in M$，$F(G)$ 的一个非空子集 $m(G)$ 被称为关于 ρ_1 的本质集，如果给定任意数 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对所有的 $G'\in M$ 使 $\rho_1(G,G')<\delta$ 有 $F(G')\cap[m(E)+B_\varepsilon(0)]\neq\varnothing$。

命题 2.1：设 $G\in M$ 和 $\{G^n\}\subset M$，则

(1) $\rho_1^u\leq\rho_1$。

(2) 如果 $\rho_1(G^n,G)\to 0\ (n\to\infty)$，则 $\rho_1^u(G^n,G)\to 0$。

证明：(1) 根据 ρ_1，ρ_1^u 的定义显然成立。

(2) 通过反证法来证明，若(2)不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$，存在一个正数序列 $\{\delta_n\}$ 收敛到 0，对任意 $G^n,G\in M$ 使 $\rho_1^u(G^n,G)\geq\varepsilon_0$ 有 $\rho_1(G^n,G)\leq\delta_n\ (n\to\infty)$。所以可得 $\rho_1(G^n,G)\to 0$，因为由命题 1 (1)知 $\rho_1^u\leq\rho_1$，所以可得 $\rho_1^u(G^n,G)\to 0$，即对任意 $\varepsilon>0$，对任意 $G^n,G\in M$，有 $\rho_1^u(G^n,G)<\varepsilon\ (n\to\infty)$，矛盾，结论成立。

3. 主要结论

定义 3.1 [20]：设 $G\in M$，$F(G)$ 的一个非空子集 $m(G)$ 被称为关于 ρ_1^u 的本质集，如果给定任意数 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对所有的 $G'\in M$ 使 $\rho_1^u(G,G')<\delta$ 有 $F(G')\cap[m(E)+B_\varepsilon(0)]\neq\varnothing$。

备注 3.1：(1) 通过定义 3.1 和命题 2.1 可得，关于 ρ_1^u 的本质集显然是关于 ρ_1 的本质集。

(2) 如果 S 是所有本质集族中的最小集合，其顺序由包含关系来定义，则称 S 是一个最小本质集。如果 S 是最小本质集且连通，则称 S 为稳定集。

定义 3.2 [20]：设 $F:Z\to 2^Y$ 是一个具有非空值的集值映射。

(1) F 被称为在 $z\in Z$ 处是上半连续的，如果 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对所有的 $z'\in Z$ 有 $d(z',z)<\delta$ 使得 $F(z')\subset[F(z)+B_\varepsilon(0)]\neq\varnothing$。

(2) 若 F 在 Z 上是上半连续的且紧值的，则称 F 为 usco 映射。

引理 3.1：$F:\left(Z,\rho_1^u\right)\to K(X)$ 是一个 usco 映射。

证明：若不成立，$\exists\varepsilon_0>0$，存在正数序列 $\{\delta_n\}\to 0$，对任意 $W^n\in M$ 有 $\rho_1^u\left(W,W^n\right)<\delta_n$ 使得 $y_n\in F\left(W^n\right)$ 和 $y_n\notin\left[F(W)+B_{\varepsilon_0}(0)\right]$，因为 X 是紧的，不失一般性，所以可以假设 $y_n\to y$。因此 $y_n\notin\left[F(W)+B_{\varepsilon_0}(0)\right]$ 有 $y\notin\left[F(W)+B_{\varepsilon_0}(0)\right]$，所以 $y\notin F(W)$。利用 $\rho_1^u\left(W^n,W\right)=\sup\limits_{y\in G^n}d(y,W)<\delta_n$，所以存在 $\{y_n'\}\in W(x)$ 使得 $\rho_1^u\left(y_n',y_n\right)<\delta_n$，因为 $y_n\to y$ 可得 $y_n'\to y$，然后可得 $y\in\bigcap\limits_{x\in X}W(x)=F(W)$，所以矛盾，结论成立。

