

利用Fejér单调性的两个算子和的收敛性定理

洪嘉聪

云南财经大学统计与数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2023年12月2日; 录用日期: 2024年1月3日; 发布日期: 2024年1月11日

摘要

本文研究了实Hilbert空间中的一类变分包含问题, 并给出了该问题解的一个充要条件。通过利用Fejér单调性证明了在给定条件下迭代序列的弱收敛性, 以及阴影序列的强收敛性, 同时我们得到了该阴影序列强收敛到原变分包含问题的解。

关键词

预解式, Fejér单调性, 包含问题, 强收敛, 弱收敛

Convergence Theorem for the Sum of Two Operators via Fejér Monotonicity

Jiacong Hong

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Dec. 2nd, 2023; accepted: Jan. 3rd, 2024; published: Jan. 11th, 2024

Abstract

In this paper, we study a class of variational inclusion problem in real Hilbert space and give a necessary and sufficient condition for the solution of this problem. Via the Fejér monotonicity, we prove weak convergence of the iterative sequences and strong convergence of the shadow sequences under given conditions. Moreover, we get that the shadow sequences converge strongly to the solution of the original variational inclusion problem.

Keywords

Resolvent, Fejér Monotonicity, Inclusion Problems, Strong Convergence, Weak Convergence



1. 引言

自 1960 年起, Browder 和 Lions 等人提出并创立了变分不等式后, 变分不等式理论就开始不断发展并逐渐壮大了起来, 后期也成了数学的一个独立分支. 1966 年, Hartman 和 Stampacchia 等人首次提出了著名的 Hartman-Stampacchia 变分不等式, 即:

设 K 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭凸集, $A: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一连续映像,

$$\text{求 } u \in K \text{ 使得 } \langle Au, v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K.$$

近年来, 随着变分不等式理论的发展, 变分不等式问题已经广泛应用于微分方程、最优化理论、运筹学与控制论等诸多学科中[1] [2]. 上述 Hartman-Stampacchia 变分不等式可以转化为如下相应的变分包含问题:

$$\text{求 } u \in K \text{ 使得 } 0 \in Au + N_K u,$$

其中 $N_K u = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K\}$ 是在 $u \in K$ 处的法锥.

变分包含问题作为变分不等式问题最为重要的一个推广, 自提出后就受到广大学者的高度关注. 同时, 国内外大量数学研究人员针对变分包含问题给出了不同的研究方法技巧, 这不仅极大发展了对变分包含问题的研究, 也使得变分包含问题的其它相关内容变得更加丰富. 其中涉及寻找两个集值算子和的零点的变分包含问题在变分分析和优化的各个领域发挥着重要的作用. 例如, 在某些约束条件下, 经典的最小化两个凸函数的和的优化问题可以转化为寻找这些函数的次微分算子和的零的问题. 一种比较流行且非常有效的求解变分包含问题的算法是 Douglas-Rachford 分裂算法(简称 DR 算法).

DR 算法最初是由 Douglas 和 Rachford [3] 在 1956 年提出的, 用于数值求解热传导中产生的线性方程组. Lions 和 Mercier [4] 在 1979 年做出了开创性工作, 证明了 DR 序列对不动点的弱收敛性, 具体来说, 就是将 DR 算法推广到了求两个极大单调算子和的零点的的问题.

在最近的几年里, DR 算法得到了迅速的发展. 2016 年, Bauschke 等人在文献[5]中得到, 如果一个集合是仿射子空间, 则整个阴影序列是弱收敛的. 并将 Spingarn 的一个结果从半空间推广到允许最小二乘解的一般闭凸集. 2017 年, 在[6]中提供了在凸可行性的设定中完全弱收敛的完整证明, 并给出了一个一般情况下弱收敛的更一般的充分条件. 2018 年, Dao 和 Phan 在[7]中提出了一种自适应的 DR 算法, 在适当的条件下该算法全局收敛到不动点. 其它关于 DR 算法更详细的介绍见[8] [9] [10].

本文主要研究如下变分包含问题:

$$\text{求 } x \in H \text{ 使得 } 0 \in Ax + Bx,$$

其中 $A, B: H \rightarrow 2^H$ 都是集值算子, H 是实 Hilbert 空间. Hilbert 空间可以理解为欧氏空间的无限维推广, 其不局限于有限维的情况. 实 Hilbert 空间, 即实数域上的 Hilbert 空间.

