Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3762-3770
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312389

核心素养视角下的几何模型探究

——以“对角互补几何模型”为例

魏 娜

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月29日

摘 要

模型是关于对象的一种整体认识，模型化方法是研究数学问题的经典方法，几何模型教学在数学教学中占据非常重要的地位。本文以“对角互补几何模型”的教学为例，围绕核心素养，从旧知回顾、问题提出、模型构建、模型拓展和模型应用五个环节进行教学设计，完善教师教学过程，优化学生探究效果。

关键词

核心素养，几何模型，教学探究，模型构建，模型拓展

Exploration of Geometric Model Teaching from the Perspective of Core Literacy

—Taking the “Diagonal Complementary Geometric Model” as an Example

Na Wei

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

Models are a holistic understanding of objects, and modeling methods are classic methods for studying mathematical problems, Geometric model teaching plays a very important role in mathematics teaching. This article takes the teaching of the “Diagonal Complementary Geometry Model” as an example, focusing on core competencies, and designing teaching from five aspects: reviewing old knowledge, proposing problems, constructing models, expanding models, and ap-

文章引用: 魏娜. 核心素养视角下的几何模型探究[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3762-3770.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312389

plying models. It aims to improve the teaching process for teachers and optimize the effectiveness of student exploration.

Keywords

Core Literacy, Geometric Model, Teaching Exploration, Model Construction, Model Extension

1. 引言

2022 年数学课程标准明确提出，培养学生的核心素养，要引导学生在发现问题、提出问题的同时，会用数学的眼光观察现实世界；在分析问题的同时，会用数学的思维思考现实世界；在用数学方法解决问题的过程中，会用数学的语言表达现实世界[1]。数学课程标准在课程目标中提出，初中阶段的核心素养主要表现为：抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识和创新意识[1]。核心素养视角下的教学对教师提出了更高的标准，即教师要有钻研精神，在教学时不仅要教给学生知识，还要教会学生学习；教师要在发展学生的能力上下功夫，让学生在掌握基本知识、基本技能、基本思想和基本活动经验的过程中，形成和发展数学核心素养。

在数学教学中，几何模型教学是提升学生数学核心素养的重要途径。几何模型是在几何教学中日益系统归纳出来的，是解决几何疑难问题的有力工具。几何模型直观形象，口诀与作用简洁，既基于课本定理模型，又高于课本定理模型，是在几何问题探究中产生的，是几何思维的升华与凝结[2]。模型教学是在教师的引导下，学生根据数学问题主动构建模型，完善其形式，掌握其特征，领悟其内涵，提升模型意识，形成解题思路，解决相应的数学问题[3]。在几何模型教学中，只有学生学会了自主探究、反思和总结，才能做到“模型在手，举一反三，触类旁通”，才能更好地理解几何问题的本质，进而有效地提升学生的解题能力和思维能力，增强学生的数学核心素养[4]。

一个好的教学设计在几何模型教学中尤为重要，教师需要结合教育环境的变化、学生发展的多样性以及知识科技的更新对教学设计进行整合，从而使教学设计能有效的提高教师的教学效果和满足学生的实际需求，进而培养学生的数学核心素养。因此，本文以“对角互补几何模型”的教学设计为例，通过分析初中经典的几何例题，探究如何在几何模型教学中培养学生的数学核心素养，使学生灵活运用几何模型解题，促进其数学核心素养的发展。

2. 教学内容分析

本文是基于人教版八年级数学下册第十七章“勾股定理”和第十八章“平行四边形”的一节复习课。本节课之前学生已经学习了全等三角形和正方形的性质和判定，通过本节课的专题学习，学生能够提高三角形和正方形的综合应用能力。经研究，在近几年的各地中考中，渗透“对角互补几何模型”的试题在逐年增加，其往往会隐藏在正方形或矩形之中，让学生猝不及防。学生如果掌握了研究“对角互补几何模型”的方法，不仅可以快速的在复杂的几何图形中识别出该模型，还可以类比地学习其他重要的几何模型，使教师的几何教学达到事半功倍的效果。

3. 学生学情分析

八年级学生正处于生长发育快速期，在课堂上表现为活泼好动，具有一定的探究精神，观察、动手、猜想能力较强，但是注意力容易分散，缺乏对几何知识灵活应用的能力，绝大部分学生难从复杂的情境中分辨已学的几何图形，不能熟练地添加辅助线构造熟悉的几何图形，解决几何综合问题时总是绞尽脑汁。因此教师在教学中要引导学生抓住题目的关键特征，把较为陌生的平面图形问题转化成熟悉的简单的几何模型，并体会这一类几何问题蕴含的数学思想。