引理 3.2：任意的 $W\in Z$，$F(W)$ 关于 ρ_1^u 至少有一个最小本质集。

证：通过引理 2.3 可得，对任意 $W\in Z$，存在 $\delta>0$，对 $\rho_1^u\left(W',W\right)<\delta_n$ 使得 $F(W')\subset\left[F(W)+B_\varepsilon(0)\right]$，所以可以得出 $F(W')\cap\left[F(W)+B_\varepsilon(0)\right]\neq\varnothing$。所以 $F(W)$ 关于 ρ_1^u 是本质集，所以也可得 $F(W)$ 关于 ρ_1^u 至少有一个最小本质集。

引理 3.3 [20]：设 S 是 $F(G)$ 所有本质集的集合，则 $S\neq\varnothing$。若 S 是由集合包含顺序排列的，则 S 是偏序的。对于 S 中的任意递减链 C，因为 C 中的所有集合都是紧的，所以 $D=\bigcap\limits_{c\in C}C$ 是非空的且 D 是 C 的下界。通过 Zorn 引理可知，S 中有一个最小集合 s，且 s 是 $F(G)$ 中的一个最小本质集。

定理 3.1：对任意的 $W\in Z$，如果 $F(W)$ 关于 ρ_1^u 的最小本质集是连通的，则 $F(W)$ 是一个稳定集。

证明：对任意的 $W\in Z$，因为引理 3.2 的成立，可设 $m(W)$ 是 $F(W)$ 关于 ρ_1^u 的最小本质集。若 $m(W)$ 不是连通的，则存在两个紧集 $C_1(W)$，$C_2(W)$ 和两个不相交开子集 $V_1,V_2\subset X$，使得 $m(W)=C_1(W)\cup C_2(W)$ 且对任意 $\varepsilon>0$，有 $V_1\supset\left[C_1(W)+B_\varepsilon(0)\right]$，$V_2\supset\left[C_2(W)+B_\varepsilon(0)\right]$。

因为 $m(W)$ 是 $F(W)$ 关于 ρ_1^u 的最小本质集，所以 $C_1(W)$，$C_2(W)$ 都不是本质的。所以存在 $\varepsilon_0>0$，对任意正数序列 $\{\delta_n\}\to 0$，存在 $W_n^1,W_n^2\in M$ 使得 $\rho_1^u\left(W_n^1,W\right)<\delta_n$，$\rho_1^u\left(W_n^2,W\right)<\delta_n$，$F\left(W_n^1\right)\cap V_1\neq\varnothing$，$F\left(W_n^2\right)\cap V_2\neq\varnothing$。

接下来的，定义 $W_n':X\to P_0(X)$ 满足

$$W_n'(x)=\left(W_n^1(x)\setminus V_2\right)\cup\left(W_n^2(x)\setminus V_1\right)(x\in X)\cdot$$

现在检查 $W_n'\in Z$。需证明(1)：$\forall x\in X$，均有 $x\in W_n'(x)$；(2) $X\setminus W_n'^{-1}(x)$ 为凸集。

(1) 存在 $x\in X$ 有 $x\notin W_n'(x)$，则有 $x\notin\left(W_n'(x)\right)V_2\cup\left(W_n^2(x)\right)V_1$，可得 $x\notin W_n^1(x)\setminus V_2$ 且 $x\notin W_n^2(x)\setminus V_1$。因为 $W_n^1(x)$、$W_n^2(x)\in Z$，则 $x\in W_n^1(x)$ 且 $x\in W_n^2(x)$。若 $x\notin W_n^1(x)\setminus V_2$，则 $x\in V_2$ 即 $x\notin V_1$，由此可推出 $x\in W_n^2(x)\setminus V_1$。矛盾，证明成立。

(2) 若 $X\setminus W_n'^{-1}(x)$ 不是凸集，由 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$ 可得，