我们基于 DR 算子定义了一个新算子, 并通过建立该算子的不动点与原包含问题解的关系, 给出了求该变分包含问题解的方法以及解存在且唯一的充要条件. 最后我们结合了序列的 Fejér 单调性及其相关性质, 给出了我们的收敛性结果.

2. 预备知识

在本篇文章中, 设 H 是一个带有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的实 Hilbert 空间. \mathbb{N} 表示非负整数集, \mathbb{R} 表示

实数集, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ 表示非负实数集, $\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ 表示正实数集。用符号 $A: H \rightarrow 2^H$ 表示 A 是 H 中的集值算子, $A: H \rightarrow H$ 表示 A 是 H 中的单值算子。

设 A 是 H 中的一个算子, 用 $\text{dom } A := \{x \in H | Ax \neq \emptyset\}$ 表示 A 的有效域, $\text{gra } A := \{(x, u) \in H \times H | u \in Ax\}$ 表示 A 的图, $\text{Fix } A := \{x \in H | x \in Ax\}$ 表示 A 的不动点集。用 A^{-1} 表示 A 的逆, 且它的图为 $\text{gra } A^{-1} := \{(u, x) \in H \times H | u \in Ax\}$ 。 A 的零点集为 $\text{zer } A := A^{-1}(0) = \{x \in H | 0 \in Ax\}$ 。

定义 2.1 称算子 $A: H \rightarrow H$

i) 是 *Lipschitz* 连续的, 如果存在常数 $k \in \mathbb{R}_+$ 使得

$$\forall x, y \in \text{dom } A, \quad \|Ax - Ay\| \leq k \|x - y\|.$$

ii) 是非扩张的, 如果它是 *Lipschitz* 连续的且常数为 1, 即满足

$$\forall x, y \in \text{dom } A, \quad \|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|.$$

iii) 是拟非扩张的, 如果满足

$$\forall x \in \text{dom } A, y \in \text{Fix } A, \quad \|Ax - y\| \leq \|x - y\|.$$

定义 2.2 算子 $A: H \rightarrow 2^H$ 的预解式定义如下:

$$J_A := (I + A)^{-1},$$

其中 I 是恒等算子。我们定义 $A: H \rightarrow 2^H$ 的松弛修正预解式为:

$$J_A^{\lambda, m} := (1 - \lambda)I + \lambda m J_A, \quad \lambda, m \in \mathbb{R}_+.$$

引理 2.3 [10] 设 $x, y \in H$, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\|ax + by\|^2 = a(a+b)\|x\|^2 + b(a+b)\|y\|^2 - ab\|x - y\|^2,$$

且等价于

$$a\|x\|^2 + b\|y\|^2 = \frac{ab}{a+b}\|x - y\|^2 + \frac{1}{a+b}\|ax + by\|^2, \quad (a+b \neq 0).$$

定义 2.4 设 C 是 H 中的非空子集, $\{x_i\}$ 是 H 中的序列。则 $\{x_i\}$ 关于 C 是 *Fejér* 单调的, 如果满足

$$\forall x \in C, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|x_{i+1} - x\| \leq \|x_i - x\|.$$

引理 2.5 [10] 设 C 是 H 中的非空子集, $\{x_i\}$ 是 H 中的序列。假设 $\{x_i\}$ 关于 C 是 *Fejér* 单调的, 则 $\{x_i\}$ 是有界的。

引理 2.6 [10] 设 C 是 H 中的非空子集, $\{x_i\}$ 是 H 中的序列。假设 $\{x_i\}$ 关于 C 是 *Fejér* 单调的, $\{x_i\}$ 的每一个序列弱聚点都属于 C 。则 $\{x_i\}$ 弱收敛到 C 中的一个点。

引理 2.7 [10] 设 D 是 H 中的非空闭凸子集, $T: D \rightarrow H$ 是非扩张的。设 $\{x_i\}$ 是 D 中的序列, $x \in D$ 。假设 $x_i \rightarrow x, x_i - Tx_i \rightarrow 0$, 则 $x \in \text{Fix } T$ 。

