Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3730-3735
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312385

Hans汉斯

动力系统中*n*重回复时间集的性质研究

王雅卿*，**张思汇**#
上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年11月19日；录用日期：2023年12月20日；发布日期：2023年12月29日

摘　要

设(X,G)是一个G-系统，其中X是紧致度量空间(度量为d)，$G:X\to X$ 是连续映射。基于Furtenberg族，我们利用动力系统的复杂性和回复性，证明了对任意 $\mu\in\mathcal{M}(X,G)$，存在一个 $\mu(X_0)=1$ 的Borel子集X_0，使得对任意 $x\in X$， $d\in\mathbb{N}$ 以及x的任意邻域U，集合 $N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,x,\cdots,x),U_1\times U_2\times\cdots\times U_d\right)$ 具有正上$\mathcal{F}$-密度。

关键词

动力系统，回复时间集，Fφlner序列

The Study of *n* Recurrent Set in Dynamical System

Yaqing Wang*, **Sihui Zhang**#
College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Nov. 19th, 2023; accepted: Dec. 20th, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

Let (X,G) be a G-system, where X is the compact metric space (metric d) and $G:X\to X$ is a continuous map. Based on the Furtenberg family, we use the complexity and recurrence of the dynamical system to prove that for any $\mu\in\mathcal{M}(X,G)$, there exists an Borel subset X_0 of $\mu(X_0)=1$ such that for any $x\in X$, $d\in\mathbb{N}$ and any neighborhood U of x, the set

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 王雅卿, 张思汇. 动力系统中 *n* 重回复时间集的性质研究[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3730-3735.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312385

$N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,x,\cdots,x),U_1\times U_2\times\cdots\times U_d\right)$ **has a positive upper** $\mathcal{F}$ **-density.**

Keywords

Dynamical System, Recurrent Set, Fϕlner Sequence

1. 引言

我们首先引进回复时间点集的概念。

定义 1.1 [1]：对于一个动力系统(X,T)，设$x\in X$及$U\subset X$，令x进入U的回复时间集为：

$$N(x,U)=\left\{n\in\mathbb{Z}_+:T^n x\in U\right\}.$$

显然，如果x为回复点，那么它也是$T^n(n\in\mathbb{N})$的回复点。

2016 年，Kwietniak [2]等人在探索由 van der Waerden 定理和类似的组合问题的动态方法所产生的递归性质时，证明了：

定理 1.2 设(X,T)是一个动力系统，如果在X上存在一个弱混合的、完全T-不变的 Borel 概率度量μ，则存在一个X的 Borel 子集X_0，且$\mu(x_0)=1$，使得对于任意$x\in x_0$，$d\in\mathbb{N}$，以及X的每个非空开子集U，集合

$$N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,x,\cdots,x),U\times U\times\cdots\times U\right)$$

具有正上密度。

2020 年，陈志景，黄煜[3]等人研究了具有正上$\{F_n\}$-密度的回复点，证明了所有正上$\mathcal{F}$-密度的回复点的集合是 Borel 的，并且对于任意的$\mu\in M(X,G)$，具有满的μ-测度。

如果对于x的每一个开邻域U，存在$d\in\mathbb{N}$，使集合$N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,\cdots,x),U\times\cdots\times U\right)$具有上正的$\mathcal{F}$-密度，则称点$x\in X$具有多重回复的上正$\mathcal{F}$-密度。

基于上述研究，我们提出下述问题：

问题 1 设(X,T)是一个G-系统，μ是X上的一个弱混合的、完全T-不变的 Borel 概率度量，则存在一个X的 Borel 子集X_0，且$\mu(x_0)=1$，使得对于任意$x\in x_0$，$d\in\mathbb{N}$，以及X的每个非空开子集$U_1,U_2,\cdots,U_d$，集合

$$N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,x,\cdots,x),U_1\times U_2\times\cdots\times U_d\right)$$