$X\setminus\left[W_n^1(x)\setminus V_2\cup W_n^2(x)\setminus V_1\right]=\left[X\setminus\left(W_n^1(x)\setminus V_2\right)\right]\cap\left[X\setminus\left(W_n^2(x)\setminus V_1\right)\right]=\left[X\setminus W_n^1(x)\right]\cap\left[X\setminus W_n^2(x)\right]$，$W_n^1(x),W_n^2(x)\in Z$，可 $X\setminus\left[\left(W_n^1\right)^{-1}(x)\right]$ 和 $X\setminus\left[\left(W_n^2\right)^{-1}(x)\right]$ 得为凸集。则 $\left\{X\setminus\left[\left(W_n^1\right)^{-1}(x)\right]\right\}\cap\left\{X\setminus\left[\left(W_n^2\right)^{-1}(x)\right]\right\}$ 也为凸集。证明成立。

接下来通过反证法来证明 $F\left(W_n'\right)\cap\left(V_1\cup V_2\right)=\varnothing$，假设 $y_0\in F\left(W_n'\right)\cap\left(V_1\cup V_2\right)$，所以 $y_0\in V_1\cup V_2$。设 $y_0\in V_1$，因为 $F\left(W_n^1\right)\cap V_1\neq\varnothing$，所以 $y_0\notin F\left(W_n^1\right)$ 且存在 $x_0\in X$ 使得 $y_0\notin W_n^1(x_0)$。因为 $y_0\in F\left(W_n'\right)$ 可得 $y_0\in W_n'(x_0)$，所以 $y_0\in\left(W_n^2(x)\setminus V_1\right)$，则可得 $y_0\notin V_1$，与 $y_0\in V_1$ 矛盾。因此 $F\left(W_n'\right)\cap\left(V_1\cup V_2\right)=\varnothing$ 成立。

最后，检查对任意 $x\in X$ 有 $W_n'(x)\subset\left[W(x)+B_{\delta_n}(0)\right]$。已知

$W_n'(x)=\left(W_n^1(x)\setminus V_2\right)\cup\left(W_n^2(x)\setminus V_1\right)\subset W_n^1(x)\cup W_n^2(x)$ 且 $\rho_1^u\left(W_n^1,W\right)<\delta_n$，$\rho_1^u\left(W_n^2,W\right)<\delta_n$，所以

$W_n^1(x)\subset\left[W(x)+B_{\delta_n}(0)\right]$，$W_n^2(x)\subset\left[W(x)+B_{\delta_n}(0)\right]$。

可得 $W_n'(x)\subset W_n^1(x)\cup W_n^2(x)\subset\left[W(x)+B_{\delta_n}(0)\right]$，也就是 $\rho_1^u(W_n',W)<\delta_n$。所以

$$F(W_n')\cap\left[m(x)+B_\varepsilon(0)\right]=F(W_n')\cap\left[C_1(W)\cup C_2(W)+B_\varepsilon(0)\right]\subset F(W_n')\cap(V_1\cup V_2)=\varnothing,$$

这与 $m(W)$ 是本质的相矛盾，所以 $m(W)$ 是连通的。

4. 广义最大元策略的 Nash 均衡

设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为局中人集合，$\forall i\in N$，X_i 为局中人 i 的策略集。$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 为策略组合空间。对局中人 i，设 $F_i:X\to 2^x$，其中 $F_i(x)$ 表示与 x 无差异或优于 x 的所有策略组合的全体，F_i 为局中人 i 的策略组合。设局中人集 N，$\forall i\in N$，$f_i:X\to R$ 为第 i 个局中人的支付函数，称 $\Gamma=\{N;X_1,\cdots,X_n;F_1,\cdots,F_n;f_1,\cdots,f_n\}$ 为一个广义最大元策略。另外，记 $\hat{X}_i=\prod_{j\neq i}X_j$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$。对每一 $\hat{x}_i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\in X\in\hat{X}_i$，若 $x_i^*\in X_i$ 满足 $(x_i^*x_i^*)\in\bigcap_{x_i\in x_i}F_i(x_i,\hat{x}_i^*)$，则称 x_i^* 局中人 i 关于 x_i^* 的最佳反应对策。

假设广义最大元策略 $\Gamma(X,F,f)$ 满足条件 A：(1)：对 $\forall i\in N$，f_i 在 X 上是连续的；(2)：对每个 $\hat{x}_i\in\hat{X}_i$，$\sum_{i\in N}f_i(\bullet,\hat{x}_i)$ 在 X 上是拟凹的。