引理 2.8 [10] 设 $\{x_i\}$ 是 H 中的序列, 则 $\{x_i\}$ 弱收敛当且仅当它是有界的且最多有一个序列弱聚点。

3. 主要结果

在本节中, 设 $A, B: H \rightarrow 2^H$ 都是集值算子, 且 B 是正齐次算子。 $(\gamma, \delta, \lambda, \mu, m, n) \in \mathbb{R}_{++}^6$, 且 $\eta \in (0, 1)$ 。定义

$$F_A := J_{\gamma A}^{\lambda, m} := (1 - \lambda)I + \lambda m J_{\gamma A},$$

$$F_B := J_{\delta B}^{\mu, n} := (1 - \mu)I + \mu n J_{\delta B}.$$

并考虑修正的自适应 DR 算子

$$T := (1 - \eta)I + \eta F_B F_A.$$

给定初始点 $x_0 \in H$ ，通过该修正的自适应 DR 算法

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x_{i+1} \in T x_i$$

生成的序列 $\{x_i\}$ 我们也称为 DR 序列。为了得到我们的结果，首先给出以下关键性假设：

关键性假设 假设下列条件成立：

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)(\mu - 1) &= 1, \\ \delta &= (\lambda - 1)\gamma \cdot \frac{n}{m}, \\ m &= \frac{n}{n\lambda - 1}(\lambda - 1). \end{aligned} \tag{1}$$

为了得到原变分包含问题的解，我们结合关键性假设以及新算子的定义，给出了下面的一个引理。

引理 3.1 下列结论成立：

- i) $I - T = \eta(I - F_B F_A)$ 。
- ii) 假设 $(\lambda - 1)(\mu - 1) = 1$ ，则对 $\forall x \in \text{dom } T$ ，

$$(I - T)x = \left\{ \eta \mu \left[mh - n J_{\delta B} \left((1 - \lambda)x + \lambda mh \right) \right] \mid h \in J_{\gamma A} \right\}.$$

因此，如果 $J_{\gamma A}$ 是单值的，那么 $I - T = \eta \mu (m J_{\gamma A} - n J_{\delta B} F_A)$ 。

- iii) 假设(1)成立，则 $\text{Fix } T \neq \emptyset$ 当且仅当 $\text{zer}(A + B) \neq \emptyset$ 。此外，如果 $J_{\gamma A}$ 是单值的，那么

$$J_{\gamma A}(\text{Fix } T) = \text{zer}(A + B).$$

证明：i) 由算子 T 的定义可知

$$I - T = I - ((1 - \eta)I + \eta F_B F_A) = \eta(I - F_B F_A).$$

- ii) 由于 $(\lambda - 1)(\mu - 1) = 1$ ，故 $\mu = \lambda(\mu - 1)$ 。任取 $x \in \text{dom } T$ ，则

$$\begin{aligned} (I - F_B F_A)x &= \left\{ x - F_B \left((1 - \lambda)x + \lambda mh \right) \mid h \in J_{\gamma A} x \right\} \\ &= \left\{ x - \left((1 - \mu)I + \mu n J_{\delta B} \right) \left((1 - \lambda)x + \lambda mh \right) \mid h \in J_{\gamma A} x \right\} \\ &= \left\{ \mu mh - \mu n J_{\delta B} \left((1 - \lambda)x + \lambda mh \right) \mid h \in J_{\gamma A} x \right\} \\ &= \left\{ \mu \left[mh - n J_{\delta B} \left((1 - \lambda)x + \lambda mh \right) \right] \mid h \in J_{\gamma A} x \right\}. \end{aligned}$$

因此，

$$(I - T)x = \left\{ \eta \mu \left[mh - n J_{\delta B} \left((1 - \lambda)x + \lambda mh \right) \right] \mid h \in J_{\gamma A} x \right\}.$$

所以，如果 $J_{\gamma A}$ 是单值的，那么有 $I - T = \eta \mu (m J_{\gamma A} - n J_{\delta B} F_A)$ 。