4. 教学目标分析

本节课主要教学目标如下：

1) 认识“对角互补几何模型”，能抓住其关键特征；

2) 能熟练找出“对角互补几何模型”中的全等三角形，会证明“对角互补几何模型”中的重要结论，能够在解题中熟练应用其结论；

3) 通过几何模型的自然生成过程，让学生发现模型的重要性，激发学生学习新知的好奇心，使学生感悟数形结合、类比、归纳等思想，提升学生的数学核心素养。

5. 教学重难点分析

本节课教师在教学中要抓住以下教学重点和难点。

教学重点：能熟练找出“对角互补几何模型”中的全等三角形，会证明“对角互补几何模型”中的重要结论，能够在解题中熟练应用其结论。

教学难点：能从复杂的几何图形中抓住题目的关键特征，抽象出“对角互补几何模型”，并灵活解决数学问题。

6. 教学策略分析

一节高效的复习课，不是浮于浅层的重复，也不是机械记忆，而是不断进阶的思维攀升，最终指向的是数学核心素养[5]，它需要教师在教学中不断摸索，并精心准备教学设计。教师作为学生学习过程中的引导者，需要引导学生明确复习课的学习目标，并在有限的问题中激发学生的思维能力和创造能力，提炼归纳出数学问题的解题经验与方法，只有这样，才能帮助学生进行系统性的复习，为考试做好充分的准备。本节课分为旧知回顾、问题提出、模型构建、模型拓展和模型应用五个部分，先从学生熟悉的习题出发，利用 *GeoGebra* 软件抽象出“对角互补几何模型”，再引导学生抓住“对角互补几何模型”的关键特征，探索“对角互补几何模型”中蕴含的重要结论，进而解决复杂图形中的相关问题，发展学生的几何模型思想。

7. 教学过程设计

7.1. 旧知回顾

“温故而知新，可以为师矣”。回顾旧知识不仅为了帮助学生巩固基础，更是为了使学生对新的学习做好准备。

问题 1：全等三角形的性质有哪些？判定两个三角形全等的方法有哪些？

问题 2：正方形的性质有哪些？判定四边形是正方形的方法有哪些？

预设：全等三角形的性质有 1) 全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等；2) 全等三角形的面积和周长相等。判定两个三角形全等的方法有 *SSS*，*SAS*，*AAS*，*ASA* 和 *HL*。

正方形的性质有 1) 正方形的四条边都相等，四个角都是直角；2) 正方形的对角线相等且互相垂直平分；3) 正方形被对角线分成四个等腰直角三角形。判定四边形是正方形的方法有 1) 有一组邻边相等的矩形是正方形；2) 有一个角是直角的菱形是正方形。

设计意图：通过复习全等三角形和正方形的性质和判定，为下面研究“对角互补几何模型”中用“*AAS*”和“*ASA*”证明两个三角形全等，以及证明全等之后得出“全等三角形的面积相等”的结论做铺垫。

7.2. 问题提出

美国数学家哈尔莫斯说过，“问题是数学的心脏”。问题提出有利于促进学生对知识的理解和反思，有利于发展学生的思维品质，有利于培养学生的创新能力。

问题 3：观察 *GeoGebra* 软件中的动画，探索以下问题。

如图 1，四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGO$ 是正方形，而且这两个正方形的边长相等，求证：$\Delta AMO \cong \Delta BNO$。

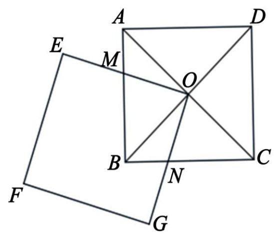

Figure 1. Question 3
图 1. 问题 3

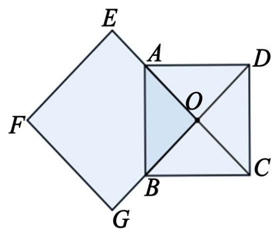

Figure 2. Question 1
图 2. 追问 1

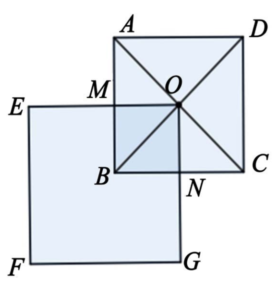

Figure 3. Question 2
图 3. 追问 2

追问 1：在运动过程中，如图 2，当 AO 与 OE 重合，BO 与 OG 重合时，ΔAMO 和 ΔBNO 全等吗？

追问 2：在运动过程中，如图 3，当 $AB \perp OE$ 于点 M，$BC \perp OG$ 于点 N，ΔAMO 和 ΔBNO 还满足全等关系吗？

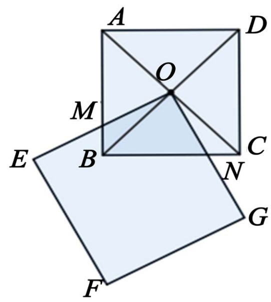

Figure 4. Question 3
图 4. 追问 3

追问 3：在运动过程中，如图 4，当 AB 与 OE 交于点 M，BC 与 OG 交于点 N，上面的结论是否成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由。

