Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 235-240
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141025

Hans汉斯

浅谈高等数学中的神奇常数

徐　建

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年12月15日；录用日期：2023年12月29日；发布日期：2024年1月26日

摘　要

在高等数学中，e和π是两个非常重要的常数。在高等数学的课程当中，包含很多关于这两个常数的内容，也有很多漂亮的结果。本文介绍一些通常的高等数学教材中不太涉及但又非常重要的关于e和π的一些结果。

关键词

高等数学，无理数，悬链线，微积分

A Brief Discussion on Magic Constants in Advanced Mathematics

Jian Xu

School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 15th, 2023; accepted: Dec. 29th, 2023; published: Jan. 26th, 2024

Abstract

In advanced mathematics, e and π are two very important constants. In advanced mathematics courses, there is a lot of content about these two constants, and there are many beautiful results. This article introduces some results about e and π that are not commonly covered in higher mathematics textbooks but are very important.

Keywords

Advanced Mathematics, Irrational Numbers, Catenary, Calculus

文章引用: 徐建. 浅谈高等数学中的神奇常数[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 235-240.
DOI: 10.12677/pm.2024.141025

1. 引言

英国哲学家罗素(Bertrand Russell)曾经说过：数学里不仅有很多真理，而且有着极致的美。这种美冷峻如雕塑，……，它极纯净，能够向我们展示只有最伟大的艺术才具有的完美。

e 和 π 是高等数学课程中最重要的两个常数，比如被誉为最优美的数学公式之一的 Euler 公式——$e^{i\pi}+1=0$，中间就含有 e 和 π。高等数学的课程中包含了关于这两个常数丰富的内容，也得到了许多漂亮的结果。但是在中学的时候，我们就知道 e 和 π 都是无理数，可是并没有给出严格的证明，即使是在通常的高等数学课程中，也并没有给出这两个常数为无理数的证明。在此我们将给出严格证明，同时讲好讲透这两个常数，使学生了解这两个常数在数学中的地位，并从这两个常数来体会数学的“美”，对于提高学生的学习兴趣，提高教学效果，具有重要的意义。

2. 常数 π

2.1. 常数 π 的定义

圆的周长与直径的比定义为圆周率 π，则单位圆的半周长为 π，但单位圆的面积为什么等于 π，则是需要证明的。

我们先定义曲线的长度：将曲线作划分，将分点联结起来，得到一条折线，折线的长度是可以计算的。如果随着划分的加细，折线的长度有极限，且极限值与划分的加细无关，则此极限值就定义为曲线的长度。换言之，曲线的长度为折线长度的极限。

设单位圆内接正 n 边形的半周长为 L_n，则 $L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}$。容易证明数列 $\{L_n\}$ 单调增加有上界，所以由高等数学中的单调有界数列必收敛，可知道 $\{L_n\}$ 收敛[1]，而极限值应该就是单位圆的半周长，即 π：$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi$。由于单位圆的半周长为 π，我们就把半个圆周所对的圆心角(即 180°)的弧度定义为 π，其余角度的弧度则按比例得到。于是按弧度制上式可写成 $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$。

设单位圆的面积为 S_n，单位圆的内接正 n 边形的面积为 S_n'，外切正 n 边形的面积为 S_n''，则 $S_n'<S_n<S_n''$。由于 $\lim_{n\to\infty} S_n'=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=\pi$，$\lim_{n\to\infty} S_n''=\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n}=\pi$。由两边夹原理[2]，可知单位圆的面积等于 π。

2.2. 常数 π 为无理数

虽然从刚刚接触常数 π 开始，一直强调其为无理数，但是并没有给出严格的证明。因为常数 π 为无理数的证明不像证明 $\sqrt{2}$ 为无理数那么初等。此处我们严格来证明常数 π 为无理数这个结论。