- iii) 由结论 ii) 和关键性假设(1)成立，我们有

$$\begin{aligned}
x \in \text{Fix } T &\Leftrightarrow 0 \in (I - T)x \\
&\Leftrightarrow \exists h \in J_{\gamma A}x, \quad mh \in nJ_{\delta B}((1 - \lambda)x + \lambda mh) \\
&\Leftrightarrow \exists h \in J_{\gamma A}x, \quad (1 - \lambda)x + \lambda mh \in (I + \delta B)\left(\frac{m}{n}h\right) \\
&\Leftrightarrow \exists h \in J_{\gamma A}x, \quad -(\lambda - 1)x + (n\lambda - 1)\frac{m}{n}h \in \delta B\left(\frac{m}{n}h\right) \\
&\Leftrightarrow \exists h \in H, \quad x - h \in \gamma Ah, \quad -x + h \in \gamma Bh \\
&\Leftrightarrow \exists h \in J_{\gamma A}x, \quad 0 \in \gamma Ah + \gamma Bh \\
&\Leftrightarrow \exists h \in J_{\gamma A}x \cap \text{zer}(A + B).
\end{aligned}$$

因此, $\text{Fix } T \neq \emptyset$ 当且仅当 $\text{zer}(A + B) \neq \emptyset$ 。并且, 如果 $J_{\gamma A}$ 是单值的, 那么有

$$J_{\gamma A}(\text{Fix } T) = \text{zer}(A + B).$$

证毕。

该引理给出了原包含问题的解存在的充要条件, 并给出了求原问题解的方法, 即, 通过利用新算子的不动点, 我们就可以找到原问题的解。因此, 我们的分析将主要围绕着在关键性假设条件下收敛到不动点的问题展开。

由于 *Fejér* 单调性的概念是研究各种迭代方法的中心, 特别是在非扩张算子的不动点的构造方面。下面我们给出一个例子简要说明 *Fejér* 单调性与不动点之间的联系。同时该例子也与我们主要结果的证明紧密相连。

设 C 是 H 中的非空子集, $T: C \rightarrow C$ 是拟非扩张映射使得 $\text{Fix } T \neq \emptyset$ 。给点初始点 $x_0 \in C$, 设

$$x_{i+1} = Tx_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

则 $\{x_i\}$ 关于 $\text{Fix } T$ 是 *Fejér* 单调的。

最后给出我们的主要结果。

定理 3.2 设 $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$\left\{ r_2 = r_3 = 0, r_1 > 0 \right\} \text{ 和 } \left\{ r_2 + r_3 > 0, r_1 + \frac{r_2 r_3}{\eta^2 \mu^2 (r_2 + r_3)} > 0 \right\}$$

之一成立。假设 $(\lambda - 1)(\mu - 1) = 1$, $J_{\gamma A}$ 和 $J_{\delta B}$ 都是单值的, $\text{Fix } T \neq \emptyset$ 且对 $\forall x \in \text{dom } T, y \in \text{Fix } T$,

$$\|Tx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - r_1 \|(I - T)x\|^2 - r_2 \|mJ_{\gamma A}x - mJ_{\gamma A}y\|^2 - r_3 \|nJ_{\delta B}F_Ax - nJ_{\delta B}F_Ay\|^2. \quad (2)$$

设 $\{x_i\} \subset \text{dom } T$ 是由 T 生成的 *DR* 序列, 则 $\{x_i\}$ 弱收敛到点 $\bar{x} \in \text{Fix } T$ 。

此外, 下列结论成立:

i) 如果 $r_2 + r_3 > 0$, 则序列 $\{J_{\gamma A}x_i\}$ 和 $\left\{\frac{n}{m}J_{\delta B}F_Ax_i\right\}$ 强收敛到 $J_{\gamma A}\bar{x}$, 且

$$J_{\gamma A}(\text{Fix } T) = \frac{n}{m}J_{\delta B}F_A(\text{Fix } T) = \{J_{\gamma A}\bar{x}\}.$$

ii) 如果 T 是非扩张的, 则 T 的渐进正则率为 $o\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)$, 即

$$\|(I - T)x_i\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right), \quad i \rightarrow \infty.$$

iii) 如果对 $\forall x, y \in \text{dom } T$,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - r_1 \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 - r_2 \|mJ_{\gamma_A}x - mJ_{\gamma_A}y\|^2 - r_3 \|nJ_{\delta_B}F_Ax - nJ_{\delta_B}F_Ay\|^2. \quad (3)$$