定义集合 $G=\{\Gamma(X,F,f):\Gamma(X,F,f)\text{满足条件 A}\}$。

定义 4.1 [21]：设 X 是一集合，$T:X\to 2^x$ 是一集值映射且满足对 $\forall x\in X$，均有 $x\in Tx$，若 $\exists x^*\in X$，使得 $x^*\in\bigcap_{x\in x}T(X)$ 则称 x^* 为 X 上的广义最大元。

备注 4.1：(1) 其中 Tx 的含义是 Tx 表示所有与 x 无差异或优于 x 的元的全体，$x^*\in\bigcap_{x\in x}T(X)$ 表示 x^* 与 X 中任何元 x 相比要么无差异、要么优于 x。

(2)：定义 T 的所有广义最大元为 $W(T)$。

引理 4.1 [22]：X 是局部凸线性拓扑空间的非空紧凸集，$F:X\to 2^x$ 上半连续，且对每一 $x\in X$，$F(x)$ 为非空紧凸集，则 $\exists x^*$ 使 $x^*\in F(x^*)$。

引理 4.2 [23]：设 X 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 的任一集合，$\forall x\in X$，$F(x)$ 是 E 中的闭集，且 $\exists x_0\in X$，使 $F(x_0)$ 是紧集，又 $\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\in X$，有 $co\{x_1,\cdots,x_n\}\in\bigcup_{i\in N}F(x_i)$，则 $\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\varnothing$。

定义 4.2 [23]：称 $x^*\in X$ 为广义最大元对策 Γ 的 Nash 平衡点，如果对每一个 $i\in N$，有 $x^*=(x_i^*,\hat{x}_i^*)$，使得 x_i^* 为局中人 i 关于 $\hat{x}_i^*$ 的最佳反应对策，即对 $\forall i\in N$，有 $x^*\in\bigcap_{x_i\in X_i}F_i(x_i,x_i^*)$。

备注 4.2：定义 $\forall\Gamma(X,F,f)\in G$ 的所有 Nash 平衡点为 $N(\Gamma(X,F,f))$。

不难证明若对任意策略 $\Gamma(X,F,f)\in G$，$\forall i\in N$，集合 $N(\Gamma(X,F,f))$ 一定为关于 F_i 的广义最大元，由此可得广义最大元策略的 Nash 均衡点的稳定性。

广义最大元的 Nash 均衡把广义最大元的方法运用于对策平衡，并用这两个概念取代支付函数建立对策的 Nash 均衡的概念使得所建立的 Nash 均衡能够包括局中人的偏好不具传递性的情形，更好的解决在很多实际问题，尤其是经济学模型中具体的支付(效用)函数或偏序关系因为传递性的丧失而不能建立，对此将广义最大元策略的 Nash 均衡应用在这一类非合作对策的对策论研究领域里，在众多对策中寻找最优对策。

5. 小结与展望

杨光惠等人[22]运用 usco 映射的方法，证明了当映射扰动时，广义最大元的通有稳定性，陈志友等

人[23]在抽象凸空间中利用一个集值映射来表示广义最大元的全体，通过连续性问题来证明了广义最大元的稳定性。本文在文献[20]的基础上代入了一种更强的扰动，研究了在 Hausdorff 半度量下的广义最大元的稳定性，并对广义最大元策略中的 Nash 均衡点的稳定性作出更进一步的研究。但该文章的最大 Hausdorff 半度量并不是以往数学中定义的半度量，对半度量的研究在数学领域也有很多的看法，但还未有包含各种扰动情况的半度量来诠释更强的稳定性来更好地解决对不同扰动下同一点集稳定性的不同结论。对此点集的稳定性依然有很大的研究空间，来更完美地应用到各类对策博弈之中，找到最适合自己的策略。

基金项目

国家自然科学基金项目(71961003)；贵州省科技厅联合基金项目(黔科合 LH 字[2017]7223)；贵州大学博士基金(贵大人基合字(2019)49)。

参考文献

[1] Knaster, B., Kuratowski, K. and Mazurkiewicz, S. (1929) Ein beweis des fixpunksates furn-dimensional simplexe. *Fundamenta Mathematicae*, **14**, 132-137. https://doi.org/10.4064/fm-14-1-132-137

[2] Fang, M. and Ding, X.P. (2003) Generalized L-R-KKM Theorem in and Applications in L-Convex Space. *Journal of Sichuan Normal University*, **26**, 461-463.