预设：1) 由于 AO 与 OE 重合，BO 与 OG 重合，易证$\Delta AMO \cong \Delta BNO$。2) 根据正方形的性质，得到$\angle OAM = \angle OBN$，$AO = BO$，由于 $AO \perp OE$，$BO \perp OG$，得$\angle AMO = \angle BNO$，利用 AAS 证得$\Delta AMO \cong \Delta BNO$。3) 根据正方形的性质，得到$\angle OAM = \angle OBN$，$AO = BO$，$\angle EOG = \angle AOB = 90^\circ$，由于$\angle AOB - \angle BOE = \angle EOG - \angle BOE$，得出$\angle AOM = \angle BON$，因此利用 ASA 证得$\Delta AMO \cong \Delta BNO$。

追问 4：满足“对角互补几何模型”的条件有哪些？你能简单说明一下吗？

预设：满足“对角互补几何模型”的条件有：1) 一个四边形；2) 一组对角互补(两个角均为 90°)。

设计意图：教师不仅利用 *GeoGebra* 软件将想象的图形变成现实，并展示出图形的变化过程，还利用追问的方式将动态的旋转问题分层设计成四个小问题，使问题由易到难、由浅入深的呈现，让学生能够主动参与，经历从旋转的特殊位置发现一般结果的过程，体会图形旋转时全等三角形始终存在，找到几何模型的特征，从而提升学生的抽象能力、空间观念、几何直观和推理能力等数学核心素养。

7.3. 模型构建

模型构建是初中几何模型教学的重要内容。一般认为，模型构建即为建立数学模型，相应地，建立数学模型的过程就是数学建模的过程[6]。

问题 4：如图 5，设正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等。求证：1) $S_{四边形OEBF} = \frac{1}{2}OB^2$；2) $OE = OF$；3) $BE + BF = \sqrt{2}OB$。

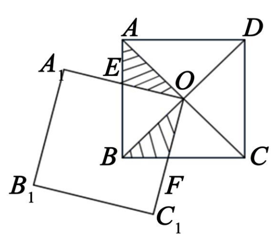

Figure 5. Question 4
图 5. 问题 4

预设：1) 利用 ASA 证明$\Delta AOE \cong \Delta BOF$，则$\Delta AOE$ 和ΔBOF 的面积相等，借助“填补法”将求四边形 $OEBF$ 的面积转化为求ΔAOB 的面积，由于正方形被对角线分成四个等腰直角三角形，所以 $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OB^2$，易得 $S_{四边形OEBF} = \frac{1}{2}OB^2$。2) 因为$\Delta AOE \cong \Delta BOF$，所以全等三角形的对应边相等，易证 OE

$= OF$。3) 因为$\Delta AOE \cong \Delta BOF$，所以 $AE = BF$，易证 $BE + BF = AB$，由于正方形的对角线相等且互相垂直平分，利用勾股定理 $AB^2 = AO^2 + BO^2$，证得 $BE + BF = \sqrt{2}OB$ 。

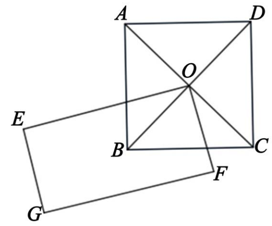

Figure 6. Question 6 (rectangle)
图 6. 追问 6 (矩形)

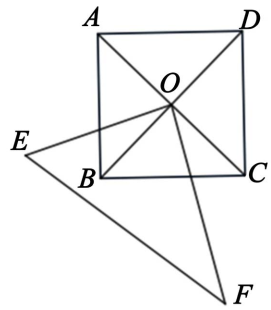

Figure 7. Question 6 (right triangle)
图 7. 追问 6 (直角三角形)

追问 5：若保持图 5 中的结论不变，其中的正方形 $A_1B_1C_1O$ 可以变成什么图形？

预设：正方形 $A_1B_1C_1O$ 可以变成矩形或者是直角三角形。

追问 6：为什么这两种情况都成立？请结合图 6、图 7 进行说明。

预设：因为矩形还保持$\angle EOF = \angle AOB = 90^\circ$且$\angle EOF + \angle ABC = 180^\circ$，任意直角三角形$\angle EOF = \angle AOB = 90^\circ$且$\angle EOF + \angle ABC = 180^\circ$也成立，这样就能由“*ASA*”推出全等三角形。