具有正上$\mathcal{F}$-密度。

2. 定义与符号

下面介绍一些基本的符号和定义。

2.1. *G*-系统

G-系统(X,G)意味着X是紧致度量空间，G是可数离散无限可服从群，$\Gamma:G\times X\to X$，$(g,x)\to gx$

是满足以下条件的连续映射：

$\Gamma(e,x)=x$，对任意的 $x\in X$，其中 e 是 G 的单位元。

$\Gamma(g_1,\Gamma(g_2))=\Gamma(g_1g_2,x)$，对任意的 $g_1,g_2\in G$，$x\in X$

设 (X,G) 是一个 G-系统，且 $x\in X$，对于子集 $F\subset G$，用 F-orbit 表示 X 的轨道：

$$Fx:=\{gx:g\in F\}.$$

设 $U\subset X$，定义 x 的回复时间集为

$$N(x,U):=\{g\in G:gx\in U\}.$$

如果对于 x 的任意开邻域 U，集合 $N(x,U)$ 是无穷的，则点 $x\in X$ 称为回复点。如果对于 y 的每一个开邻域 U，$N(x,U)$ 是无穷的，则点 $y\in X$ 称为 x 的 ω 极限点。X 的所有 ω 极限点的集合称为 X 的 ω-极限集，用 $\omega_G(x)$ 表示。如果存在一个点 $y\in X$，使得 y 的 ω-极限集在 X 中是稠密的，则称系统 (X,G) 为可传递的，这样的点称为可传递点。

设 $(G,\cdot)$ 是紧致度量空间 (X,G) 上的可数离散无限可服从群，(X,G) 是紧度量空间 (X,d) 上的拓扑动力系统(简称 G-系统)。对于任意点 $x\in X$，我们称 $Gx=\{gx:g\in G\}$ 为 x 在 G 作用下的轨道。如果 $gx\in\Lambda$，对任意 $x\in\Lambda$ 和 $g\in G$，我们将 X 的任意子集 Λ 称为 G-不变集。在动力系统理论中，我们经常需要处理轨道 Gx 在 X 的给定区域 E 停留的概率。这促使我们考虑 (X,G) 中的各种密度。

2.2. Fϕlner 序列

G 的一个有限子集的序列 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 被称为 G 中的(左) Fϕlner 序列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|gF_n\Delta F_n|}{|F_n|}=0,\quad \forall g\in G,$$

其中 $|\bullet|$ 是 G 上的计数测度。显然，Fϕlner 序列的每个子序列 $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 也是 G 中的 Fϕlner 序列。众所周知，只要 G 是可服从的，就会存在 Fϕlner 序列[4]。

对于给定的 Fϕlner 序列 $\mathcal{F}:=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$，在 G 和一个子集 $A\subseteq G$ 中，A 相对于 $\mathcal{F}$ 的上、下密度分别由

$$\bar{d}_{\mathcal{F}}(A)=\limsup_{n\to\infty}\frac{|A\cap F_n|}{|F_n|} \text{ 和 } \underline{d}_{\mathcal{F}}(A)=\liminf_{n\to\infty}\frac{|A\cap F_n|}{|F_n|}$$

定义。

如果 $\bar{d}_{\mathcal{F}}(A)=\underline{d}_{\mathcal{F}}(A)$，那么我们称这个值为 A 相对于 $\mathcal{F}$ 的密度。

现在，对于一个子集 $E\subseteq X$ 和一个 Fϕlner 序列 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$，轨道 Gx 在 $E(X)$ 中停留的概率可以用以下量来描述：

$$\bar{d}_{\mathcal{F}}(A)=(\{g\in G:gx\in E\})$$

$$\underline{d}_{\mathcal{F}}(A)=(\{g\in G:gx\in E\})$$

或者

$$d_{\mathcal{F}}(A)=(\{g\in G:gx\in E\})$$

当 $d_{\mathcal{F}}$-密度存在时。这促使我们考虑 G-系统的以下概念：$\mathbb{R}$-actions [5]、$\mathbb{R}_+$-actions [6]和 C^0-semiflow [7]。

定义 2.1 对于 Fϕlner 序列 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$，对于 x 的每一个开邻域

U，$\bar{d}_{\mathcal{F}}(A)=(\{g\in G:gx\in U\})>0$，点 $x\in X$ 是循环的且上 $\mathcal{F}$-密度为正；如果对于 x 的每一个开邻域 U，$\underline{d}_{\mathcal{F}}(A)=(\{g\in G:gx\in U\})>0$，点 $x\in X$ 是循环的且下 $\mathcal{F}$-密度为正。

根据 G-系统的逐点遍历定理[8]，不难看出，在遍历理论中存在“许多”点，其上 $\mathcal{F}$ 密度为正，其中 Fϕlner 序列 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 Shulman's 条件[8]：