那么 $\forall x \in \text{dom } T, y \in \text{Fix } T$, (2)成立, 且 T 是非扩张的。

证明: 令

$$r'_2 := \begin{cases} \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}, & r_2 + r_3 > 0 \\ 0, & r_2 = r_3 = 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad r'_3 := \begin{cases} \frac{1}{r_2 + r_3}, & r_2 + r_3 > 0 \\ 0, & r_2 = r_3 = 0 \end{cases}$$

则我们可以得到

$$r_1 + \frac{r'_2}{\eta^2 \mu^2} > 0 \quad \text{且} \quad r'_3 \geq 0. \quad (4)$$

由引理 2.3 和引理 3.1 ii), 对 $\forall x, y \in \text{dom } T$,

$$\begin{aligned} & r_2 \|mJ_{\gamma_A}x - mJ_{\gamma_A}y\|^2 + r_3 \|nJ_{\delta_B}F_Ax - nJ_{\delta_B}F_Ay\|^2 \\ &= r'_2 \|(mJ_{\gamma_A} - nJ_{\delta_B}F_A)x - (mJ_{\gamma_A} - nJ_{\delta_B}F_A)y\|^2 + r'_3 \|r_2(mJ_{\gamma_A}x - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax - nJ_{\delta_B}F_Ay)\|^2 \\ &= \frac{r'_2}{\eta^2 \mu^2} \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 + r'_3 \|r_2(mJ_{\gamma_A}x - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax - nJ_{\delta_B}F_Ay)\|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

此时, 对 $\forall x \in \text{dom } T, y \in \text{Fix } T$,

$$\|Tx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \left(r_1 + \frac{r'_2}{\eta^2 \mu^2}\right) \|(I - T)x\|^2 - r'_3 \|r_2(mJ_{\gamma_A}x - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax - nJ_{\delta_B}F_Ay)\|^2.$$

因此, $\forall y \in \text{Fix } T, i \in \mathbb{N}$,

$$\|Tx_i - y\|^2 \leq \|x_i - y\|^2 - \left(r_1 + \frac{r'_2}{\eta^2 \mu^2}\right) \|(I - T)x_i\|^2 - r'_3 \|r_2(mJ_{\gamma_A}x_i - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax_i - nJ_{\delta_B}F_Ay)\|^2.$$

由(4)可得

$$\|Tx_i - y\|^2 \leq \|x_i - y\|^2,$$

于是有

$$\|Tx_i - y\| \leq \|x_i - y\|.$$

故 $\{x_i\}$ 关于 $\text{Fix } T$ 是 *Fejér* 单调的, 且根据引理 2.5 因此是有界的。

因此, 对 $\forall y \in \text{Fix } T$,

$$\begin{aligned} & \left(r_1 + \frac{r'_2}{\eta^2 \mu^2}\right) \sum_{i=0}^{+\infty} \|(I - T)x_i\|^2 + r'_3 \sum_{i=0}^{+\infty} \|r_2(mJ_{\gamma_A}x_i - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax_i - nJ_{\delta_B}F_Ay)\|^2 \\ & \leq \|x_0 - y\|^2 < +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

所以

$$(I - T)x_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty.$$

令 x' 是 x_i 的一个弱聚点, 则存在 $\{x_i\}$ 的一个子列 $\{x_{s_i}\}$ 使得

$$x_{s_i} \rightharpoonup x'.$$

由引理 2.7 得 $x' \in \text{Fix } T$ 。再根据引理 2.6 可得 $\{x_i\}$ 弱收敛到点 $\bar{x} \in \text{Fix } T$ 。

i) 如果 $r_2 + r_3 > 0$ ，则 $r'_3 = \frac{1}{r_2 + r_3} > 0$ ，并且由(6)可得，对 $\forall y \in \text{Fix } T$ ，

$$r_2(mJ_{\gamma_A}x_i - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax_i - nJ_{\delta_B}F_Ay) \rightarrow 0. \quad (7)$$

由于 $I - T = \eta\mu(mJ_{\gamma_A} - nJ_{\delta_B}F_A)$ ，则对 $\forall y \in \text{Fix } T$ ，

$$\begin{aligned} & (mJ_{\gamma_A}x_i - mJ_{\gamma_A}y) - (nJ_{\delta_B}F_Ax_i - nJ_{\delta_B}F_Ay) \\ &= \frac{1}{\eta\mu}((I - T)x_i - (I - T)y) = \frac{1}{\eta\mu}(I - T)x_i \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (8)$$