[3] Ansari, Q.H., Chan, W.K. and Yang, X.Q. (2004) The System of Vector Quasi-Equilibrium Problems with Applications. *Journal of Global Optimization*, **29**, 45-57. https://doi.org/10.1023/B:JOGO.0000035018.46514.ca

[4] Ansari, Q.H., Oettli, W. and Schläger, D. (1997) A Generalization of Vector Equilibria. *Mathematical Methods of Operations Research*, **46**, 147-152. https://doi.org/10.1007/BF01217687

[5] Ansari, Q.H., Schaible, S. and Yao, J.C. (2000) System of Vector Equilibrium Problems and Their Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **107**, 547-557. https://doi.org/10.1023/A:1026495115191

[6] Blum, E. and Oettli, W. (1994) From Optimiztion and Variational Inequalities to Equilibirum Problems. *Mathematics Student-India*, **63**, 123-145.

[7] Chen, G.Y. and Craven, B.D. (1989) Approximate Dual and Approximate Vector Variational Inequality for Multi-Objective Optimization. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **47**, 418-423. https://doi.org/10.1017/S1446788700033139

[8] Chadli, O., Chiang, Y. and Yao, T.C. (2002) Equilibrium Problems with Lower and Upper Bounds. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 327-331. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(01)00139-2

[9] Gale, D. and Mas-Colell, A. (1975) An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences. *Journal of Mathematical Economics*, **2**, 9-15. https://doi.org/10.1016/0304-4068(75)90009-9

[10] Yu, J. (1999) Essential Equilibria of N-Person Non-Cooperative Game. *Math Economics*, **31**, 361-372. https://doi.org/10.1016/S0304-4068(97)00060-8

[11] Kohlberg, E. and Mertens, J.F. (1986) On the Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica*, **54**, 1003-1037. https://doi.org/10.2307/1912320

[12] Hillas, J. (1990) On the Definition of the Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica*, **58**, 1365-1390. https://doi.org/10.2307/2938320

[13] Tan, K.K., Yu, J. and Yuan, X.Z. (1995) The Stability of Ky Fan's Points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **123**, 1511-1519. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1995-1239807-8

[14] Jiang, J.H. (1962) Essential Fixed Points of the Multivalued Mappings. *Scientia Sinica*, **11**, 293-298.

[15] Tan, K.K., Yu, J. and Yuan, X.Z. (1995) The Stability of Coincident Points for Multivalued Mappings. *Nonlinear Analysis*: *Theory, Methods & Applications*, **25**, 163-168. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00223-5

[16] Yu, J. and Yang, H. (2004) The Essential Components of the Set of Equilibrium Points for Set-Valued Maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **300**, 334-342. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.06.042

[17] Yu, J. and Luo, Q. (1999) On Essential Components of the Solution Set of Generalized Games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **230**, 303-310. https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6202

[18] Yu, J. and Xiang, S.W. (1999) On Essential Component of the Set of Nash Equilibrium Points. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **38**, 259-264. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(98)00193-X

[19] Yu, J. and Xiang, S.W. (2003) The Stability of the Set of KKM Points. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **54**, 839-844. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(03)00096-8

[20] Xiang, S.W., He, J.H., *et al*. (2017) Some Further Results on the Stability of Ky Fan's Points. *Journal of Inequalities and Applications*, **2017**, Article No. 289. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1562-1

[21] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[22] 杨光惠, 向淑文. 广义最大元的通有稳定性[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2010, 28(2): 50-52.

[23] 陈治友, 夏顺友. 抽象凸空间中广义最大元的稳定性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(8): 116-118.