$\left|\bigcup_{k<n}F_k^{-1}F_n\right|\le C|F_n|$，对某些 $C>0$ 以及任意 $n\in\mathbb{N}$。

我们利用平均遍历定理证明了这一性质对任何不存在 Shulman's 条件的 Fϕlner 序列都成立，并描述了具有正上 $\mathcal{F}$-密度的循环点集合的拓扑“大小”如下：

定理 2.1 所有上 $\mathcal{F}$ 密度为正的循环点的集合是 Borel 的，并且对于任意的 $\mu\in\mathcal{M}(X,G)$ 具有满 μ 测度。

在一定的合理条件下，从拓扑学的角度来看，上 $\mathcal{F}$-密度为正的循环点集很大。

定理 2.2 如果存在一个完全支持的遍历 G-不变测度 (X,G)，则所有上 $\mathcal{F}$-密度为正的循环点的集合为残差。

定理 2.3 (G-系统的 sigmund 猜想) 设 $\{F_n\}$ 是 G 的一个双边 Fϕlner 序列。如果存在一个 $x\in X$，满足性质(*) $\bar{d}_{\mathcal{F}}=(\{g\in G:gx\in U\})>0$，对于任意 $y\in X$ 和 y 的开邻域 U，则所有具有性质(*)的点的集合在 X 上是残差。

定义 2.4 对于 G 中的 $x\in X$ 和 Fϕlner 序列 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果对任意 $\varepsilon>0$，有 $d_{\mathcal{F}}(\{g\in G:gx\in B(C,\varepsilon)\})=1$，则 X 的闭子集 C 称为 x 的 $\mathcal{F}$-吸引中心。如果集合 C 不存在任何固有子集，它同样是 x 的 $\mathcal{F}$-吸引中心，则 C 称为 x 的最小 $\mathcal{F}$-吸引中心，并写为 $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}(x)$。这里 $B(C,\varepsilon)$ 表示 X 中 C 周围的 ε-邻域。

最近几年关于动力系统的研究，主要参考文献[1] [6] [9] [10] [11] [12] [13]。

3. 定理与证明

定理 3: 设 (X,G) 是一个拓扑动力系统，对任意 $\mu\in\mathcal{M}(X,G)$，存在一个 $\mu(X_0)=1$ 的 Borel 子集 X_0，使得对任意 $x\in X$，$d\in\mathbb{N}$ 以及 x 的任意邻域 U，集合

$$N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,x,\cdots,x),U_1\times U_2\times\cdots\times U_d\right)$$

具有正上 $\mathcal{F}$-密度。

证明：对任意 $t>0$，$d,k,n,m\in\mathbb{N}$，设 $A_{d,k}(t,n,m)$ 为所有点 $x\in X$ 的集合，使得存在一个 x 的开邻域 U，且 $diam(U)<\frac{1}{k}$，满足

$$\frac{\left|F_n\cap N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,\cdots,x),U\times\cdots\times U\right)\right|}{|F_n|}>t-\frac{1}{m}.$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$，设

$$A_{d,k}(t,n,m)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_{d,k}\left(\frac{1}{i},n,m\right)$$

则在交点 X_0 上具有正 $\mathcal{F}$-密度的多回复点的集合，因此它是 Borel 集合，因为每个 $A_k(t,n,m)$ 都是 X 的开子集。

通过遍历分解定理，我们只需要证明遍历测度的结果成立。设 $\mu\in\mathcal{M}(X,G)$，我们假定每个 $A_{d,k}$ 都有满 μ 测度。相反，假设对于某些 $k\in\mathbb{N}$，$A_{d,k}<1$，则我们可以选择一个 $diam(D)<\frac{1}{3k}$ 且 $\mu(D)>0$ Borel 子集 $D\subset X\setminus A_k$。对于任意 $x\in X$，令

$$\varphi(x)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in F_n}1_{D\cap G^{-i}\cap\cdots\cap G^{-id}D}(x),$$

则对于任意 $x\in X$ ， ϕ 也是 Borel 可测的，且 $0\le\phi(x)\le 1$。

利用平均遍历定理，得到 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\frac{1}{|F_{n_k}|}\sum_{g\in F_{n_k}}1_{D\cap G^{-i}\cap\cdots\cap G^{-id}D}(x)\to\mu(x),$$