追问 7：将矩形和直角三角形改为任意的四边形和三角形可以吗？

预设：不可以，因为任意的四边形和三角形不能保证$\angle EOF = \angle AOB = 90^\circ$且$\angle EOF + \angle ABC = 180^\circ$，也就不能得到全等三角形，后面的结论自然而然就不成立。

(板书：在任意四边形中，出现一组对角互补，则为对角互补几何模型；解题思路：寻找互补角的顶点构造全等三角形)

设计意图：在习题教学中，教师引导学生构建模型后，学生对几何模型的认识并不深刻。此时教师通过追问的方式，让学生对几何模型有一个深刻的认识，让学生意识到解决该模型的关键是寻找互补角的顶点构造全等三角形，从而培育学生的空间观念、几何直观、推理能力和运算能力等数学核心素养。

7.4. 模型拓展

“授人以鱼，不如授人以渔”。在熟练运用模型的基础上，对几何模型进行拓展，可以提高学生数学思维的逻辑性和深刻性，激发学生学习几何模型的激情。

问题 5：如图 8，已知$\angle ADC = 120^\circ$，$\angle ABC = 60^\circ$，BD 平分$\angle ADC$。求证：1) $AB = AC$；2) $AD + CD = BD$；3) $S_{四边形ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}BD^2$；

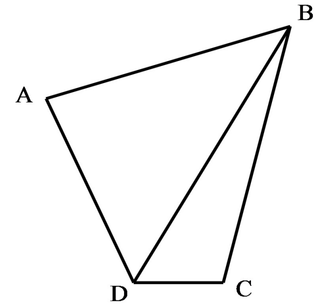

Figure 8. Question 5
图 8. 问题 5

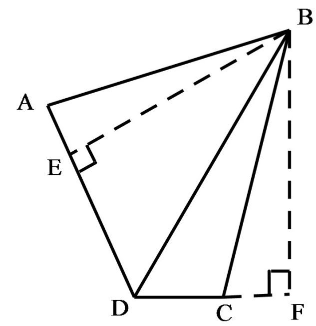

Figure 9. Question 5 (auxiliary line)
图 9. 问题 5 (辅助线)

预设：如图 9，过 B 作 BE、BF 分别垂直于 AD、CD，垂足分别为 E、F 的辅助线。1) 由角平分线的性质得 $BE = BF$；根据四边形的内角和为360°和平角的定义，易得$\angle BAD = \angle BCF$；由于 $BE\perp AD$，$BF\perp CD$，得$\angle AEB = \angle BFC$；利用 AAS 证得$\Delta ABE\cong\Delta CBE$，所以 $AB = AC$。2) 由含 30°角的直角三角形的性质得 $DE=\frac{1}{2}BD$，$DF=\frac{1}{2}BD$；利用全等三角形的对边相等，得到 $AE = CF$；所以 $AD + CD = AE + DE + CD = DE + DF = BD$。3) 利用三角形面积公式，得 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}BE\cdot AD$，$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BF\cdot CD$；由含 30°角的直角三角形的性质得 $DE=\frac{1}{2}BD$，利用勾股定理得 $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}BD$；由角平分线的性质得 $BE = BF$；所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BE\left(AD+CD\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}BD^2$。

设计意图：问题 5 虽然在问题 4 的基础上改变已知条件和求证结论，但是仍然符合“对角互补几何模型”的特征。学生需要将已知与未知联系起来构造适当的辅助线，从而拓展学生的解题思路，培养学生观察、比较和化归的能力，发展学生的空间观念、几何直观、推理能力和模型观念等数学核心素养。

7.5. 模型应用

在模型构建和模型拓展的基础上进行模型应用，对培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力大有裨益，其主要任务是引导学生应用几何模型的结论去解决数学问题。

问题 6：(2021 河池中考)如图 10，在正方形 $ABCD$ 中，$AB = 4$，点 E 在对角线 BD 上，连接 AE，过点 E 作 $EF\perp AE$，交 BC 于点 F。若 $BF = 1$，求四边形 $ABEF$ 的面积。