反证法。假设常数 π 为有理数，那么 $\pi=\frac{q}{p}$，其中 p,q 均为正整数。考虑函数

$$f(x)=\frac{x^n(q-px)^n}{n!},$$

则 $f(0)=f(\pi)=0$，$f^{(2n+2)}(x)=0$。于是对于 $0<m\le 2n$，由 Leibniz 公式有

$$f^{(m)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(x^n\right)^{(k)}\left(\left(q-px\right)^n\right)^{(m-k)},$$

注意到

$$\left(x^n\right)_{x=0}^{(k)}=\begin{cases}0, & k\neq n\\ n!, & k=n\end{cases}，\quad \left(\left(q-px\right)^n\right)_{x=0}^{(m-k)}=\text{整数，从而有 } f^{(m)}(0)=\text{整数，}$$

$$p!\left(x^n\right)_{x=\pi}^{(k)}=\text{整数，}\quad \left(\left(q-px\right)^n\right)_{x=\pi}^{(m-k)}=\begin{cases}0, & m-k\neq n\\ n!, & m-k=n\end{cases}，\text{ 从而有 } f^{(m)}(\pi)=\text{整数。}$$

可知，$f(x)$ 及其直到 $2n+2$ 阶的导数在 $x=0$ 和 $x=\pi$ 时取整数。于是定义函数

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x),$$

则 $F(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=\pi$ 时取整数。再由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right)=\left(F''(x)+F(x)\right)\sin x=f(x)\sin x,$$

可知，

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=F(0)+F(\pi),$$

为整数。另一方面，当 $0<x<\pi$ 以及 n 充分大的时候，

$$0<f(x)\sin x<\frac{\pi^n q^n}{n!}<\frac{1}{\pi},$$

从而，

$$0<\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x<1,$$

这矛盾于 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 为整数。所以，π 为无理数。

3. 常数 e

3.1. 常数 e 为无理数

常数 e 可以由极限来定义，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ [1]。实际上仔细推敲关于这个极限的证明过程，我们可以知道，如果令 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，则

$$\begin{aligned}x_n&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\quad+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\right.\\&\quad\left.+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\end{aligned}$$

特别的对上式子中的最后一项，我们可以有如下的估计式，

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$$
$$\le\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots n}\right]$$
$$\le\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right]$$
$$\le\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}+\cdots\right]=\frac{1}{k!}\frac{1}{k}$$

于是，就有

$$0<x_n-\left[2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]<\frac{1}{k!}\frac{1}{k}$$

令 $n\to\infty$，就有

$$0<\mathrm{e}-\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right]<\frac{1}{k!}\frac{1}{k},$$

如果记 $\theta=\dfrac{\mathrm{e}-\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right]}{\frac{1}{k!}\frac{1}{k}}$，则显然有 $0<\theta<1$。

另一方面，如果假设 e 为有理数，那么 $\mathrm{e}=\dfrac{q}{p}$，其中 p 和 q 均为正整数。如果令 $k=p$，得到

$$\mathrm{e}-\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right]=\frac{\theta}{p!p}.$$

两边乘上 $p!$，就有

$$(p-1)!q-R=\frac{\theta}{p},$$

其中，$R=p!\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right]$，显然为正整数。于是上式等号左边为正整数，右边却为小于 1 的数，从而矛盾。于是 e 为无理数[3]。

3.2. 常数 e 的应用

当常数 e 出现之后，利用微积分的知识，可以得到正确的悬链线方程。实际上，悬链线这个名字是 1690 年，荷兰物理学家、数学家、天文学家、发明家惠更斯在给德国著名博学家莱布尼茨的一封信中创造的。但历史上，第一个有记载的研究悬链线的是 15 世纪末的达芬奇。达芬奇有一幅画叫《抱着银貂的女子》，女人的脖子上有一串项链，但具体这个项链应该怎么画它自然下垂的样子呢？它垂下来应该是怎么一条曲线呢？达芬奇当时是想不明白的。大约 100 年后，意大利伟大的天文学家、物理学家和工程师伽利略是第一个研究悬链线的人，将其形状认定为抛物线。又 50 年后，17 岁的惠更斯证明了伽利略的猜想是错误的。但具体是什么曲线，在当时还不清楚。不过这已经距离正确解决悬链线问题不远了。