通过结合(7)和(8)，我们有

$$\begin{aligned} J_{\gamma_A}x_i &\rightarrow J_{\gamma_A}y, \\ \frac{n}{m}J_{\delta_B}F_Ax_i &\rightarrow \frac{n}{m}J_{\delta_B}F_Ay. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} J_{\gamma_A}x_i &\rightarrow J_{\gamma_A}\bar{x}, \\ \frac{n}{m}J_{\delta_B}F_Ax_i &\rightarrow J_{\gamma_A}\bar{x}. \end{aligned}$$

这也意味着

$$J_{\gamma_A}(\text{Fix } T) = \frac{n}{m}J_{\delta_B}F_A(\text{Fix } T) = \{J_{\gamma_A}\bar{x}\}.$$

ii) 由于 T 是非扩张的，因此对 $i \in \mathbb{N}$ ，

$$\|(I - T)x_{i+1}\| = \|Tx_i - Tx_{i+1}\| \leq \|x_i - x_{i+1}\| \leq \|(I - T)x_i\|.$$

于是我们有

$$\frac{i}{2} \|(I - T)x_i\|^2 \leq \sum_{s=\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \|(I - T)x_s\|^2 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty,$$

其中 $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ 是不超过 $\frac{i}{2}$ 的最大整数。因此

$$\|(I - T)x_i\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right), \quad i \rightarrow \infty.$$

iii) 假设 $\forall x, y \in \text{dom } T$ ，(3)成立，则显然有对 $\forall x \in \text{dom } T, y \in \text{Fix } T$ ，(2)成立。事实上，(2)是(1)中 $(I - T)y = 0$ 时的情况。

根据(3)和(5)，我们可以得到，对 $\forall x, y \in \text{dom } T$ ，

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - \left(r_1 + \frac{r'_2}{\eta^2\mu^2}\right) \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 \\ &\quad - r'_3 \left\| r_2(mJ_{\gamma_A}x_i - mJ_{\gamma_A}y) + r_3(nJ_{\delta_B}F_Ax_i - nJ_{\delta_B}F_Ay) \right\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

因此 T 是非扩张的。
证毕。

参考文献

- [1] Bertsekas, D.P. and Gafni, E.M. (1982) Projection Methods for Variational Inequalities with Application to the Traffic Assignment Problem. *Mathematical Programming Studies*, **17**, 139-159. <https://doi.org/10.1007/BFb0120965>
- [2] Dafermos, S. (1980) Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. *Transportation Science*, **14**, 42-54. <https://doi.org/10.1287/trsc.14.1.42>
- [3] Douglas, J. and Rachford, H.H. (1956) On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, **82**, 421-439. <https://www.ams.org/journals/tran/1956-082-02/S0002-9947-1956-0084194-4/S0002-9947-1956-0084194-4.pdf>
- [4] Lions, P.L. and Mercier, B. (1979) Splitting Algorithms for the Sum of Two Nonlinear Operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **16**, 964-979. <https://doi.org/10.1137/0716071>
- [5] Bauschke, H.H., Dao, M.N. and Moursi, W.M. (2016) The Douglas-Rachford Algorithm in the Affine-Convex Case. *Operations Research Letters*, **44**, 379-382. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2016.03.010>
- [6] Bauschke, H.H. and Moursi, W.M. (2017) On the Douglas-Rachford Algorithm. *Mathematical Programming*, **164**, 263-284. <https://doi.org/10.1007/s10107-016-1086-3>
- [7] Dao, M.N. and Phan, H.M. (2018) Adaptive Douglas-Rachford Splitting Algorithm for the Sum of Two Operators. *SIAM Journal on Optimization*, **29**, 2697-2724. <https://doi.org/10.1137/18M121160X>
- [8] Dao, M.N. and Phan, H.M. (2018) Linear Convergence of the Generalized Douglas-Rachford Algorithm for Feasibility Problems. *Journal of Global Optimization*, **72**, 443-474. <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0654-x>
- [9] Svaiter, B.F. (2011) On Weak Convergence of the Douglas-Rachford Method. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **49**, 280-287. <https://doi.org/10.1137/100788100>
- [10] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2017) Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Second Edition, Springer Cham, CMS Books in Mathematics. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-48311-5>