预设：如图 11，过 E 作 EG、EH 分别垂直于 AB、BC，垂足分别为 G、H 的辅助线，此时，利用 ASA

证得$\Delta AGE \cong \Delta FHE$，将四边形 $ABEF$ 的面积转化为求正方形 $BHEG$ 的面积。由问题 4 的结论可知，$S_{四边形ABEF}=\frac{1}{2}BE^2$， $AB+BF=\sqrt{2}BE$，易得 $S_{四边形ABEF}=\frac{25}{4}$。

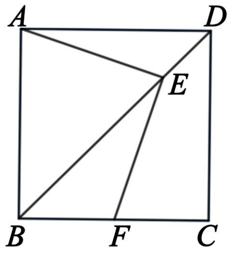

Figure 10. Question 6
图 10. 问题 6

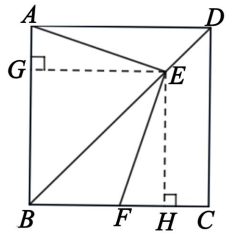

Figure 11. Question 6 (auxiliary line)
图 11. 问题 6 (辅助线)

问题 7：如图 12，设正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等，无论正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕点 O 怎样转动，两个正方形重叠部分的面积会发生变化吗？证明你的结论。

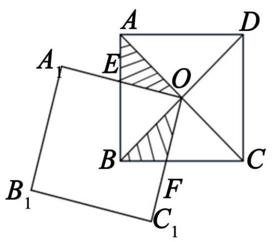

Figure 12. Question 7
图 12. 问题 7

预设：依据问题 3 的情境，易得无论正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕点 O 怎样转动，ΔAEO 与ΔBFO 始终全等，则将两个正方形重叠部分的面积转化为ΔABO 的面积，利用正方形被对角线分成四个等腰直角三角形的性质，易证两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的$\frac{1}{4}$，所以两个正方形重叠部分的面积不会发生变化。

问题 8：如图 13，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = AD$，$\angle BAD = 60^\circ$，$\angle BCD = 120^\circ$，连接 AC，若四边形 $ABCD$ 的面积为$12\sqrt{3}$，求对角线 AC 的长。

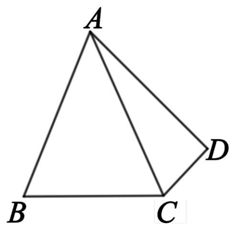

Figure 13. Question 8
图 13. 问题 8

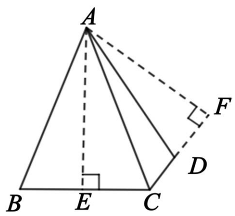

Figure 14. Question 8 (auxiliary line)
图 14. 问题 8 (辅助线)

预设：如图 14，过 A 作 AE、AF 分别垂直于 BC、CD，垂足分别为 E、F 的辅助线，此时，利用 AAS 证得$\Delta ABE \cong \Delta ADF$，将四边形 $ABEF$ 的面积转化求ΔABC 和ΔACD 的面积和。由问题 5 的结论可知，$S_{四边形ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} AC^2$，易得 $AC = 4\sqrt{3}$。

设计意图：问题 6、问题 7 和问题 8 分别源于中考真题、教材例题和练习题，均突出教学目标和重难点，既涉及到几何模型的辨认、应用和拓展，又有旋转问题引起的分类导论，题型较典型，覆盖面较广，符合学生的认知发展规律，从而提升学生的模型观念、推理能力和运算能力等数学核心素养。

8. 教学反思

史宁中教授认为，数学核心素养的形成，不是依赖单纯的课堂教学，而是依赖学生参与教学的数学活动；不是依赖记忆与理解，而是依赖感悟与思维；它应该是日积月累的、自己思考的经验的积累[7]。教师不能只关注几何模型的结果，还要让学生通过教学软件充分经历几何模型的自然发生、发展和形成的过程，体会学习几何模型的重要性和简捷性，从而降低学生的畏难情绪和激发学生的探究兴趣，促使学生在探究过程中积累基本知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，发展学生数学思维的逻辑性和深刻性，提升学生的数学核心素养。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[2] 马小飞. 基于几何模型的初中数学教学设计与反思——以一道中考题复习教学为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2020(16): 31-34.

[3] 董钦. 基于核心素养的“*V* 型函数”模型教学[J]. 数学通讯, 2023(16): 43-47.

[4] 陈涛. 例谈几何模型之“一线三等角” [J]. 数学通讯, 2023(9): 37-41.

[5] 陈元云, 邢成云. 大单元背景下初中数学复习课教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2023(5): 42-45.

[6] 刘光建. 基于“四能”的初中数学模型建构案例研究[J]. 中学数学教学参考, 2023(2): 76-78.

[7] 史宁中. 推进基于学科核心素养的教学改革[J]. 中小学管理, 2016(2): 19-21.