在 L^2-norm $\|\bullet\|$， $L^2(X.\mathcal{B}(X),\mu)$， $k\to\infty$。因此，根据法图引理，有

$$\begin{aligned}\int_D\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)&\ge\limsup_{n\to\infty}\int_D\frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in F_n}1_{D\cap G^{-i}D\cap\cdots\cap G^{-id}D}(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\limsup_{n\to\infty}\left\langle\frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in F_n}1_{D\cap G^{-i}\cap\cdots\cap G^{-id}D}(x),1_D\right\rangle\\&\ge\lim_{n\to\infty}\left\langle\frac{1}{|F_n|}\sum_{g\in F_n}1_{D\cap G^{-i}\cap\cdots\cap G^{-id}D}(x),1_D\right\rangle\\&=\mu(D)^2>0\end{aligned}$$

显然，对于任意 $X\notin B$， $\varphi(x)=0$ ，因此存在某个 $x\in B$，使得 $\varphi(x)>0$ 。令

$$U=B\left(x,\frac{2}{3k}\right):=\left\{y\in X:d(x,y)<\frac{2}{3k}\right\},$$

则 $D\subset U$ ， $N_{T\times T^2\times\cdots\times T^d}\left((x,\cdots,x),U\times\cdots\times U\right)$ 的上 $\mathcal{F}$ -密度不小于 $\varphi(x)$ 。

我们得到 $x\in A_{d,k}$， 矛盾！

因此对于每一个遍历测度 μ， $d,k\in\mathbb{N}$， $\mu(A_{d,k})=1$。令

$$X_0=\bigcap_{d=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{d,k}$$

则对于每一个遍历测度 $\mu(X_0)=1$，通过遍历分解同样成立。

因此 X_0 是需要的。

参考文献

[1] Einsiedler, M. and Ward, T. (2010) Ergodic Theory: With a View towards Number Theory. *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 259, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-021-2

[2] Dominik, K., Li, J., Oprocha, P. and Ye, X. (2016) Multi-Recurrenve and van der Waerden System. *Science China (Mathematics)*, **60**, 59-82.

[3] Chen, Z., Huang, Y. and Liu, X. (2020) Recurrence and the Minimal Center of Attraction with Respect to a Følner Sequence. *Topology and Its Applications*, **275**, Article 107156. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107156

[4] Greschonig, G. and Schmidt, K. (2000) Ergodic Decomposition of Quasi-Invariant Probability Measures. *Colloquium Mathematicum*, **84**, 495-514. https://doi.org/10.4064/cm-84/85-2-495-514

[5] Huang, Y. and Zhou, Z. (2012) Two New Recurrent Levels for C^0-Flows. *Acta Applicandae Mathematicae*, **118**, 125-145. https://doi.org/10.1007/s10440-012-9681-7

[6] Dai, X. (2016) On Chaotic Minimal Center of Attraction of a Lagrange Stable Motion for Topological Semi Flows. *Journal of Differential Equations*, **260**, 4393-4409. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.11.019

[7] del Junco, A. and Rosenblatt, J. (1979) Counterexamples in Ergodic Theory and Number Theory. *Mathematische Annalen*, **245**, 185-197. https://doi.org/10.1007/BF01673506

[8] Sigmund, K. (1977) On Minimal Centers of Attraction and Generic Points. *Journal für die reine und angewandte Ma-*

thematik, **295**, 72-79. https://doi.org/10.1515/crll.1977.295.72

[9] Hilmy, H.F. (1936) Sur les centres d'attraction minimaux des systèmes dynamiques. *Compositio Mathematica*, **3**, 227-238.

[10] Lindenstrauss, E. (2001) Pointwise Theorems for Amenable Groups. *Inventiones Mathematicae*, **146**, 259-295. https://doi.org/10.1007/s002220100162

[11] Hindman, N. and Strauss, D. (2006) Density in Arbitrary Semigroups. *Semigroup Forum*, **73**, 273-300. https://doi.org/10.1007/s00233-006-0622-5

[12] Tian, X. (2016) Different Asymptotic Behaviour versus Same Dynamical Complexity: Recurrence and Regularity. *Advances in Mathematics*, **288**, 464-526. https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.11.006

[13] Chen, Z. and Dai, X. (2017) Chaotic Dynamics of Minimal Center of Attraction of Discrete Amenable Group Actions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **456**, 1397-1414. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.07.053