下面来推导悬链线方程。

问题：有一长为 2L 的均匀链条，两端悬挂于相同高度，在重力作用下自然下垂，设两悬挂点距离为 2a ($L > a$)，求链条所成的曲线方程。

解答：设两悬挂点的坐标为$(\pm a, h)$，链条的线密度为ρ。由对称性，只考虑链条的右边半段。

在链条上取水平坐标差为$\Delta x > 0$的一段，记它的长度为ΔL。该段的两端分别受到张力$T(x)$和$T(x+\Delta x)$的作用，另外还受到向下的重力作用。记张力 T 的水平和竖直分量分别为T_x和T_y，则水平方向力的平衡条件为：

$$T_x(x+\Delta x) = T_x(x),$$

竖直方向力的平衡条件为：

$$T_y(x+\Delta x) = T_y(x) + \rho g \Delta L .$$

由于$\Delta L \approx \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\Delta x$得

$$T_x = 常数，\ \frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}x} = \rho g \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}。$$

又注意到$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{T_y}{T_x}$，从而有

$$T_x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \rho g \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} .$$

虽然形式上看起来这是一个二阶常微分方程，但是令$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，就可以得到一个关于 v 的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \beta\sqrt{1+v^2},$$

其中$\beta = \frac{\rho g}{T_x}$。

由此得，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \beta \mathrm{d}x .$$

令$v = \sinh u$，则$u = \beta(x + C_1)$，所以$v = \sinh(\beta(x+C_1))$，于是

$$y = \frac{1}{\beta}\cosh(\beta(x+C_1)) + C_2,$$

这里的C_1和C_2都是积分常数。再由$y(a) = y(-a) = h$，可得$C_1 = 0$，$C_2 = h - \frac{1}{\beta}\cosh(\beta a)$。

但是由于T_x是未知的，所以还需要确定常数β。由链条的长度

$$2L = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\beta}\sinh(\beta a)$$

得到β所满足的方程

$$\frac{\sinh(\beta a)}{\beta a} = \frac{L}{a}.$$

考虑函数 $F(x) = \frac{\sinh x}{x}(x > 0)$，有 $F'(x) = \frac{\cosh x}{x^2}(x - \tanh x)$。又令函数 $G(x) = x - \tanh x (x > 0)$，则 $G'(x) = 1 - \frac{1}{(\cosh x)^2} = \tanh^2 x > 0$，同时注意到 $G(0) = 0$，所以 $G(x) > 0(x > 0)$。因此，$F(x)$ 关于 x 严格单调增加。又注意到 $\lim_{x \to 0} F(x) = 1$，$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$。所以当 $l > a$ 时方程 $\frac{\sinh(\beta a)}{\beta a} = \frac{L}{a}$ 存在唯一的解。

从而，链条的方程为

$$y = \frac{1}{\beta}\left(\cosh(\beta x) - \cosh(\beta a)\right) + h,$$

其中 β 由方程 $\frac{\sinh(\beta a)}{\beta a} = \frac{L}{a}$ 唯一确定。

通常将函数 $y = \frac{1}{\beta}\cosh(\beta x)$ 表示的曲线称为悬链线。

4. 结语

本文主要介绍了数学中的两个常数 e 和 π 的严格定义，并以此为基础，利用高等数学中相关的知识严格证明了数学中的两个常数 e 和 π 是无理数。同时也严格的给出了单位圆面积为 π 的证明，并给出了常数 e 的一个重要应用——推导出了悬链线方程。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第七版, 上册. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第三版, 上册. 北京: 高等教育出版社, 2001.

[3] 寇静. 关于数 e/第二重要极限的几种证明方法[J]. 科技信息(科学教研), 2007(34): 140-141.